C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 877–882

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Une notion de multizêtas finis associée au Frobenius du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$

A notion of finite multiple zeta values associated with the Frobenius of the fundamental group of $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$

David Jarossay

Institut de mathématiques de Jussieu Paris Rive-Gauche, Université Paris-Diderot, 75005 Paris, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 16 juillet 2015
Accepté le 23 juillet 2015
Disponible sur Internet le 24 août 2015

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Nous montrons que les sommes harmoniques multiples de la forme

$$\sum_{ap^k<n_1<\ldots<n_d<(a+1)p^k} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}, \quad \text{pour } a\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}^*, s_d,\ldots,s_1\in\mathbb{N}^*,$$

admettent un développement canonique simple en termes de multizêtas p-adiques. Plus généralement, nous interprétons géométriquement la multiplication par p de la borne supérieure d'une somme harmonique multiple. Cela équivaut à l'inversion des sommes de séries qui expriment les multizêtas p-adiques. Le résultat entraîne la définition d'une notion de multizêtas finis qui est d'origine géométrique ; il donne un cadre pour étudier les propriétés algébriques des sommes harmoniques multiples dont la borne supérieure est une puissance d'un nombre premier. Le résultat a aussi des applications à une conjecture de Kaneko et Zagier.

A B S T R A C T

We show that multiple harmonic sums of the form

$$\sum_{ap^k<n_1<\ldots<n_d<(a+1)p^k} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}, \quad \text{for } a\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}^*, s_d,\ldots,s_1\in\mathbb{N}^*,$$

admit a simple canonical expansion in terms of p-adic multiple zeta values. More generally, we interpret geometrically the multiplication by p of the upper bound of a multiple harmonic sum. This is equivalent to the inversion of the sums of series that express p-adic multiple zeta values. The result leads to the definition of a notion of finite multiple zeta values that is of geometric origin; it gives a framework to study the algebraic properties

Adresse e-mail : david.jarossay@imj-prg.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.07.008

of those multiple harmonic sums whose upper bound is a power of a prime number. The result also has applications to a conjecture of Kaneko and Zagier.

1. Notations

Pour les définitions, dont la grande majorité a été établie dans [1] et [2], nous renvoyons à notre note précédente [9]. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $X = \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$; π_1^{dR} la réalisation de De Rham du groupoïde fondamental motivique. Les points-bases tangentiels $\vec{1}$ en 0, $-\vec{1}$ en 1 sont notés respectivement 0 et 1 pour simplifier. ∇_{KZ} est la connexion de Knizhnik–Zamolodchikov ;
- $\zeta(s_d, \ldots, s_1) = \sum_{0<n_1<\ldots<n_d} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_d^{s_d}} \in \mathbb{R}$ les nombres multizêtas, pour $s_d, \ldots, s_1 \in \mathbb{N}^*$ tels que $s_d \geq 2$, et leur version régularisée selon les intégrales itérées lorsque $s_d = 1$;
- $F^*\pi_1^{\mathrm{dR}}$ le pull-back par Frobenius de $\pi_1^{\mathrm{dR}}/\mathbb{Q}_p$ et F_* l'isomorphisme horizontal $\pi_1^{\mathrm{dR}} \to F^*\pi_1^{\mathrm{dR}}$;
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, ζ_{p^k} les multizêtas p-adiques associés à la k-ième itération du Frobenius ; $\zeta_{p^{-k}}$ leur inverse pour l'action d'Ihara ; Φ_{p^k} et $\Phi_{p^{-k}}$ les associateurs correspondants ; Li_{p^k} et $\mathrm{Li}_{p^{-k}}$ les polylogarithmes multiples p-adiques correspondants. $\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}$ les polylogarithmes multiples p-adiques de Furusho ;
- $H_N(s_d, \ldots, s_1) = \sum_{0<n_1<\ldots<n_d<N} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_d^{s_d}}$ les sommes harmoniques multiples, pour $N, s_d, \ldots, s_1 \in \mathbb{N}^*$;
- le poids d'un multizêta ou d'une somme harmonique multiple, associé(e) à $(s_d, \ldots, s_1) \in (\mathbb{N}^*)^d$, est $s_d + \ldots + s_1$;
- $\circ$ le produit d'Ihara sur $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X; 1, 0)$. De plus, τ est l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X; 1, 0)$ par $\lambda \mapsto$ (multiplication par λ^{poids}) ;
- $\mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ l'algèbre non commutative des séries formelles en deux variables e_0, e_1 à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. Celles-ci sont notées $f = \sum_{w \text{ mot en } e_0, e_1} f[w]w$. Le poids d'un mot en e_0, e_1 est son nombre total de lettres, et sa profondeur est son nombre de lettres égales à e_1 ;
- pour S une série formelle en la variable z, et pour $n \in \mathbb{N}$, $S[z^n]$ le coefficient de z^n dans S.

