C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 905–911

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Problèmes mathématiques de la mécanique

Une inégalité de Korn non linéaire dans $W^{2,p}$, $p>n$

A nonlinear Korn inequality in $W^{2,p}$, $p>n$

Philippe G. Ciarlet [a], Sorin Mardare [b]

[a] *Department of Mathematics, City University of Hong Kong, 83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong*
[b] *Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Université de Rouen, avenue de l'Université, BP 12, Technopôle du Madrillet, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 22 juillet 2015
Accepté le 23 juillet 2015
Disponible sur Internet le 24 août 2015

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la propriété du cône intérieur uniforme et soit $p>n$. On établit une inégalité de Korn non linéaire dans $W^{2,p}$, qui fournit une borne supérieure de la norme $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)}$ de la différence entre deux immersions $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ et $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ en fonction de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}$ de la différence entre leurs tenseurs métriques associés $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$.

Soit ensuite Ω un ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, l'ensemble Ω étant situé localement d'un seul côté de sa frontière. Utilisant l'inégalité de Korn non linéaire dans $W^{2,p}$ ci-dessus, on établit la Lipschitz-continuité locale de l'application $\boldsymbol{C}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)\to\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$, qui est bien définie lorsque les composantes du tenseur de courbure de Riemann associé à $\boldsymbol{C}$ s'annulent dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'immersion $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ étant la solution, unique à une isométrie de $\mathbb{E}^n$ près, de l'équation $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{C}$ dans Ω.

ABSTRACT

Let Ω be a bounded and connected open subset of $\mathbb{R}^n$ that satisfies the uniform interior cone property and let $p>n$. We establish a nonlinear Korn inequality in $W^{2,p}$, which provides an upper bound of the $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)}$-norm of the difference between two immersions $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ and $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ in terms of the $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}$-norm of the difference between their associated metric tensors $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ and $\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$.

Second, let Ω be a bounded, simply-connected, open subset of $\mathbb{R}^n$ with a Lipschitz boundary, the set Ω being locally on the same side of its boundary. Using the above nonlinear Korn inequality in $W^{2,p}$, we establish the local Lipschitz-continuity of the mapping $\boldsymbol{C}\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)\to\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$, which is well-defined when the components of the Riemann curvature tensor associated with $\boldsymbol{C}$ vanish in $\mathcal{D}'(\Omega)$, the immersion $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ being the solution, unique up to an isometry of $\mathbb{E}^n$, of the equation $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{C}$ in Ω.

Adresses e-mail : mapgc@cityu.edu.hk (P.G. Ciarlet), sorin.mardare@univ-rouen.fr (S. Mardare).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.07.009
1631-073X/

Abridged English version

The notations used here are defined in Section 1 of the French version. Given an open subset Ω of $\mathbb{R}^n$, two immersions $\boldsymbol{\varphi}:\Omega\to\mathbb{E}^n$ and $\boldsymbol{\psi}:\Omega\to\mathbb{E}^n$ are *isometrically equivalent* if there exist $\boldsymbol{a}\in\mathbb{E}^n$ and $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{O}^n$ such that $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\varphi}$; let $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ denote the associated equivalence relation. The *metric tensor* field $\boldsymbol{C}:\Omega\to\mathbb{S}^n_>$ associated with an immersion $\boldsymbol{\varphi}:\Omega\to\mathbb{E}^n$ is defined by $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}$.

Our *first objective* (see Theorem 2.2) is to establish the following *nonlinear Korn inequality in* $W^{2,p}$, $p>n$: let Ω be a bounded and connected open subset of $\mathbb{R}^n$ that satisfies the uniform interior cone property (cf. [2] or [9]) and let $p\in\mathbb{R}$ be such that $p>n$. Given any $\varepsilon>0$, define the set

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon:=\{\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \det\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\geq\varepsilon \text{ in } \Omega \text{ and } \|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}\leq\frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Then *there exists a constant* $c(\varepsilon)$ *with the following property: given any* $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ *and any* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, *there exists* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp\in\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ *isometrically equivalent to* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ *such that*

$$\|\boldsymbol{\varphi}-\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)}\leq c(\varepsilon)\|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

The proof of this inequality essentially hinges on a basic *comparison theorem between the solutions of Pfaff systems with coefficients only in* $L^p(\Omega)$, due to the second author [15].

