C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 1045–1049

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique/Géométrie analytique

Filtration perverse et théorie de Hodge

Perverse filtration and Hodge theory

Fouad El Zein [a], Xuanming Ye [b]

[a] *Institut de mathématiques de Jussieu, 75005 Paris, France*
[b] *Département de Mathématiques, Université Sun Yat-Sen, Guangzhou 510275, Chine*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 18 septembre 2014
Accepté le 7 octobre 2014
Disponible sur Internet le 25 octobre 2014

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

La compatibilité de la filtration perverse avec la théorie de Hodge à coefficients dans une variation de structure de Hodge mixte admissible sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux est établie à l'aide d'un complexe logarithmique, en vue d'une nouvelle démonstration du théorème de décomposition.

ABSTRACT

The compatibility of the perverse filtration with Hodge theory with coefficients in an admissible variation of a mixed Hodge structure on the complement of a normally crossing divisor is established using a logarithmic complex, with a view to obtaining a new proof of the decomposition theorem.

1. Introduction

Actuellement, il n'y a pas de traitement complet de la théorie de Hodge à coefficients dans une variation de structure de Hodge mixte $(\mathcal{L}, W, F)$ admissible sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux Y (DCN) dans une variété X complexe, à l'aide de complexes logarithmiques. La référence disponible est une étude locale de Kashiwara [5], qui permet, avec les résultats de [7,6,2] de traiter le cas global. Soient $j : (X - Y) \to X$ et $j_{!*}\mathcal{L}$ l'extension intermédiaire. Nous déduisons de [5], pour X compacte kählérienne et pour tout sous-diviseur Z de Y, une SHM sur le groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^i(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$, calculée à l'aide d'un sous-complexe d'un complexe logarithmique.

Soient $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés complexes, W une sous-variété fermée de V, et K un complexe sur V à cohomologie constructible, la *filtration perverse* ${}^p\tau$ [1] est définie pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, par

$$ {}^p\tau_i \mathbb{H}^k(V - W, K) := \operatorname{Im}\bigl\{\mathbb{H}^k(V - W, {}^p\tau_i K) \to \mathbb{H}^k(V - W, K)\bigr\}. \tag{1}$$

Soient $Z := f^{-1}W$ image réciproque de W tel que Z et $Z \cup Y$ soient des DCN, $j_Z : X - Z \to X$ et $K := Rf_* R(j_Z)_* j_Z^* j_{!*}\mathcal{L}$; $j_{!*}\mathcal{L}$ est indépendant de Z si on remplace Y par $Y \cup Z$. On déduit la *filtration perverse* ${}^p\tau$ sur la cohomologie $\mathbb{H}^k(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$ à l'aide de l'isomorphisme $\mathbb{H}^k(X - Z, j_{!*}\mathcal{L}) = \mathbb{H}^k(V - W, Rf_* j_{!*}\mathcal{L})$

Adresses e-mail : fouad.elzein@imj-prg.fr (F. El Zein), yexm3@mail.sysu.edu.cn (X. Ye).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.10.002
1631-073X/

$$ {}^p\tau_i \mathbb{H}^k(X-Z, j_{!*}\mathcal{L}) := {}^p\tau_i \mathbb{H}^k(V-W, Rf_* j_{!*}\mathcal{L}). \tag{2}$$

Le but de cette note est de vérifier que la filtration ${}^p\tau_i$ est une filtration de la SHM sur la cohomologie de $X-Z$ par des sous-SHM (voir la proposition 2 et les théorèmes 2.1, 3.2). On dira tout simplement que la filtration ${}^p\tau_i$ est compatible avec la SHM sur l'hypercohomologie de $X-Z$.

Théorème 1.1 *(Voisinage tubulaire d'une fibre). Soient v un point de V de fibre $X_v := f^{-1}(v)$. On suppose X_v et $X_v \cup Y$ des DCN dans X ; alors l'hypercohomologie $R\Gamma(X_v, i^*_{X_v} R(j_{X_v})_* j^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L})$ est munie d'une SHM compatible avec la filtration perverse.*

Soit $k_v : V-v \to V$, $i_v : v \to V$, on applique le foncteur $i^*_v R(k_v)_*$ à la filtration ${}^p\tau_i$ définie sur $k^*_v Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$, puis on transporte cette filtration à l'aide de l'isomorphisme $R\Gamma(X_v, i^*_{X_v} R(j_{X_v})_* j^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}) \simeq i^*_v R(k_v)_* k^*_v Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$. Pour une vision topologique moins abstraite, on peut considérer une boule B_v de centre v dans V, $X_{B_v} := f^{-1}(B_v)$ et $X^*_{B_v} := X_{B_v} - X_v$. Si le rayon de B_v est assez petit, la filtration perverse est considérée sur l'hypercohomologie $\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$, qui coïncide avec $R\Gamma(X_v, i^*_{X_v} R(j_{X_v})_* j^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L})$.

