C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 555–558

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier

Abdallah Derbal, Meselem Karras

Département de mathématiques, École normale supérieure, Vieux-Kouba Alger, Algérie

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 12 décembre 2015
Accepté après révision le 14 mars 2016
Disponible sur Internet le 14 avril 2016

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Soient $d(n)$ et $d^*(n)$ le nombre de diviseurs et le nombre de diviseurs unitaires de l'entier n, et posons $S(x) = \sum_{n\le x} D(n) = \sum_{n\le x} \frac{d(n)}{d^*(n)}$ $(x \ge 1)$. Un diviseur d d'un entier n est dit unitaire s'il est premier avec $\frac{n}{d}$. Dans cet article, nous montrons que $S(x) \sim Ax$ $(x \to +\infty)$, où $A = \frac{\pi^2}{6}\prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) = 1{,}4276565\cdots$, et que pour tout $x \ge 1$, $S(x) = Ax + R(x)$, tel que

$$|R(x)| \le \frac{3}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

A B S T R A C T

Let $d(n)$ and $d^*(n)$ be the numbers of divisors and the numbers of unitary divisors of the integer n, and let $S(x) = \sum_{n\le x} D(n) = \sum_{n\le x} \frac{\mathrm{d}(n)}{\mathrm{d}^*(n)}$ $(x \ge 1)$. A divisor d of a integer n is called unitary if it is prime with $\frac{n}{d}$. In this paper, we prove that $S(x) \sim Ax$ $(x \to +\infty)$, where $A = \frac{\pi^2}{6}\prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) = 1.4276565\cdots$, and for all $x \ge 1$, $S(x) = Ax + R(x)$ such that

$$|R(x)| \le \frac{3}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Adresses e-mail : abderbal@yahoo.fr (A. Derbal), karras.m@hotmail.fr (M. Karras).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.03.007

1. Introduction

Il est connu que les grandes valeurs de la fonction $D(n)$ oscillent indéfiniment autour de la fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln 2}{3}\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)$ $(x > e)$ [2] ; en revanche, la fonction $D(n)$ prend la valeur 1 sur tout nombre premier p. Ce comportement erratique de $D(n)$ incite à l'étudier en moyenne, ce qui revient à l'étude de la fonction sommatoire réelle $S(x) = \sum_{n\le x} D(n)$ $(x \ge 1)$. Dans une première étape, on a fait un test numérique sur la suite $\frac{S(n)}{n}$, à partir duquel, on a constaté qu'elle se stabilisait autour du nombre $1{,}4270\cdots$ pour $n = 9\times 10^5, \dots, 10^6$, ce qui suggère que la limite du rapport $\frac{S(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$ est une constante A proche de la valeur $1{,}4270\cdots$ et que la fonction $S(x)$ est asymptotiquement très proche de la fonction linéaire Ax. Il s'agit donc de montrer que $S(x) \sim Ax$ $(x \to +\infty)$ où, A est une constante proche de $1{,}427$, et d'étudier ensuite le reste $R(x) = S(x) - Ax$.

Le point de départ est l'évaluation de la série génératrice de la fonction $D(n)$.

Dans cette direction, nous avons obtenu, pour $\Re(s) > 1$, la relation suivante :

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n\ge 1}\frac{D(n)}{n^s} = \zeta(s)G(s),\ \text{où } G(s) = \zeta(2s)\prod_p\left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right). \tag{1}$$

Ici et dans toute la suite, $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann. On se propose ici d'établir le résultat suivant.

Théorème. *Pour tout $x \ge 1$, on a :*

$$\sum_{n\le x} D(n) = Ax + R(x)\ \textit{avec}\ A = \frac{\pi^2}{6}\prod_p\left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right)$$

et

$$|R(x)| \le \frac{3}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

2. Lemmes préparatifs

Lemme 1. *La série de Dirichlet génératrice de la fonction arithmétique $D(n)$ est donnée par*

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n\ge 1}\frac{D(n)}{n^s} = \zeta(s)\,G(s),\ \textit{où } G(s) = \zeta(2s)\prod_p\left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right)\ \left(\Re(s) > \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration. La fonction $D(n)$ étant multiplicative, la série $\mathcal{L}(s)$ est un produit eulérien donné par la formule :

$$\prod_p\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D(p^n)}{p^{ns}} = \prod_p\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2p^{ns}}\right).$$

Remarquons que, pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2p^{ns}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2 = 1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}$$

alors, en multipliant et divisant $\mathcal{L}(s)$ par $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2$, on obtient

$$\mathcal{L}(s) = \prod_p\left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}\right)(\zeta(s))^2\ \ (\Re(s) > 1).$$

Comme on a

$$\left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right)$$

alors pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\mathcal{L}(s) = \prod_p\left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right)\prod_p\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}(\zeta(s))^2.$$

Le résultat annoncé découle alors de la relation suivante

$$\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\quad ([1]\text{ page }231)\,.$$

Définition. On dit que l'entier n est quadratiquement saturé (en anglais *squarefull*) si $n=1$, ou si, pour tout p premier, la valuation p-adique $v_p(n)$ satisfait $v_p(n)\geq 2$.