2. Le résultat principal

2.1. Enoncé

Ce qui suit est l'inversion des sommes de séries de [5] et de [9] des nombres multizêtas p-adiques, ainsi qu'en même temps, l'interprétation géométrique de la multiplication par p des sommes harmoniques multiples. Ce résultat et sa preuve sont exposés plus en détail dans l'article [6].
La notation $N^{\mathrm{poids}} H_N$ se réfère à la suite $(N^{s_d+\ldots+s_1} H_N(s_d, \ldots, s_1))_{d \in \mathbb{N}^*, (s_d, \ldots, s_1) \in (\mathbb{N}^*)^d}$.

Théorème. *Soit $\circ_H$ la variante de l'action d'Ihara (§1.1) définie ci-après. On a, pour tous k, N dans $\mathbb{N}^*$:*

$$\tau(N)(\Phi_{p^{-k}}) \circ_H (p^k N)^{\mathrm{poids}} H_{p^k N} = N^{\mathrm{poids}} H_N.$$

Cela implique l'égalité suivante : pour $a = 0$, c'est le cas $N = 1$ du théorème ; le cas $a = 0$ implique aisément le cas général :

$$\sum_{ap^k<n_1<\ldots<n_d<(a+1)p^k} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_d^{s_d}} = (\Phi_{p^{-k}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-k}})\Big[\frac{1}{1-e_0} e_1 \frac{e_0^{s_d-1}}{(1+e_0 a)^{s_d}} e_1 \ldots \frac{e_0^{s_1-1}}{(1+e_0 a)^{s_1}} e_1\Big]. \tag{1}$$

Pour $a = 0$ et $k = 1$, cette dernière égalité a été conjecturée par Yasuda et Hirose [12], sous la forme suivante (avec nos conventions) : pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $(s_d, \ldots, s_1) \in (\mathbb{N}^*)^d$, on a :

$$\begin{aligned}(-1)^d \sum_{k=0}^{d} \Bigg(\sum_{l_{k+1}, \ldots, l_d \geq 0} \prod_{i=k+1}^{d} (-1)^{s_i} \binom{l_i + s_i - 1}{l_i} . \zeta_{p^{-1}}(s_{k+1} + l_{k+1}, \ldots, s_d + l_d) \Bigg) \zeta_{p^{-1}}(s_k, \ldots, s_1) \\ = p^{s_d+\ldots+s_1} H_p(s_d, \ldots, s_1).\end{aligned} \tag{2}$$

Pour $a = 0$, $k = 1$ et $d = 1$ cette égalité concerne les valeurs zêta p-adiques classiques et les sommes harmoniques, et est un résultat relativement ancien de Washington [11]. Pour $a = 0$, $k = 1$ et $d = 2$, elle a été prouvée par M. Hirose [12].

2.2. L'action d'Ihara harmonique $\circ_H$

Décrivons maintenant la définition de la variante de l'action d'Ihara qui apparaît dans l'énoncé.

Définition 2.1. Soit $\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma \subset \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)$ le sous-ensemble formé des points f tels que $f[e_0]=f[e_1]=0$ et pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, $\sup_{\substack{w_{n,d}\text{ mot en }e_0,e_1\\ \text{de poids n et profondeur d}}} \left|f[w_{n,d}]\right|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; i.e. tels que, pour toute suite (w_m) de mots en e_0,e_1 telle que $\limsup \mathrm{profondeur}(w_m)<+\infty$ et $\mathrm{poids}(w_m)\to_{m\to+\infty}+\infty$, on a $\sum_{m\geq 0}|f[w_m]|_p<+\infty$.