La preuve, donnée dans la section 3, utilise une version locale d'un résultat de [4]. Le théorème ci-dessus constitue un point-clé d'une nouvelle démonstration du théorème de décomposition [1] à l'aide de complexes logarithmiques.

2. Complexe logarithmique

Soit $(\mathcal{L}, W, F)$ une variation de SHM admissible [5], [3] (8.3), sur le complémentaire d'un DCN Y de composantes irréductibles lisses Y_i pour $i \in I$, dans une variété analytique X. Pour $J \subset I$, soit $Y_J := \bigcap_{i\in J} Y_i$, $Y^*_J := Y_J - \bigcup_{i\notin J}(Y_i \cap Y_J)$ ($Y^*_\emptyset = X^* := X - Y$). Les filtrations par le poids W et F s'étendent en une filtration de l'extension analytique de Deligne $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}$ par des sous-fibrés $\mathcal{W}\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}$ et $\mathcal{F}\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}$.

Théorème 2.1 *(Complexe de Hodge mixte logarithmique). Soit $(\mathcal{L}, W, F)$ une variation de SHM admissible sur le complémentaire d'un DCN Y dans une variété analytique lisse X. Il existe sur le complexe logarithmique défini par le système local sous-jacent $\mathcal{L}$:*

$$ \left(\Omega^*_X(\operatorname{Log} Y) \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}, W, F\right) \tag{3}$$

une filtration W par des faisceaux pervers et une filtration analytique F qui induisent, lorsque X est kählérienne propre, une SHM sur les groupes de cohomologie $H^i(X-Y, \mathcal{L})$.

Les sous-complexes $F^p = (0 \to \mathcal{F}^p\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X} \to \cdots \to \Omega^i_X(\operatorname{Log} Y) \otimes \mathcal{F}^{p-i}\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X} \to \cdots)$ définissent la filtration F et sont déterminés par les fibrés $\mathcal{F}\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}$ sur X. La construction de la filtration W par le poids se déduit essentiellement de l'étude locale de Kashiwara dans [5]. Curieusement, le but annoncé de l'article est un critère d'admissibilité d'une variation de SHM en codimension 1. En fait, on y trouve les ingrédients nécessaires pour établir le théorème.

La fibre du complexe logarithmique. Pour simplifier les notations, nous supposons par la suite $\mathcal{L}$ unipotent et on note $N_j := \operatorname{Log} T_j$ le logarithme de la monodromie locale unipotente de $\mathcal{L}$ en un point y de Y. Le produit tensoriel $\mathcal{L}_{X,y} \otimes k(y)$ de la fibre avec le corps résiduel $k(y) \simeq \mathbb{C}$ est isomorphe à *l'espace vectoriel L des sections multivaluées de $\mathcal{L}$ sur le complémentaire de la restriction de Y à une boule de centre y*. En un point $y \in Y^*_M$, $|M| = m$ et des équations locales z_i de Y_i en y pour $i \in M$, une base de L s'envoie sur une base du $\mathcal{O}_{X,y}$-module $\mathcal{L}_{X,y} \subset (j_*\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{X^*}})_y$ par la correspondance $v \to \widetilde{v}$ où $\widetilde{v} = (\exp -\frac{1}{2i\pi}(\sum_{j\in J}(\log z_j)N_j)) \cdot v$. La fibre du complexe logarithmique au point y est alors quasi isomorphe à un complexe de Koszul associé à (L, N_i), $i \in [1, m]$ que l'on désigne par :

$$ s\big(L(J), N.\big)_{J\subset[1,m]} := \Omega(L, N.) \cong \big(\Omega^*_X(\operatorname{Log} Y) \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}\big)_y \tag{4}$$

On écrit aussi $\Omega(L, N_j, j \in M)$. La correspondance est alors donnée pour $v \in L(i_1, \ldots, i_j) = L$ par $v \mapsto \tilde{v}\frac{\mathrm{d}z_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}z_{i_j}}{z_{i_j}}$. Soit $N_J = \prod_{j\in J} N_j$ l'endomorphisme composé de L. La fibre de l'extension intermédiaire $j_{!*}\mathcal{L}$ est alors définie par un sous-complexe $IC(L)$ du complexe logarithmique :

$$ IC(L) := s(N_J L, N.)_{J\subset M}, \quad N_J L := N_{i_1} N_{i_2} \cdots N_{i_j} L, \quad J = \{i_1, \ldots, i_j\}.$$