Note that, by contrast with the *nonlinear Korn inequalities in* $W^{1,p}$, $p>1$, established in [3] and [4,5], the assumptions made in the above nonlinear Korn inequality in $W^{2,p}$ on the immersions $\boldsymbol{\varphi}$ and $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ are now the *same*, at the expense of an increase in the assumed regularity of the immersions, however.

Let now Ω be a bounded and simply-connected open subset of $\mathbb{R}^n$ with a Lipschitz-continuous boundary, the set Ω being locally on the same side of its boundary, and let $p\in\mathbb{R}$ be such that $p>n$. Define the set

$$\mathbb{T}(\Omega):=\{\boldsymbol{C}=(g_{ij})\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega);\ \boldsymbol{C}(x)\in\mathbb{S}^n_> \text{ at each } x\in\overline{\Omega} \text{ and } R^{\ell}_{\cdot ijk}=0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)\},$$

where $R^{\ell}_{\cdot ijk}$ denote the components of the Riemann curvature tensor associated with any $\boldsymbol{C}=(g_{ij})\in\mathbb{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{S}^n_>)$. Then, *given any* $\boldsymbol{C}\in\mathbb{T}(\Omega)$, *there exists an immersion* $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ *such that*

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{C} \text{ in } \Omega,$$

and such an immersion is unique up to isometries of $\mathbb{E}^n$, in the sense that any immersion $\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ that satisfies $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{C}$ in Ω is isometrically equivalent to $\boldsymbol{\varphi}$. The proof (long and often delicate) of this extension to Sobolev spaces of a fundamental result of Riemannian geometry is due to the second author; cf. [14] and [15].

The set $\mathbb{T}(\Omega)$ becomes a metric space when it is equipped with the distance $d_{1,p,\Omega}$ defined by

$$d_{1,p,\Omega}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}):=\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \text{ for each } \boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{T}(\Omega),$$

and the quotient set $\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega):=\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)/\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ becomes a metric space when it is equipped with the distance $\dot{d}_{2,p,\Omega}$ defined by

$$\dot{d}_{2,p,\Omega}(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\boldsymbol{\psi}}):=\inf\left\{\|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\kappa}\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)};\ \boldsymbol{\chi}\in\dot{\boldsymbol{\varphi}},\boldsymbol{\kappa}\in\dot{\boldsymbol{\psi}}\right\} \text{ for each } \dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\boldsymbol{\psi}}\in\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega).$$

Our *second objective* (see Theorem 3.2) then consists in establishing that *the mapping*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}:\boldsymbol{C}\in\{\mathbb{T}(\Omega);\ d_{1,p,\Omega}\}\to\dot{\boldsymbol{\varphi}}\in\{\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega);\ \dot{d}_{2,p,\Omega}\},$$

where $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{C}$, *is locally Lipschitz-continuous*. To this end, the nonlinear Korn inequality in $W^{2,p}$ (Theorem 2.2) is put to an essential use.

1. Introduction

Dans cette Note, n désigne un entier ≥ 2, les indices et exposants latins varient de 1 à n, et la convention de la sommation par rapport aux indices et exposants répétés est appliquée.

Les notations $\mathbb{M}^n, GL(n), \mathbb{S}^n_>, \mathbb{O}^n$, et $\mathbb{O}^n_+$, désignent respectivement les ensembles de matrices carrées, inversibles, symétriques et définies positives, orthogonales, et orthogonales propres, d'ordre n. L'espace euclidien de dimension n est noté $\mathbb{E}^n$, le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{E}^n$ est noté $\cdot$ et la même notation $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{E}^n$ et la norme matricielle subordonnée correspondante dans $\mathbb{M}^n$.

