C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 63–68

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Contrôle optimal

Critères du type de Kálmán pour la contrôlabilité approchée et la synchronisation approchée d'un système couplé d'équations des ondes

Criteria of Kálmán's type for the approximate controllability and the approximate synchronization of a coupled system of wave equations

Tatsien Li [a,b,1], Bopeng Rao [c]

[a] *School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*
[b] *Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics, Nonlinear Mathematical Modeling and Methods Laboratory, China*
[c] *Institut de recherche mathématique avancée, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 14 octobre 2014
Accepté le 23 octobre 2014
Disponible sur Internet le 22 novembre 2014

Présenté par Philippe G. Ciarlet

R É S U M É

Dans cette Note, nous obtenons des conditions nécessaires, exprimées sous la forme de critères du type de Kálmán, pour la contrôlabilité nulle approchée et la synchronisation approchée par groupes d'un système couplé d'équations des ondes avec des contrôles frontières de Dirichlet. De plus, nous établissons la suffisance de ces conditions pour certains systèmes, en particulier pour des systèmes en dimension d'espace un.

A B S T R A C T

In this Note, we obtain necessary conditions, formulated as criteria of Kálmán's type, for the approximate null controllability and the approximate synchronization by groups of a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls. We also establish the sufficiency of these conditions for some systems, in particular for systems in one space dimension.

Adresses e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T. Li), bopeng.rao@math.unistra.fr (B. Rao).

[1] Projet supporté par the National Basic Research Program of China (No. 2013CB834100), and the National Natural Science Foundation of China (No. 11121101).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.10.023
1631-073X/

Abridged English version

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with a smooth boundary Γ. Let $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ such that $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$. Let $U = (u^{(1)}, \cdots, u^{(N)})^{\mathrm{T}}$ and $H = (h^{(1)}, \cdots, h^{(M)})^{\mathrm{T}}$ with $M \le N$, and A and D be $N \times N$ and $N \times M$ matrices with constant elements, respectively. Consider the following problem:

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{in } \Omega, \\ U = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ U = DH & \text{on } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad U' = U_1. \end{cases}$$

In view of a possible lack of boundary controls, we have introduced as certain sorts of weakened controllability and synchronization the concept of approximate null controllability and the approximate synchronization, respectively, in [9] and [11]. The approximate null controllability is equivalent to the D-observability of the following adjoint problem:

$$\begin{cases} \Phi'' - \Delta \Phi + A^{\mathrm{T}} \Phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{on } \Gamma, \\ t = 0: \quad \Phi = \Phi_0, \quad \Phi' = \Phi_1 \end{cases}$$

by the boundary observation $D^{\mathrm{T}} \partial_\nu \Phi \equiv 0$ on $[0, T] \times \Gamma_1$ (see [11]).

In this Note, we will first give a necessary condition for the D-observability and show that this condition is equivalent to the so-called Kálmán's criterion:

$$\operatorname{rank}\big(D, AD, \cdots, A^{N-1} D\big) = N,$$

which is necessary and sufficient for the exact controllability of ordinary differential equation systems $\dot{X} = AX + Du$; however, we will get it for partial differential equation systems from a different point of view. Although this condition is not sufficient in general for the D-observability because of the finite propagation speed of waves, we will show the sufficiency of the above Kálmán criterion under some additional assumptions. In particular, the one-space-dimensional case will be considered to establish a quite general result in this respect. We next generalize the approximate synchronization and the approximate synchronization by 2-groups to the approximate synchronization by p-groups ($p \ge 1$) and prove that it is equivalent to the corresponding CD-observability (see Definition 3.3); we also prove that a version of criterion of the Kálmán type is its necessary condition.