On note les coordonnées d'un point h de $\mathbb{A}^{\cup_{d\in\mathbb{N}^*}(\mathbb{N}^*)^d}$ par $h(s_d,\dots,s_1)$.
On a une application :

$$\Sigma:\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma \to \mathbb{A}^{\cup_{d\in\mathbb{N}^*}(\mathbb{N}^*)^d}(\mathbb{Q}_p)\ ,\ f\mapsto \Sigma_f,$$

$$\Sigma_f(s_d,\dots,s_1)=\sum_{L=0}^{+\infty}(f^{-1}e_1f)[e_0^Le_1e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1].$$

Soit $\mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p)$ l'image de Σ.

Lemme–Définition 2.2. $\left(\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma,\circ\right)$ est un sous-groupe de $\left(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p),\circ\right)$ pour le produit d'Ihara. Il existe une unique action de groupes $\circ_H:(\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0))(\mathbb{Q}_p)_\Sigma\times\mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p)$ telle qu'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma\times\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma & \overset{\circ}{\longrightarrow} & \tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma \\ \downarrow \mathrm{id}\times\Sigma & & \downarrow\Sigma \\ \tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma\times\mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p) & \overset{\circ_H}{\longrightarrow} & \mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p). \end{array} \tag{3}$$

3. Esquisse de la preuve

On note $\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}$ les polylogarithmes multiples p-adiques définis par Furusho ([3,4]). Soit, comme dans [1], §19.6, le complété formel de $\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_p$ le long de la réduction modulo p de $\mathbb{P}^1\backslash\{1\}$; sa fibre générique est $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[$ sur $\mathbb{Q}_p$; soient, sur cet espace, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, les polylogarithmes multiples p-adiques $\mathrm{Li}_{p^k}(z)=F_*^k({}_z1_0)$, et $\mathrm{Li}_{p^{-k}}(z)=\tau(p^k)F_*^{-k}({}_z1_0)$. Dans le cas particulier de $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, l'horizontalité du Frobenius de [1] §11 s'énonce alors ([4], theorem 2.14 pour $k=1$) comme suit.

Théorème 3.1. *Pour tous $k\in\mathbb{N}^*$ on a :*

$$\mathrm{Li}_{p^{-k}}(z).\,\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}(z^{p^k})\left(e_0,\Phi_{p^{-k}}^{-1}e_1\Phi_{p^{-k}}\right)=\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}(z)(p^ke_0,p^ke_1). \tag{4}$$

À tout point h de Har, on peut associer une série $u_h\in\mathbb{Q}_p\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ définie par : pour tous $d\in\mathbb{N}^*$, et $(L,s_d,\dots,s_1)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}^*)^d$, $u_h[e_0^Le_1e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1]=h(s_d,\dots,s_1)$, et les autres coefficients de u_h sont nuls.

Lemme 3.2. *Soit $h\in\mathrm{Har}(\mathbb{Q}_p)$; pour tout $g\in\tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma$, pour tout $d\in\mathbb{N}^*$ et $(s_d,\dots,s_1)\in(\mathbb{N}^*)^d$ on a :*

$$(g\circ h)(s_d,\dots,s_1)=\lim_{L\to+\infty}u_h(e_0,g^{-1}e_1g)\left[e_0^Le_1e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1\right].$$

Lemme 3.3. *Soient $d\in\mathbb{N}^*$, $(L,s_d,\dots,s_1)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}^*)^d$ et $N\in\mathbb{N}^*$.*

i) On a :

$$(\tau(N)\,\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}})[e_0^Le_1e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1][z^N]=N^{s_d+\dots+s_1}H_N(s_d,\dots,s_1). \tag{5}$$

ii) Sous réserve que la limite existe, on a :

$$\begin{aligned}&\lim_{L\to+\infty}\tau(N)\left(\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}\left(e_0,\Phi_{p^{-k}}^{-1}e_1\Phi_{p^{-k}}\right)\right)[e_0^Le_1e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1][z^N]\\ &\quad=\left(\tau(N)(\Phi_{p^{-k}})\circ_H N^{\mathrm{poids}}H_N\right)(s_d,\dots,s_1).\end{aligned} \tag{6}$$