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, les notations ∂_i et ∂_{ij} désignent les dérivées partielles premières et secondes au sens usuel aussi bien qu'au sens des distributions. Si $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_i):\Omega\to\mathbb{E}^n$ est un champ de vecteurs suffisamment régulier, le champ de matrices $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}:\Omega\to\mathbb{M}^n$ est défini par $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}=(\partial_j\varphi_i)$, où i désigne l'indice de ligne. Les espaces de champs de vecteurs et de champs de matrices définis dans Ω sont respectivement désignés par des lettres grasses et des lettres romaines ; par exemple,

$$\boldsymbol{L}^p(\Omega) = \{\boldsymbol{v} = (v_i) : \Omega \to \mathbb{E}^n;\ v_i \in L^p(\Omega)\},$$
$$\mathbb{W}^{1,p}(\Omega) = \{\boldsymbol{A} = (a_{ij}) : \Omega \to \mathbb{M}^n;\ a_{ij} \in W^{1,p}(\Omega)\}, \text{etc.}$$

On définit les normes

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)} := \left\{\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}(x)|^p \,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, \quad \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)} := \left\{\int_\Omega \Big(|\boldsymbol{\varphi}(x)|^p + \sum_i |\partial_i \boldsymbol{\varphi}(x)|^p\Big)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)} := \left\{\int_\Omega \Big(|\boldsymbol{\varphi}(x)|^p + \sum_i |\partial_i \boldsymbol{\varphi}(x)|^p + \sum_{i,j} \big|\partial_{ij}\boldsymbol{\varphi}(x)\big|^p\Big)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

$$\|\boldsymbol{F}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} := \left\{\int_\Omega |\boldsymbol{F}(x)|^p \,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, \quad \|\boldsymbol{F}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} := \left\{\int_\Omega \Big(|\boldsymbol{F}(x)|^p + \sum_i |\partial_i \boldsymbol{F}(x)|^p\Big)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

pour des champs de vecteurs $\boldsymbol{\varphi}$ dans $\boldsymbol{L}^p(\Omega), \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, ou $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$, et pour des champs de matrices $\boldsymbol{F}$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$, ou $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$. Ces normes sont *invariantes par multiplication dans* $\mathbb{O}^n$, au sens que

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)} = \|\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)}, \quad \|\boldsymbol{F}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} = \|\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{F}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} = \|\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{Q}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}, \quad \text{etc., pour tout } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{E}^n$ une immersion suffisamment régulière (si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, cela veut dire que $\det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$; si $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, cela veut dire que $\nabla\boldsymbol{\varphi}(x) \neq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$). Aux points $x \in \Omega$ où la matrice $\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)$ est bien définie, on pose

$$\boldsymbol{C}(x) := \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi}(x),$$

ce qui définit, peut-être seulement presque partout, le champ de *tenseurs métriques* $\boldsymbol{C} : \Omega \to \mathbb{S}^n_>$ associé à l'immersion $\boldsymbol{\varphi}$.

Deux immersions $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{E}^n$ et $\boldsymbol{\psi} : \Omega \to \mathbb{E}^n$ sont *isométriquement equivalentes* s'il existe un vecteur $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}^n$ et une matrice $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$ tels que $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\varphi}$. Il est clair que deux immersions isométriquement équivalentes ont le même champ de tenseurs métriques.

Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ satisfait la *propriété du cône intérieur uniforme* s'il existe un cône ouvert fini ω dans $\mathbb{R}^n$ tel que tout point de Ω soit le sommet d'un cone congruent à ω et tel que $\overline{\omega}$ soit contenu dans Ω (cf. Adams [2] ou Dautray & Lions [9]). Un *domaine de* $\mathbb{R}^n$ est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, l'ouvert étant situé localement d'un seul côté de sa frontière (cf. Nečas [16] ou Adams [2]). Un domaine satisfait la propriété du cône intérieur uniforme.

On trouvera les démonstrations détaillées des résultats qui suivent dans [7].