1. Introduction

L'étude de la synchronisation exacte d'un système d'équations des ondes a été effectuée dans [10,12–14] en dimension d'espace supérieure dans le cadre des solutions faibles, et dans [4,5,8,16] en dimension d'espace un dans le cadre des solutions classiques. Pour compenser le manque de contrôles aux frontières, nous avons introduit dans [9] et [11] la contrôlabilité nulle approchée et la synchronisation approchée. Puis nous avons établi l'équivalence entre la contrôlabilité nulle approchée et la D-observabilité du système adjoint, et celle entre la synchronisation approchée et la CD-observabilité du système adjoint réduit (voir Définitions 2.1 et 3.3).

Dans cette Note, nous donnons d'abord une condition nécessaire de critère du type de Kálmán [6,20] pour la D-observabilité. Puis nous montrons la suffisance du critère de Kálmán sous certaines hypothèses supplémentaires, en particulier pour des problèmes en dimension d'espace un. Cette condition porte sur le rang des matrices du couplage et peut être facilement vérifiée. Ensuite, nous généralisons la notion de synchronisation approchée et celle de synchronisation approchée par 2-groupes à la synchronisation approchée par p-groupes ($p \ge 1$). Nous montrons la nécessité de la condition de compatibilité. De plus, grâce à l'équivalence entre la synchronisation approchée par groupes et la CD-observabilité du système adjoint réduit, nous donnons une condition nécessaire de critère du type de Kálmán pour la synchronisation approchée par p-groupes. Cette condition est également suffisante dans certains cas particuliers.

2. Résultats d'unicité et critère de Kálmán

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ avec $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$. Soit A une matrice d'ordre N et soit D une matrice d'ordre $N \times M$ avec $M \le N$. Notant $\Phi = (\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(N)})^{\mathrm{T}}$, nous considérons le système adjoint homogène suivant :

$$\begin{cases} \Phi'' - \Delta \Phi + A^{\mathrm{T}} \Phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1. Le système adjoint (2.1) est D-observable sur l'intervalle $[0, T]$ si

$$D^{\mathrm{T}} \partial_\nu \Phi \equiv 0 \text{ sur } [0, T] \times \Gamma_1 \text{ implique } \Phi \equiv 0. \tag{2.2}$$

Dans la pratique, la matrice D est de « petit » rang, donc le théorème d'unicité de Holmgren [18] ne s'applique pas pour conclure. Bien que la D-observabilité soit vraie dans certains cas particuliers [1,2,19], cette question d'unicité est largement ouverte en toute généralité.

Lemme 2.1. *Soit A une matrice d'ordre N et soit D une matrice d'ordre $N \times M$ avec $M \le N$. Alors le critère de Kálmán*

$$\operatorname{rank}\big(D, AD, \cdots, A^{N-1}D\big) = N \tag{2.3}$$

est satisfait si et seulement si $\operatorname{Ker}(D^{\mathrm{T}})$ *ne contient aucun sous-espace invariant non trivial de A^{T}.*

Preuve. On désigne par $\mathcal{K} = (D, AD, \cdots, A^{N-1}D)$ la matrice de Kálmán. Supposons que V soit un sous-espace invariant non trivial de A^{T} contenu dans $\operatorname{Ker}(D^{\mathrm{T}})$. Il vient :

$$\operatorname{rank}\big(\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\big) = N - \dim\operatorname{Ker}\big(\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\big) \le N - \dim(V) < N.$$

Réciproquement, si le critère de Kálmán (2.3) était faux, alors on aurait :

$$\dim\operatorname{Ker}\big(\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\big) = N - \operatorname{rank}\big(\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\big) > 0.$$

Il existe donc un vecteur non nul $w \in \operatorname{Ker}(\mathcal{K}^{\mathrm{T}})$ tel que l'on ait :

$$\operatorname{Span}\big\{w, A^{\mathrm{T}}w, \cdots, \big(A^{\mathrm{T}}\big)^{N-1}w\big\} \subseteq \operatorname{Ker}\big(D^{\mathrm{T}}\big).$$