La filtration par le poids W. La définition locale du poids W donnée dans [3] (chapitre 8) se déduit du travail de Kashiwara [5], aussi bien que la définition globale du poids W et la construction d'un sous-complexe $(IC(X, \mathcal{L}), W, F)$ muni de filtrations induites par W et F, quasi isomorphe au complexe d'intersection, dont les termes en chaque degré sont des $\mathcal{O}_X$-modules analytiques. En particulier, le complexe d'intersection $IC(X, \mathcal{L})[n]$ décalé de $n := \dim X$ est quasi isomorphe au complexe extension intermédiaire $j_{!*}\mathcal{L}[n]$ sur X [1]. Pour une variation de structure de Hodge polarisée $(\mathcal{L}, F)$ de poids a, le sous-complexe $(IC(X, \mathcal{L}), F)$ est un complexe de Hodge si X est une variété kählérienne compacte. Il munit la cohomologie d'intersection $IH^i(X, \mathcal{L})$ d'une SH pure de poids $a + i$. La preuve utilise un raisonnement élégant basé sur l'autodualité de la cohomologie d'intersection comme dans [6]. La propriété essentielle réside dans la décomposition du gradué de la filtration par le poids W qui découle du cas local d'une SHM infinitésimale $(L, W, F, N_i, i \in M)$ [5, formule 5.6.10] et [5, Proposition 2.3.1].

Propriétés. Le complexe logarithmique d'une variation de SHM admissible de poids $w \geq a$ sur une variété kählérienne compacte définit une SHM sur $H^i(X - Y, \mathcal{L})$ de poids $w \geq a + i$.

Proposition 1. *Les filtrations induites W et F sur le complexe d'intersection $(IC(X, \mathcal{L})[n], W, F)$ d'une variation de SHM admissible en tant que sous-complexe du complexe logarithmique satisfont, pour tout k :*

$$Gr_k^W\big(IC(X, \mathcal{L}), F\big) = \big(IC(X, Gr_k^W \mathcal{L}), F\big).$$

En général, le complexe d'intersection d'une extension de deux systèmes locaux n'est pas l'extension de leur complexe d'intersection. L'existence des filtrations relatives est nécessaire pour la démonstration qui utilise le corollaire [5] (3.4.3) et le lemme [5] (3.4.2).

SHM sur les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$. Soit $Z \subset Y$ un sous-DCN. Il s'agit de définir un sous-complexe $IC(X, \mathcal{L})(*Z) \subset \Omega_X^*(\operatorname{Log} Y) \otimes \mathcal{L}_X$ muni de filtrations induites, qui permet de calculer la SHM sur $\mathbb{H}^*(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$. Soient $j' : (X - Y) \to (X - Z)$, et $j'' : (X - Z) \to X$ tel que $j = j'' \circ j'$ et soit un point $y \in Y_M^* \cap Z$ pour $M \subset I$. On va réaliser la fibre du complexe $Rj''_*(j'_{!*}\mathcal{L})_y$ comme un sous-complexe de la fibre du complexe logarithmique décrite sous forme d'un complexe de Koszul $\Omega(L, N_i, i \in M)$. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble fini I_1 de I tel que $Z := \bigcup_{i \in I_1} Y_i$. On introduit $M_1 := M \cap I_1$ et $M_2 := M - M_1$, et pour $J \subset I$: $J_1 = J \cap M_1$ et $J_2 = J \cap M_2$.

Définition 2.2 *($IC(X, \mathcal{L})(*Z)$ pour $Z = \bigcup_{i \in I_1 \subset I} Y_i \subset Y$).* Le sous-complexe $IC(X, \mathcal{L})(*Z)$ du complexe logarithmique $\Omega_X^*(\operatorname{Log} Y) \otimes \mathcal{L}_X$ est localement défini en un point $y \in Z \cap Y_M^*$ en termes des coordonnées $z_i, i \in M \subset I$, équations locales des $Y_i, i \in M$, comme suit :

La fibre $IC(X, \mathcal{L})(*Z)_y$ est engendrée comme $\Omega_{X,y}^*$-module, par les sections $\tilde{v} \wedge_{j \in J} \frac{dz_j}{z_j}$ pour tout $v \in N_{J_2} L$, $J \subset I$ et $J_2 := J \cap M - (J \cap M \cap I_1)$.

Lemme 2.3. *On a : $IC(X, \mathcal{L})(*Z)_y \simeq (Rj''_*(j'_{!*}\mathcal{L}))_y$.*

Proposition 2. *Les filtrations W et F du complexe logarithmique induites sur $IC(X, \mathcal{L})(*Z)$ définissent une SHM sur l'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$, pour $Z := \bigcup_{i \in I_1 \subset I} Y_i \subset Y := \bigcup_{i \in I} Y_i$ et X kählérienne compacte.*

Voisinage tubulaire. Soit D un DCN dans X tel que $D \cup Y$ soit un DCN, $i_D : D \to X$ et $j_D : (X - D) \to X$. On peut toujours remplacer Y par $D \cup Y$, autrement dit supposer $D \subset Y$. La construction s'applique donc à tout DCN T contenant $D \cup Y$ comme sous-diviseur et donne un complexe bifiltré $(IC(X, \mathcal{L})(*D), W, F)$ quasi isomorphe à $Rj_{D*} j_D^* j_{!*}\mathcal{L}$, comme sous-complexe du complexe logarithmique $(\Omega_X^*(\operatorname{Log} T) \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{O}_X}, W, F)$. Il est indépendant de T, contenant $D \cup Y$.