2. Une inégalité de Korn non linéaire dans $W^{2,p}$

Une *inégalité de Korn non linéaire* est toute inégalité qui fournit une majoration d'une norme (adaptée aux espaces fonctionnels considérés) de la différence $\boldsymbol{\varphi} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ entre deux immersions $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{E}^n$ et $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} : \Omega \to \mathbb{E}^n$, comprise à une équivalence isométrique près, en fonction d'une norme (également adaptée aux espaces fonctionnels considéres) de la différence $\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ entre leurs champs de tenseurs métriques associés. Les premières inégalités de ce type sont dues à John [11,12] et Kohn [13], qui les ont établies dans le cas particulier ou l'une des deux immersions est l'identité $\mathbf{id}_\Omega$.

Plus récemment (cf. [3–5]), le premier auteur et C. Mardare ont considéré le cas général et établi une *inégalité de Korn non linéaire dans* $W^{1,p}$ qui s'énonce ainsi : soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, soit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$ une immersion satisfaisant $\det \nabla\boldsymbol{\varphi} > 0$ dans $\overline{\Omega}$, et soit $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$ et $\max\{1, \frac{p}{2}\} \leq q \leq p$ (dans [3], seul le cas $2q = p \geq 2$ était considéré). Alors *il existe une constante* $c(\boldsymbol{\varphi})$ *ayant la propriété suivante : quel que soit* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{W}^{1,2q}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}} > 0$ *presque partout dans* Ω, *il existe une immersion* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp \in \boldsymbol{W}^{1,2q}(\Omega)$ *isométriquement équivalente à* $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ *telle que*

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c(\boldsymbol{\varphi})\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^{q/p}_{\mathbb{L}^q(\Omega)}.$$

Dans [3], comme dans [4,5], le point de départ est le lemme *de rigidité géometrique* de Friesecke, James & Müller [10], tel qu'il a été ensuite généralisé par Conti [8].

Dans cette Note, notre *premier objectif* est d'établir une *inégalité de Korn non linéaire dans* $W^{2,p}$, avec comme point de départ un résultat complètement différent, à savoir le résultat suivant de *comparaison de solutions de systèmes de Pfaff « faibles »*, dû au second auteur [15] (« faibles » au sens que leurs solutions sont seulement dans $W^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, au contraire des solutions « classiques », qui sont continûment dérivables dans Ω).

Théorème 2.1. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait la propriété du cône intérieur uniforme, soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $p > n$, et soit $x_0 \in \Omega$. Alors, étant donné une constante $M > 0$ quelconque, il existe une constante $c(M)$ ayant la propriété suivante : soit $\boldsymbol{F}_0 \in \mathbb{M}^n$ et $\tilde{\boldsymbol{F}}_0 \in \mathbb{M}^n$ des matrices, soit $\boldsymbol{\Gamma}_i \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ des champs de matrices qui vérifient*

$$|\boldsymbol{F}_0| + \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\Gamma}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le M \quad et \quad |\tilde{\boldsymbol{F}}_0| + \sum_{i=1}^n \|\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le M,$$

et soit $\boldsymbol{F} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\tilde{\boldsymbol{F}} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ des champs de matrices qui sont solutions des systèmes de Pfaff suivants :

$$\begin{cases} \partial_i \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Gamma}_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ 1 \le i \le n, \\ \boldsymbol{F}(x_0) = \boldsymbol{F}_0, \end{cases} , \quad \begin{cases} \partial_i \tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{F}}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ 1 \le i \le n, \\ \tilde{\boldsymbol{F}}(x_0) = \tilde{\boldsymbol{F}}_0. \end{cases}$$

Alors ces champs de matrices vérifient :

$$\|\boldsymbol{F} - \tilde{\boldsymbol{F}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \le c(M)\Big(|\boldsymbol{F}_0 - \tilde{\boldsymbol{F}}_0| + \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\Gamma}_i - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big). \qquad \square$$

Le Théorème 2.1 permet alors d'établir l'inégalité de Korn non linéaire annoncée.