Grâce au théorème de Cayley–Hamilton, $\operatorname{Span}\{w, A^{\mathrm{T}}w, \cdots, (A^{\mathrm{T}})^{N-1}w\}$ est un sous-espace invariant de A^{T}, ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Lemme 2.2. *Si le système (2.1) est D-observable, alors le critère de Kálmán (2.3) est nécessairement satisfait.*

Preuve. D'après le Lemme 2.1, il suffit de prouver que le noyau de D^{T} ne contient aucun sous-espace invariant non trivial de A^{T}. Soit μ_n une valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et soit e_n la fonction propre associée. Si $\operatorname{Ker}(D^{\mathrm{T}})$ contient un sous-espace V invariant non trivial de A^{T}, alors $W = \{e_n w : w \in V\}$ est un sous-espace invariant de $-\Delta + A^{\mathrm{T}}$. Nous pouvons alors résoudre le système (2.1), et la solution sera donnée par $\Phi = e_n w(t)$ avec

$$w'' + \big(\mu_n^2 I + A^{\mathrm{T}}\big)w = 0, \quad w(0) = w_0 \in V, \ w'(0) = w_1 \in V.$$

Comme $w(t) \in V$ pour tout $t \ge 0$, il vient que

$$D^{\mathrm{T}}\partial_\nu \Phi = \partial_\nu e_n D^{\mathrm{T}} w(t) = 0 \quad \text{on } [0, +\infty[\times \Gamma_1.$$

Or $\Phi \not\equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Remarque 2.1. Le critère de Kálmán (2.3) est une condition nécessaire et suffisante [6,20] pour la contrôlabilité exacte du système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\dot{X} = AX + Du.$$

Ici, nous l'avons retrouvé d'une manière différente. Par contraste avec le système d'équations différentielles ordinaires, le critère de Kálmán (2.3) n'est pas une condition suffisante pour la D-observabilité du système d'équations aux dérivées partielles en général.

Proposition 2.1. *Soit μ_n une valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et soit e_n la fonction propre associée. Supposons que l'ensemble*

$$\Lambda = \big\{(m,n) : \mu_m \ne \mu_n, \ \partial_\nu e_m = \partial_\nu e_n \ \textit{on } \Gamma_1\big\}$$

est non vide. Alors, il existe $\epsilon \ne 0$, tel que le système homogène suivant :

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + \epsilon\psi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \psi'' - \Delta\psi + \epsilon\phi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \phi = \psi = 0 & \textit{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.4}$$

admette une solution non triviale vérifiant la condition supplémentaire suivante :

$$\partial_\nu \phi = 0 \quad \textit{sur } [0, +\infty[\times \Gamma_1. \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $(m,n) \in \Lambda$. Définissons :

$$\epsilon = \frac{\mu_m^2 - \mu_n^2}{2} \ne 0, \qquad \lambda^2 = \frac{\mu_m^2 + \mu_n^2}{2}, \qquad \phi_\lambda = (e_n - e_m), \qquad \psi_\lambda = (e_n + e_m).$$

Alors, en posant $\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\phi_\lambda$, $\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\psi_\lambda$, nous obtenons une solution non triviale du problème (2.4), qui satisfait de plus la condition supplémentaire (2.5). □

Remarque 2.2. Dans le système (2.4)–(2.5), on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D, AD) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Les matrices A et D vérifient bien le critère de Kálmán (2.3). Par ailleurs, l'ensemble Λ est non vide si $\Omega =]0,1[$ avec $\Gamma_1 = \{0\}$, ou si $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ avec $\Gamma_1 = \{0\} \times [0,1]$. Dans ces deux cas, le critère de Kálmán (2.3) n'est pas suffisant pour la D-observabilité du système (2.4)–(2.5).

Théorème 2.1. *Supposons que Ω satisfasse la condition géométrique du contrôle [3]. Considérons le système homogène (2.1) avec une matrice « cascade » :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 0 & \epsilon_N \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

où $\epsilon_i \neq 0$ pour $i = 2, \cdots, N$. Alors, pour toute matrice D satisfaisant le critère de Kálmán (2.3), le système (2.1) est D-observable, pourvu que $T > 0$ soit suffisamment grand.