Lemme 3.4. *Soit $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

i) Pour tout mot $w\neq\emptyset$ dans $\mathcal{H}_{ш}$, on a $\mathrm{Li}_{p^k}[w](z=0)=0$.

i′) Pour tout mot $w \neq \emptyset$ dans $\mathcal{H}_{ш} e_1$, on a $\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}[w](z=0)=0$.
ii) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Li}_{p^k}[e_0^m]=0$.

Corollaire 3.5. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(L, s_d, \ldots, s_1) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^d$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Le théorème 3.1 se reformule (pour $k=1$) en :*

$$\begin{aligned}
&\tau(N)\,\mathrm{Li}_{p^{-1}}[e_0^L e_1 e_0^{s_d-1} e_1 \ldots e_0^{s_1-1} e_1][z^{pN}] \\
&\quad + \tau(N)\big(\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}\,(e_0, \Phi_{p^{-1}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-1}})\big)[e_0^L e_1 e_0^{s_d-1} e_1 \ldots e_0^{s_1-1} e_1][z^N] \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \le n \le pN-1 \\ p \mid n}} \sum_{\substack{w_1^{(L)}, w_2 \text{ mots en } e_0, e_1 \\ e_0^L e_1 e_0^{s_d-1} e_1 \ldots e_0^{s_1-1} e_1 = w_1^{(L)} w_2 \\ \text{profondeur}(w_1^{(L)}) \ge 1,\ w_2 \neq \emptyset}} \tau(N)\,\mathrm{Li}_{p^{-1}}[w_1^{(L)}]\big[z^n\big].\tau(N)\,\mathrm{Li}_p^{\mathrm{KZ}}\,\big(e_0, \Phi_{p^{-1}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-1}}\big)[w_2]\big[z^{N-\frac{n}{p}}\big] \\
&= (pN)^{s_d+\ldots+s_1} H_{pN}(s_d, \ldots, s_1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Fait 3.6. *(Voir [5].) Soit w un mot en e_0, e_1 de poids n et de profondeur d. Soit $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.*

i) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_p(\mathrm{Li}_{p^k}[w][z^m]) \ge \inf_{l \in \mathbb{N}} \big(l + n - (2d\log(2d) - d + 1) - 2d\log(l+n)\big). \tag{8}$$

ii) On a :

$$v_p(\Phi_{p^k}[w]) \ge n - \big(2d\log(2dn) - d + 1\big). \tag{9}$$

En particulier, $\Phi_{p^k} \in \tilde{\pi}_1^{\mathrm{dR}}(X; 1, 0)(\mathbb{Q}_p)_\Sigma$.

Corollaire 3.7. *Dans l'équation (7), lorsque $L \to \infty$, les première et troisième lignes tendent vers* 0.

4. Définition des multizêtas finis et autres applications

4.1. Préliminaires

L'étude des propriétés algébriques des nombres $H_p(s_d, \ldots, s_1) \mod p$ pour p assez grand, comme des analogues de celles des nombres multizêtas, remonte au début des années 2000, et a été initiée notamment par Hoffman et Zhao.

Récemment, Zagier a appelé *multizêtas finis* les nombres

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s_d, \ldots, s_1) = \big(H_p(s_d, \ldots, s_1) \mod p\big)_{p \text{ premier}} \in \mathcal{A} = \Big(\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)\big/\big(\oplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big)$$