Théorème 2.2. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait la propriété du cône intérieur uniforme et soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $p > n$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On définit l'ensemble*

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon := \{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \det \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} \ge \varepsilon \text{ dans } \Omega \text{ et } \|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \le \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Alors il existe une consante $c(\varepsilon)$ ayant la propriété suivante : quels que soient $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ et $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, il existe une immersion $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ isométriquement équivalente à $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ telle que

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\sharp\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)} \le c(\varepsilon)\|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}$$

Esquisse de la démonstration. On rappelle que, si $p > n$, la propriété du cône intérieur uniforme entraîne que $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, et que $W^{1,p}(\Omega)$ est une algèbre.

(i) Soit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, soit $x_0 \in \Omega$, et soit $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x_0)$. Alors le champ de matrices $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ résoud un système de Pfaff de la forme

$$\partial_i \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\Gamma}_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ 1 \le i \le n, \text{ et } \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{F}_0,$$

où

$$\boldsymbol{C} := \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} = (g_{ij}) \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{\Gamma}_i := \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_i \in \mathbb{L}^p(\Omega),\ (\boldsymbol{\Lambda}_i)_{\ell j} := \frac{1}{2}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}) \in L^p(\Omega).$$

ℓ désignant ici l'indice de ligne (on vérifie facilement que $\boldsymbol{C}^{-1} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ si $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ grâce à l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$).

(ii) Soit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ et $x \in \Omega$. Alors $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x)$ est bien défini, puisque $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ et, par ailleurs, $|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x)| = |\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x)|^{1/2}$. Comme $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\Omega)$ et comme $\|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \le \frac{1}{\varepsilon}$, on conclut que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_0(\varepsilon)$ telle que

$$|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(x)| \le M_0(\varepsilon) \text{ pour tout } \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon \text{ et tout } x \in \Omega.$$

(iii) Utilisant l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, on déduit qu'il existe une constante γ_1 indépendante de ε telle que, quel que soit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, les champs correspondants $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{\Lambda}_i$ vérifient

$$\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \|\frac{1}{\det \boldsymbol{C}}(\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \le \frac{\gamma_1}{\varepsilon^n} \text{ et } \|\boldsymbol{\Lambda}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le \frac{\gamma_1}{\varepsilon},$$

d'où l'on déduit facilement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_1(\varepsilon)$ telle que

$$\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le M_1(\varepsilon),\ 1 \le i \le n, \text{ pour tout } \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon.$$

(iv) Étant donné $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ et $x_0 \in \Omega$, on définit la matrice

$$\boldsymbol{Q}_0 := \nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0)(\boldsymbol{C}(x_0))^{-1/2}(\tilde{\boldsymbol{C}}(x_0)^{1/2}(\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_0))^{-1} \in \mathbb{O}^n,$$

où $\boldsymbol{C} := \nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi}$ et $\tilde{\boldsymbol{C}} := \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$. Utilisant l'invariance de la norme matricielle $|\cdot|$ par multiplication par matrices orthogonales et notant que l'application $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{1/2}$ est Lipschitz-continue sur le compact $\{\boldsymbol{C} \in GL(n);\ \det\boldsymbol{C} \geq \varepsilon$ et $|\boldsymbol{C}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, on déduit qu'il existe une constante $c_0(\varepsilon)$ telle que, pour tout $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$,

$$|\nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0) - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_0)| \leq c_0(\varepsilon)\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

(v) Étant donné $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, on définit les champs $\boldsymbol{C}, \tilde{\boldsymbol{C}} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$, $\boldsymbol{\Lambda}_i, \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_i \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, et $\boldsymbol{\Gamma}_i = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_i$, $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i = \tilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_i \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ comme en (i). On note tout d'abord qu'il existe une constante γ_2 indépendante de ε et de $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ telle que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Gamma}_i - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} &= \|(\boldsymbol{C}^{-1} - \tilde{\boldsymbol{C}}^{-1})\boldsymbol{\Lambda}_i + \tilde{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}_i - \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_i)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\\ &\leq \gamma_2\Big(\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{C}^{-1} - \tilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^n}\|\boldsymbol{\Lambda}_i - \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

On sait par ailleurs que l'application $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $GL(n)$ de $\mathbb{M}^n$. Le théorème des accroissements finis entraîne alors que cette même application est Lipschitz-continue sur le compact $\{\boldsymbol{C} \in GL(n);\ \det\boldsymbol{C} \geq \varepsilon$ et $|\boldsymbol{C}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$.