Preuve. Par un changement de base, on se ramène au cas où $\epsilon_2 = \cdots = \epsilon_N = \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ assez petit. Comme $E = (0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ est le seul vecteur propre de A^{T}, si D satisfait le critère de Kálmán (2.3), on a $D^{\mathrm{T}} E \neq 0$ par le Lemme 2.1. Alors, sans restreindre la généralité, on peut supposer que la dernière composante de la première colonne $d = (d_1, d_2, \cdots, d_N)^{\mathrm{T}}$ de la matrice D est non nulle. Ensuite, définissons la matrice triangulaire supérieure par

$$P = \begin{pmatrix} d_N & d_{N-1} & \cdot & d_1 \\ & d_N & \cdot & d_2 \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & d_N \end{pmatrix}.$$

Comme $d_N \neq 0$, la matrice P est inversible. De plus, on vérifie que $PA = AP$; donc la nouvelle variable $\widetilde{\Phi} = P^{-T}\Phi$ satisfait le même système (2.1) que la variable Φ, et la D-observation en Φ est équivalente à la PD-observation en $\widetilde{\Phi}$. Or, d'après un résultat de [2], le système (2.1) est D_0-observable avec $D_0 = (0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, donc également PD_0-observable. Mais $PD_0 = d$ est l'une des colonnes de D. □

Théorème 2.2. *Supposons que Ω satisfasse la condition géométrique du contrôle. Soit A une matrice d'ordre 2 dont les valeurs propres réelles λ et μ satisfasse*

$$\lambda > -c_0, \qquad \mu > -c_0, \qquad |\lambda - \mu| \leq \epsilon_0, \tag{2.7}$$

où $c_0 > 0$ est la constante de Poincaré et $\epsilon_0 > 0$ est une constante assez petite. Alors, pour toute matrice D satisfaisant le critère de Kálmán (2.3), le système (2.1) est D-observable pourvu que $T > 0$ soit suffisamment grand.

Remarque 2.3. Dans le cas particulier où A et D sont données par (2.6), le Théorème 2.2 découle d'un résultat antérieur de [1] et [19]. Nous renvoyons le lecteur à [15] pour une démonstration complète.

On se place maintenant en dimension d'espace un :

$$\begin{cases} \Phi'' - \Phi_{xx} + \epsilon A^{\mathrm{T}} \Phi = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ \Phi(t, 0) = \Phi(t, \pi) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

avec une condition supplémentaire à l'extrémité $x = 0$:

$$D^{\mathrm{T}} \Phi_x(t, 0) = 0 \quad \text{sur } [0, T]. \tag{2.9}$$

Théorème 2.3. *Soit $|\epsilon| > 0$ assez petit. Supposons que A soit diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Alors, pour toute matrice D satisfaisant le critère de Kálmán (2.3), le système (2.8) est D-observable pourvu que $T > 0$ soit suffisamment grand.*

Preuve. La preuve est basée sur une inégalité de Ingham généralisée [7]. Nous renvoyons à [15] pour les détails. □

Théorème 2.4. *Soit $|\epsilon| > 0$ assez petit. Supposons que A possède N valeurs propres réelles et distinctes. Alors, pour toute matrice D satisfaisant le critère de Kálmán (2.3), le système (2.8) est D-observable pourvu que*

$$T > 2\pi\big(N - \operatorname{rank}(D) + 1\big). \tag{2.10}$$

3. Contrôlabilité nulle approchée et synchronisation approchée par groupes

Soit $U = (u^{(1)}, \cdots, u^{(N)})^{\mathrm{T}}$ et soit $H = (h^{(1)}, \cdots, h^{(M)})^{\mathrm{T}}$. Le système suivant :