Proposition. *Un entier n est quadratiquement saturé si est seulement si n s'écrit de manière unique sous la forme $n=a^2b^3$ avec a, b des entiers strictements positifs et b sans facteurs carrés.*

Lemme 2. *La fonction multiplicative $g(n)$ définie par*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g(n)}{n^{s}}=G(s)=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{2p^{2s}}+\frac{1}{2p^{3s}}+\frac{1}{2p^{4s}}+\ldots\right),\Re(s)>\frac{1}{2}$$

est strictement positive si et seulement si n est quadratiquement saturé.

Démonstration. Remarquons que pour tout nombre premier p on a

$$g(p^{\alpha})=\begin{cases}0\text{ si }\alpha=1\\ \frac{1}{2}\text{ si }\alpha\geq 2.\end{cases}$$

Alors, $0\leq g(n)\leq\frac{1}{2}$ pour tout $n\geq 2$ et $g(n)>0$ si seulement si n est quadratiquement saturé.

Lemme 3. *Pour tout $x\geq 1$, on a*

$$\sum_{n^2m^3\leq x}1=\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}+\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Démonstration. Ce lemme résulte des Théorèmes 5.1 et 5.2 de [4].

Démonstration du théorème. La relation (1) fournit un prolongement analytique de $\mathcal{L}(s)$ dans le demi-plan $\Re(s)>\frac{1}{2}$, dont la seule singularité est un pôle simple, de résidu $G(1)$, en $s=1$. Ceci implique que la fonction $h(s)=\zeta(s)G(s)-\frac{G(1)}{s-1}$ est analytique dans le demi-plan $\Re(s)>\frac{1}{2}$; le théorème d'Ikehara ([3], page 332, et [5], page 10) entraîne $S(x)\sim G(1)x$ $(x\to+\infty)$.

On a donc $S(x)\sim Ax$ $(x\to+\infty)$, où

$$A=G(1)=\zeta(2)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{2p^{2}}+\frac{1}{2p^{3}}\right)=1{,}4276565\cdots.$$

Posons $S(x)=Ax+R(x)$, où $R(x)$ est le terme d'erreur.

La méthode élémentaire d'estimation de $S(x)=\sum_{n\leq x}D(n)$ donne

$$S(x)=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}g(d)=\sum_{d\leq x}g(d)\left[\frac{x}{d}\right]\leq x\sum_{d\geq 1}\frac{g(d)}{d}=xG(1)=Ax,$$

d'où $0\leq -R(x)=Ax-S(x)$.

Pour $T(x)=\sum_{n\leq x}g(n)$ et $U(x)=\sum_{n>x}\frac{g(n)}{n}$; en appliquant le lemme 2, on obtient

$$T(x)=\sum_{n\leq x}g(n)=\sum_{n^2m^3\leq x}g\left(n^2m^3\right)\leq\frac{1}{2}\sum_{n^2m^3\leq x}1$$

et par le lemme 3, on a

$$T(x)\leq\frac{1}{2}\left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}+\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}}\right)+O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

On a ainsi, par l'intégrale de Stieltjes :

$$\begin{aligned}
U(x) &= \sum_{n>x} \frac{g(n)}{n} = \int_x^{+\infty} \frac{d[T(u)]}{u} \mathrm{d}u = -\frac{T(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{T(u)}{u^2} \mathrm{d}u \\
&\leq \int_x^{+\infty} \frac{T(u)}{u^2} \mathrm{d}u \leq \int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right) u^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{1}{3}}\right) + O\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^2} \mathrm{d}u \\
&\leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{2}{3}} + O\left(x^{-\frac{4}{5}}\right).
\end{aligned}$$

On observe que

$$-R(x) = \sum_{d \leq x} g(d) \left\{\frac{x}{d}\right\} + x \sum_{d>x} \frac{g(d)}{d} \leq T(x) + xU(x),$$

d'où il résulte

$$-R(x) \leq \frac{3}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Références

[1] T.M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.
[2] A. Derbal, Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, Integers 12 (2012).
[3] K. Ford, Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta Function, Proc. Lond. Math. Soc. 85 (2002) 565–633.
[4] E. Krätzel, Lattice Points, Kluwer Academic Publishers, 1988.
[5] D.P. Parent, Exercices de théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1978.