On déduit alors facilement de ce qui précède qu'il existe une constante $c_1(\varepsilon)$ telle que

$$\|\boldsymbol{\Gamma}_i - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq c_1(\varepsilon)\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } \boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon.$$

(vi) Étant donné $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ et $x_0 \in \Omega$, on définit le champ de vecteurs $\boldsymbol{\psi} := \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$, où la matrice $\boldsymbol{Q}_0 \in \mathbb{O}^n$ est celle définie en (iv). On remarque alors que les champs de matrices $\nabla\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ sont solutions des systèmes de Pfaff

$$\begin{cases}\partial_i\nabla\boldsymbol{\varphi} = \nabla\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\Gamma}_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq n,\\ \nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0)\end{cases}, \quad \begin{cases}\partial_i\nabla\boldsymbol{\psi} = \nabla\boldsymbol{\psi}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq n,\\ \nabla\boldsymbol{\psi}(x_0) = \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_0),\end{cases}$$

et donc que, d'après (ii) et (iii),

$$|\nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0)| + \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\Gamma}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq M(\varepsilon) \quad \text{et} \quad |\nabla\boldsymbol{\psi}(x_0)| + \sum_{i=1}^n \|\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq M(\varepsilon),$$

où $M(\varepsilon) := M_0(\varepsilon) + nM_1(\varepsilon)$. Alors le Théorème 2.1 et les majorations obtenues en (iv) et (v) montrent que

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} &\leq c(M(\varepsilon))\Big(|\nabla\boldsymbol{\varphi}(x_0) - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x_0)| + \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\Gamma}_i - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big)\\ &\leq c_2(\varepsilon)\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } \boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon,\end{aligned}$$

où $c_2(\varepsilon) := c(M(\varepsilon))(c_0(\varepsilon) + nc_1(\varepsilon))$.

(vii) Étant donné $\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ et $x_0 \in \Omega$, on définit le vecteur $\boldsymbol{a}_0 \in \mathbb{E}^n$ par $\boldsymbol{a}_0 := (\int_\Omega \mathrm{d}x)^{-1}\int_\Omega(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}x$, où la matrice $\boldsymbol{Q}_0$ est celle définie en (iv). Une généralisation de l'inégalité de Poincaré–Friedrichs, également connue sous le nom d'inégalité de Poincaré–Wirtinger, montre alors qu'il existe une constante γ_3 telle que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varphi}} - (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma_3\|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)},$$

puisque $\int_\Omega(\boldsymbol{\varphi} - (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}}))\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}$. Par suite, il existe des constantes γ_4 et γ_5 telles que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi} - (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)} &\leq \gamma_4\Big(\|\boldsymbol{\varphi} - (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}\Big)\\ &\leq \gamma_5\|\nabla\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{Q}_0\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc, on déduit de (vi) que, en posant $c(\varepsilon) := \gamma_5 c_2(\varepsilon)$,

$$\|\boldsymbol{\varphi} - (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Q}_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)} \leq c(\varepsilon)\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} - \nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)}. \qquad \square$$

Il est à noter que, contrairement aux *inégalités de Korn non linéaires dans* $W^{1,p}$, $p \geq 2$, établies dans [3–5], les hypothèses faites dans le Théorème 2.2 sur les immersions $\boldsymbol{\varphi}$ et $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ sont maintenant *identiques*, au prix toutefois d'une hypothèse accrue de régularité sur ces immersions.

3. Lipschitz-continuité locale d'une immersion $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ considérée comme une fonction de son tenseur métrique $\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$

Il est classique qu'un champ de matrices symétriques définies positives (g_{ij}) de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ est le champ de tenseurs métriques d'une immersion de classe $\mathcal{C}^3$ dans Ω, alors définie seulement à une isométrie de $\mathbb{R}^n$ près, si le tenseur de courbure de Riemann associé s'annule dans Ω. L'extension suivante (longue et techniquement délicate) de ce résultat fondamental de la géométrie riemannienne à des espaces de Sobolev résulte des travaux [14] et [15] du second auteur.