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ U = DH & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad U' = U_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

est bien posé dans $\mathcal{H}^N \times \mathcal{V}'^N \times \mathcal{L}^M$ où $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{L} = L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Définition 3.1. Le système (3.1) est approximativement nul contrôlable au temps $T > 0$ si, pour toutes données initiales $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$, il existe une suite $\{H_n\}$ de contrôles dans $\mathcal{L}^M$ telle que la suite $\{U_n\}$ de solutions correspondantes satisfasse :

$$\big(U_n,\ U_n'\big) \to 0 \quad \text{dans } C^0_{loc}\big([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}'\big) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Théorème 3.1. *Si le système (3.1) est approximativement nul contrôlable au temps $T > 0$, alors on a nécessairement le critère de Kálmán (2.3).*

Preuve. D'après un résultat de [11], la contrôlabilité nulle approchée de (3.1) est équivalente à la D-observabilité de (2.1). Par le Lemme 2.2, on a nécessairement le critère de Kálmán (2.3).

Remarque 3.1. Pour des matrices rencontrées aux Théorèmes 2.1 à 2.3, le critère de Kálmán (2.3) est également suffisant pour la contrôlabilité nulle approchée du système (3.1).

Nous allons généraliser les notions de synchronisation approchée et de synchronisation approchée par 2-groupes introduites dans [11] à la synchronisation approchée par p-groupes avec $p \geq 1$. Soient : $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_p = N$ des entiers. Nous séparons les composantes de la variable d'état $U = (u^{(1)}, \cdots, u^{(N)})^{\mathrm{T}}$ en p groupes :

$$\big(u^{(1)}, \cdots, u^{(m_1)}\big), \quad \big(u^{(m_1+1)}, \cdots, u^{(m_2)}\big), \quad \cdots, \quad \big(u^{(m_{p-1}+1)}, \cdots, u^{(m_p)}\big).$$

Définition 3.2. Le problème (3.1) est approximativement synchronisable par p-groupes ($p \geq 1$) au temps $T > 0$ si, pour toute donnée initiale $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$, il existe une suite de contrôles $\{H_n\} \in \mathcal{L}^M$ et des fonctions $u_s \in C^0_{loc}([T, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1_{loc}([0, \infty); \mathcal{V}')$ pour $1 \leq s \leq p$ tels que la suite $\{U_n\}$ de solutions correspondantes satisfasse la condition suivante :

$$\big(u_n^{(k)},\ u_n^{(k)'}\big) \to \big(u_s, u_s'\big) \quad \text{dans } C^0_{loc}\big([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}'\big) \text{ quand } n \to +\infty$$

pour tout $m_{s-1} + 1 \leq k \leq m_s$, $1 \leq s \leq p$; alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est appelé l'état de la synchronisation approchée par p-groupes.

Désignons par C_s ($1 \leq s \leq p$) une matrice d'ordre $(m_s - m_{s-1} - 1) \times (m_s - m_{s-1})$ et par C la matrice de synchronisation par p-groupes d'ordre $(N - p) \times N$, données par :

$$C_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & C_p \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Théorème 3.2. *Supposons que le système (3.1) soit approximativement synchronisable par p-groupes,mais non approximativement synchronisable par $(p-1)$-groupes. Alors la matrice de couplage A satisfait nécessairement la condition de compatibilité suivante :*

$$A\,\mathrm{Ker}(C) \subseteq \mathrm{Ker}(C). \tag{3.3}$$

Selon un résultat de [17], cette condition est équivalente à l'existence et unicité d'une matrice $\overline{A}$ d'ordre $(N - p)$ telle que $CA = \overline{A}C$. Notant $\Psi = (\psi^{(1)}, \cdots, \psi^{(N-p)})^{\mathrm{T}}$, on introduit le système adjoint réduit suivant :

$$\begin{cases} \Psi'' - \Delta\Psi + \overline{A}^{\mathrm{T}}\Psi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

Définition 3.3. Le système adjoint réduit (3.4) est CD-observable sur $[0, T]$ si

$$D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\partial_\nu\Psi \equiv 0 \text{ sur } [0, T] \times \Gamma_1 \text{ implique } \Phi \equiv 0. \tag{3.5}$$

Théorème 3.3. *Le système (3.1) est approximativement synchronisable par p-groupes si et seulement si son système adjoint réduit (3.4) est CD-observable sur l'intervalle* $[0, T]$.