et a formulé les conjectures précises suivantes à leur sujet. Soient les $d_s^{\mathrm{conj}} \in \mathbb{N}$, pour $s \in \mathbb{N}$, définis par le fait que, pour x une variable formelle, on a $\sum_{s \ge 0} d_s^{\mathrm{conj}} x^s = \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3}$. Soient $d_s^{\zeta_{\mathcal{A}}}$, $d_s^{\zeta_p}$, $d_s^{\zeta \mod \zeta(2)}$, $s \in \mathbb{N}$, les dimensions respectives des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels engendrés par les multizêtas finis, resp. multizêtas p-adiques ζ_{p^k} (pour une valeur de k arbitraire), multizêtas réels modulo l'idéal $(\zeta(2))$, de poids $s \in \mathbb{N}$. Une conjecture due à Deligne est que $d_s^{\zeta_p} = d_s^{\zeta \mod \zeta(2)} = d_s^{\mathrm{conj}}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. La première conjecture de Zagier est que $d_s^{\mathcal{A}} = d_s^{\mathrm{conj}}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Une deuxième conjecture, due à Kaneko et Zagier, est que les relations algébriques satisfaites par les $\zeta_{\mathcal{A}}$ sont identiques à celles satisfaites par les nombres

$$\sum_{n=0}^{d} (-1)^{s_{n+1}+\ldots+s_d} \zeta(s_{n+1}, \ldots, s_d)\zeta(s_n, \ldots, s_1) \mod \zeta(2). \tag{10}$$

Enfin, dans [10], Rosen a appelé *weighted finite multiple zeta values* les nombres

$$\hat{\zeta}(s_d, \ldots, s_1) = \Big(p^{s_d+\ldots+s_1} H_p(s_d, \ldots, s_1)\Big)_{p \text{ premier}} \in \hat{\mathcal{A}} = \varprojlim \Big(\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p^n Z\Big)\Big/\Big(\oplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\Big).$$

Notre théorème éclaire la nature de ces familles de nombres, aide à comprendre leurs propriétés algébriques et à expliquer en partie la conjecture de Kaneko et Zagier.

4.2. Définition et application à l'étude des relations algébriques

Définition 4.1. On appelle multizêtas finis dans $\prod_p \mathbb{Z}_p$ les nombres suivants, où $(s_d,\ldots,s_1)\in(\mathbb{N}^*)^d$, $d\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\zeta_{f^{k;a}}(s_d,\ldots,s_1) &= \left(\sum_{ap^k<n_1<\ldots<n_d<(a+1)p^k} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}\right)_{p\ \text{premier}} \\ &= \left((\Phi_{p^{-k}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-k}})\Big[\frac{1}{1-e_0}e_1\frac{e_0^{s_d-1}}{(1+e_0a)^{s_d}}e_1\ldots\frac{e_0^{s_1-1}}{(1+e_0a)^{s_1}}e_1\Big]\right)_{p\ \text{premier}} \in \prod_{p\ \text{premier}} \mathbb{Z}_p. \end{aligned} \tag{11}$$

Grâce à la deuxième égalité ci-dessus, on peut étudier les relations algébriques entre les ζ_f dans le cadre du groupoïde fondamental de De Rham. C'est l'un des objets de notre article [8] ; il étend entre autres les résultats de [7] : nous montrons dans [8] que les ζ_f satisfont des analogues des relations standard entre les multizêtas, comme, par exemple, les relations de double mélange. Cela justifie la définition ci-dessus.

Ces relations sont obtenues comme des sommes infinies de relations algébriques entre multizêtas p-adiques. Elles restent vraies lorsqu'on introduit devant chaque terme des séries un facteur T^{poids}, où T est une variable formelle, c'est-à-dire lorsqu'on remplace chaque $\frac{1}{1-e_0}e_1 w$ par $\frac{T^{\text{poids}(w)+1}}{1-Te_0}e_1 w$.

Il en va de même lorsqu'on remplace $\Phi_{p^{-k}}$ par d'autres $\Phi_{p^{k'}}$ ou la version complexe ou motivique de l'associateur de Drinfeld. On a donc des analogues, en particulier réels et motiviques, des multizêtas finis, qui dépendent d'une variable formelle.