Théorème 3.1. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $p > n$. Soit $\boldsymbol{C} = (g_{ij}) \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ un champ de matrices symétriques définies positives qui vérifie*

$$R^{\ell}_{\cdot ijk} := \partial_j \Gamma^{\ell}_{ik} - \partial_k \Gamma^{\ell}_{ij} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{\ell}_{jm} - \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{km} = 0 \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où

$$\Gamma^{\ell}_{ij} := g^{\ell q}\Gamma_{ijq}, \quad (g^{\ell q}) := (g_{ij})^{-1}, \quad \Gamma_{ijq} := \frac{1}{2}(\partial_j g_{iq} + \partial_i g_{jq} - \partial_q g_{ij}).$$

Alors il existe une immersion $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ telle que

$$\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{C} \textit{ dans } \Omega.$$

Une telle immersion est unique à une isométrie de $\mathbb{R}^n$ près, au sens que toute immersion $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ qui vérifie $\nabla\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{C}$ dans Ω est isométriquement équivalente à $\boldsymbol{\varphi}$. $\square$

Dans ce qui suit, $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ désigne la relation d'équivalence isométrique dans $\mathbb{E}^n$, l'ensemble quotient de $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ *modulo* $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ est noté $\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega) := \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)/\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$, et $\dot{\boldsymbol{\psi}} \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$ désigne la classe d'équivalence *modulo* $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ d'un élément $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$.

Dans cette Note, notre *second objectif* est d'établir la *Lipschitz-continuité locale de l'application* $\boldsymbol{C} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega) \to \dot{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)/\boldsymbol{\mathcal{R}}(\Omega)$ définie par le Théorème 3.1, en utilisant l'inégalité de Korn non linéaire dans $W^{2,p}$ du Théorème 2.2.

Théorème 3.2. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $p > n$. On munit l'ensemble*

$$\mathbb{T}(\Omega) := \{\boldsymbol{C} = (g_{ij}) \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega);\, \boldsymbol{C}(x) \in \mathbb{S}^n_{>} \textit{ à chaque } x \in \overline{\Omega} \textit{ et } R^{\ell}_{\cdot ijk} = 0 \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\}$$

de la distance $d_{1,p,\Omega}$ définie par

$$d_{1,p,\Omega}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) := \|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \textit{ pour tout } \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{T}(\Omega),$$

et on munit l'ensemble quotient $\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$ de la distance $\dot{d}_{2,p,\Omega}$ définie par

$$\dot{d}_{2,p,\Omega}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \inf\left\{\|\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\kappa}\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)};\ \boldsymbol{\chi} \in \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\kappa} \in \dot{\boldsymbol{\psi}}\right\} \textit{ pour tout } \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\psi}} \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega).$$

D'après le Théorème 3.1, étant donné un élément quelconque $\boldsymbol{C} \in \mathbb{T}(\Omega)$, il existe un et un seul élément $\dot{\boldsymbol{\varphi}} \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$ tel que $\nabla\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{C}$ pour tout $\boldsymbol{\chi} \in \dot{\boldsymbol{\varphi}}$. Alors l'application

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} : \boldsymbol{C} \in \{\mathbb{T}(\Omega);\ d_{1,p,\Omega}\} \to \dot{\boldsymbol{\varphi}} \in \{\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega); \dot{d}_{2,p,\Omega}\}$$

ainsi définie est localement Lipschitz-continue.