Théorème 3.4. *Si le système (3.1) est approximativement synchronisable par p-groupes, alors on a nécessairement le critère du type de Kálmán suivant :*

$$\operatorname{rank}\big(CD, CAD, \cdots, C\overline{A}^{N-p-1}D\big) = N - p, \tag{3.6}$$

où la matrice C est donnée par (3.2) et $\overline{A}$ est la seule matrice donnée par l'équation $CA = \overline{A}C$.

Preuve. Par le Théorème 3.3, le système adjoint réduit (3.4) est CD-observable. Alors, d'après le Lemme 2.2, les matrices $\overline{A}, CD$ doivent satisfaire le critère de Kálmán (2.3) dans lequel on remplace N, A et D par $N - p, \overline{A}$ et CD, respectivement. Puis, en utilisant la relation $CA = \overline{A}C$, on obtient (3.6). $\square$

Remarque 3.2. Si la matrice réduite $\overline{A}$ est du type de celles rencontrées aux Théorèmes 2.1 à 2.3, le critère du type de Kálmán (3.6) est également suffisant pour la synchronisation approchée par p-groupes du système (3.1).

Références

[1] F. Alabau-Boussouira, A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim. 42 (2003) 871–904.
[2] F. Alabau-Boussouira, A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed n-coupled cascade systems of PDE's by a reduced number of controls, Adv. Differ. Equ. 18 (2013) 1005–1072.
[3] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim. 30 (1992) 1024–1064.
[4] L. Hu, F. Ji, K. Wang, Exact boundary controllability and exact boundary observability for a coupled system of quasilinear wave equations, Chin. Ann. Math., Ser. B 34 (2013) 479–490.
[5] L. Hu, T.-T. Li, B. Rao, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations with coupled boundary conditions of dissipative type, Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014) 881–901.
[6] R.E. Kálmán, Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Mexicana 5 (1960) 102–119.
[7] V. Komornik, P. Loreti, Fourier Series in Control Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2005.
[8] T.-T. Li, B. Rao, Strong (weak) exact controllability and strong (weak) exact observability for quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math., Ser. B 31 (2010) 723–742.
[9] T.-T. Li, B. Rao, Asymptotic controllability for linear hyperbolic systems, Asymptot. Anal. 72 (2011) 169–185.
[10] T.-T. Li, B. Rao, Exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, Chin. Ann. Math., Ser. B 34 (2013) 139–160.
[11] T.-T. Li, B. Rao, Asymptotic controllability and asymptotic synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, Asymptot. Anal. 86 (2014) 199–226.
[12] T.-T. Li, B. Rao, A note on the exact synchronization by groups for a coupled system of wave equations, Math. Methods Appl. Sci. (2014), http://dx.doi.org/10.1002/mma.3062.
[13] T.-T. Li, B. Rao, On the exactly synchronizable state to a coupled system of wave equations, Port. Math., submitted for publication.
[14] T.-T. Li, B. Rao, Sur l'état de synchronisation exacte d'un système couplé d'équations des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 823–829.
[15] T.-T. Li, B. Rao, Criteria of Kálmán's type to the approximate controllability and the approximate synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, in press.
[16] T.-T. Li, B. Rao, L. Hu, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 20 (2014) 339–361.
[17] T.-T. Li, B. Rao, Y. Wei, Generalized exact boundary synchronization for a coupled system of wave equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014) 2893–2905.
[18] J.-L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, vol. 1, Masson, Paris, 1988.
[19] Z. Liu, B. Rao, A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 23 (2009) 399–414.
[20] D.L. Russell, Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions, SIAM Rev. 20 (1978) 639–739.