Les relations entre les ζ_f entraînent des relations algébriques entre les $\zeta_{\mathcal{A}}$ par réduction modulo p : en effet, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $a\in\mathbb{Z}$ on a

$$(p^k)^{s_d+\ldots+s_1} \sum_{ap^k<n_1<\ldots<n_d<(a+1)p^k} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}} \in p^{s_d+\ldots+s_1} H_p(s_d,\ldots,s_1) + p^{s_d+\ldots+s_1+1}\mathbb{Z}_p.$$

4.3. Applications aux conjectures de Kaneko et Zagier

Yasuda a démontré que, pour $(s_d,\ldots,s_1)\in(\mathbb{N}^*)^d$, $d\in\mathbb{N}^*$, et p un nombre premier tel que $p>s_d+\ldots+s_1$, on a :

$$\zeta_{p^{-1}}(s_d,\ldots,s_1)\in p^{s_d+\ldots+s_1}\mathbb{Z}_p.$$

Comme il l'a remarqué, ce résultat et le théorème principal de cette note mis ensemble ont plusieurs conséquences intéressantes : tout d'abord, pour $p>s_d+\ldots+s_1$ on en déduit

$$H_p(s_d,\ldots,s_1) \equiv p^{-(s_d+\ldots+s_1)} \sum_{n=0}^{d} (-1)^{s_{n+1}+\ldots+s_d} \zeta_{p^{-1}}(s_{n+1},\ldots,s_d)\zeta_{p^{-1}}(s_n,\ldots,s_1) \mod p \tag{12}$$

le membre de droite n'étant autre que $p^{-(s_d+\ldots+s_1)}(\Phi_{p^{-k}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-k}})[e_1 e_0^{s_d-1} e_1\ldots e_0^{s_1-1}e_1]$.

Cela éclaire l'équation (10) dans la conjecture de Kaneko et Zagier.

En combinant la congruence (12) avec la borne connue sur les dimensions $d_s^{\zeta_{\prod_p \mathbb{Q}_p}}$ des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de multizêtas p-adiques dans $\prod_p \mathbb{Q}_p$ de poids $s\in\mathbb{N}$, i.e. $d_s^{\zeta_{\prod_p \mathbb{Q}_p}} \leq d_s^{\text{conj}}$, on en déduit aussi que, pour tout s, on a :

$$d_s^{\mathcal{A}} \leq d_s^{\text{conj}}.$$

Remerciements

Je remercie beaucoup Pierre Cartier pour ses encouragements, des discussions mathématiques, relectures précises, et pour m'avoir incité à écrire cette note. Ce travail est financé par la bourse ERC n° 257638, "Periods in Algebraic Geometry and Physics" (PAGAP).

Références

[1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in: Galois Groups over $\mathbb{Q}$, Berkeley, CA, 1987, in: Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer Verlag, New York, 1989.
[2] P. Deligne, A.B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixtes, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 38 (1) (2005) 1–56.
[3] H. Furusho, p-Adic multiple zeta values I – p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Invent. Math. 155 (2) (2004) 253–286.
[4] H. Furusho, p-Adic multiple zeta values II – Tannakian interpretations, Amer. J. Math. 129 (4) (2007) 1105–1144.

[5] D. Jarossay, p-Adic multiple zeta values and multiple harmonic sums – I: p-adic multiple polylogarithms as explicit functions, prépublication, arXiv:1503.08756.
[6] D. Jarossay, p-Adic multiple zeta values and multiple harmonic sums – II: p-adic decompositions of multiple harmonic sums, prépublication, arXiv:1501.04893.
[7] D. Jarossay, Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 767–771.
[8] D. Jarossay, Finite multiple zeta values, formal algebraic relations and the fundamental group of $M_{0,4}$ and $M_{0,5}$ – I, prépublication, arXiv:1412.5099.
[9] D. Jarossay, Un cadre explicite pour les polylogarithmes multiples p-adiques et les multizêtas p-adiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (10) (2015) 871–876, http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.07.007.
[10] J. Rosen, Asymptotic relations for weighted finite multiple zeta values, arXiv:1309.0908.
[11] L.C. Washington, p-Adic L-functions and sums of powers, J. Number Theory 69 (1) (1998) 50–61.
[12] S. Yasuda, Notes d'un exposé donné à l'université de Kyushu (Japon) le 22 août 2014.