Esquisse de la démonstration. Tout d'abord, on établit facilement que la fonction $\dot{d}_{2,p,\Omega} : \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie ci-dessus est une distance sur l'ensemble $\dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$ et qu'elle peut être aussi définie par

$$\dot{d}_{2,p,\Omega}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \inf\left\{\|\boldsymbol{\varphi} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\psi})\|_{\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)};\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{E}^n,\ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n\right\} \text{ pour tout } \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\psi}} \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega).$$

On montre ensuite que, étant donné un élément quelconque $\boldsymbol{C} \in \mathbb{T}(\Omega)$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{C}) > 0$ et $\delta = \delta(\boldsymbol{C}) > 0$ tels que

$$\|\tilde{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \leq \delta \text{ implique } \tilde{\boldsymbol{C}} \in \boldsymbol{\Phi}_{\varepsilon}$$

où l'ensemble $\boldsymbol{\Phi}_{\varepsilon}$ est celui défini dans le Théorème 2.2.

Soit enfin $\boldsymbol{C}_1 \in \mathbb{T}(\Omega)$ et $\boldsymbol{C}_2 \in \mathbb{T}(\Omega)$ tels que

$$\|\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \leq \delta \text{ et } \|\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \leq \delta,$$

et soit $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 := \mathcal{F}(\boldsymbol{C}_1) \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$ et $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_2 := \mathcal{F}(\boldsymbol{C}_2) \in \dot{\boldsymbol{W}}^{2,p}(\Omega)$. Alors le Théorème 2.2 montre que

$$d_{2,p,\Omega}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2) \le c(\varepsilon)\, \|\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2\|\,,$$

ce qui établit la Lipschitz-continuité annoncée. □

Dans [7], on montre que les conclusions du Théorème 3.2 subsistent lorsque l'ouvert Ω est borné, connexe, et satisfait seulement la propriété du cône intérieur uniforme, à condition d'ajouter la condition $(\det \boldsymbol{C})^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ dans la définition de l'ensemble $\mathbb{T}(\Omega)$. Utilitant les techniques de l'analyse dans les variétés telles qu'elle sont développées dans [1], on montre aussi dans [7] que l'application $\mathcal{F}$ définie dans le Théorème 3.2, vue maintenant comme une application entre *variétés de Banach*, est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ lorsque la frontière du domaine Ω est suffisamment régulière. Pour une présentation générale de ce type de questions et d'autres références, on pourra utilement se reporter à [6].

Références

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer, New York, 1985.
[2] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
[3] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Continuity of a deformation in H^1 as a function of its Cauchy–Green tensor in L^1, J. Nonlinear Sci. 14 (2004) 415–427.
[4] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Inégalités de Korn non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, avec ou sans conditions aux limites, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (6) (2015) 563–568.
[5] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Nonlinear Korn inequalities, J. Math. Pures Appl. (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2015.07.007, à paraître.
[6] P.G. Ciarlet, C. Mardare, S. Mardare, Recovery of immersions from their metric tensors and nonlinear Korn inequalities: a brief survey, Chin. Ann. Math. Ser. B (2015), à paraître.
[7] P.G. Ciarlet, S. Mardare, Immersions in $W^{2,p}$, $p > n$, as functions of their metric tensors in $W^{1,p}$, in preparation.
[8] S. Conti, Low-energy deformations of thin elastic plates: isometric embeddings and branching patterns, Habilitationsschrift, Universität Leipzig, Allemagne, 2004.
[9] R. Dautray, J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 2: Functional and Variational Methods, Springer, 2000.
[10] G. Friesecke, R. James, S. Müller, A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three dimensional elasticity, Commun. Pure Appl. Math. 55 (2002) 1461–1506.
[11] F. John, Rotation and strain, Commun. Pure Appl. Math. 14 (1961) 391–413.
[12] F. John, Bounds for deformations in terms of average strains, in: O. Shisha (Ed.), Inequalities III, Academic Press, New York, 1972, pp. 129–144.
[13] R.V. Kohn, New integral estimates for deformations in terms of their nonlinear strains, Arch. Ration. Mech. Anal. 78 (1982) 131–172.
[14] S. Mardare, On isometric immersions of a Riemannian space with little regularity, Anal. Appl. 2 (2004) 193–226.
[15] S. Mardare, On systems of first order linear partial differential equations with L^p coefficients, Adv. Differ. Equ. 12 (2007) 301–360.
[16] J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.