Nous utiliserons dans cette note des complexes logarithmiques à coefficients déduits d'un tel complexe. En particulier, un complexe bifiltré quasi isomorphe à $i_D^! j_{!*}\mathcal{L}$ s'obtient comme quotient modulo le sous-complexe $IC(X, \mathcal{L}) \simeq j_{!*}\mathcal{L}$, puis on obtient par dualité un complexe bifiltré quasi isomorphe à $i_D^* j_{!*}\mathcal{L}$. Ces complexes ne dépendent que du voisinage de D dans X et dans le cas où D est la fibre d'un morphisme projectif, ce sont des CHM.

Dans la situation du théorème 1.1, pour calculer l'hypercohomologie de $i_{X_v}^* Rj_{X_v*} j_{X_v}^*(j_{!*}\mathcal{L})$, autrement dit du voisinage tubulaire étoilé $X_{B_v}^* := X_{B_v} - X_v$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$, on considère le morphisme d'intersection

$$I : Ri_{X_v}^! j_{!*}\mathcal{L} \to i_{X_v}^* j_{!*}\mathcal{L} \tag{5}$$

composé de $i_{X_v*} Ri_{X_v}^! j_{!*}\mathcal{L} \to j_{!*}\mathcal{L}$ et $j_{!*}\mathcal{L} \to i_{X_v*} i_{X_v}^* j_{!*}\mathcal{L}$, alors I s'inscrit dans un triangle $Ri_{X_v}^! j_{!*}\mathcal{L} \to i_{X_v}^* j_{!*}\mathcal{L} \to i_{X_v}^* Rj_{X_v*}(j_{!*}\mathcal{L}_{|X_{B_v}^*}) \xrightarrow{[1]}$. Par conséquent l'hypercohomologie de $X_{B_v}^*$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$ est celle du cône sur I.

Définition 2.4. La fibre X_v étant supposée un DCN, les termes $Ri_{X_v}^! j_{!*}\mathcal{L}$ et $i_{X_v}^* j_{!*}\mathcal{L}$ sont décrits par des complexes logarithmiques bifiltrés. L'hypercohomologie de $i_{X_v}^* Rj_{X_v*} j_{X_v}^*(j_{!*}\mathcal{L})$ égale à celle de $X_{B_v}^*$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$ se trouve munie de la SHM définie par le cône mixte bifiltré sur I, noté $IC(X_{B_v}, \mathcal{L})(*X_v)$.

(*) Dans la suite, on réfère à ces complexes en tant que complexes logarithmiques bifiltrés.

Isomorphisme de Thom–Gysin. Soit H une hypersurface lisse qui rencontre un DCN T transversalement tel que $T' := T \cup H$ soit aussi un DCN. Le morphisme résidu $R_H : (i_H^*(\Omega_X^*(\operatorname{Log} T')) \otimes \mathcal{L}_X, W, F) \to (\Omega_H^*(\operatorname{Log} T \cap H) \otimes \mathcal{L}_{|H}, W, F)$ induit un isomorphisme inverse de celui de Thom–Gysin, auquel on se réfère comme un isomorphisme d'un complexe bifiltré sur X logarithmique le long de T' avec un complexe bifiltré sur H logarithmique le long de $T \cap H$. De même, pour le sous-complexe bifiltré $(IC(X, \mathcal{L})(*(Z \cup H)), W, F)$ pour $Z \subset Y$, on a :

i) $(IC(X, \mathcal{L})(*(Z \cup H))/IC(X, \mathcal{L})(*Z)) \simeq i_H^! IC(X, \mathcal{L})(*Z)[1]$.

ii) L'inverse de l'isomorphisme de Thom–Gysin $IC(H, \mathcal{L})(*(Z \cap H)) \simeq i_H^! IC(X, \mathcal{L})(*(Z \cup H))[2]$ est défini par le résidu par rapport à H : $IC(X, \mathcal{L})(*(Z \cup H)) \to i_{H,*} IC(H, \mathcal{L})(*(Z \cap H))[1]$, qui s'annule sur $IC(X, \mathcal{L})(*Z)$.

3. Compatibilité de la SHM avec la filtration perverse

Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés complexes. Bien que la filtration perverse soit définie sur V dans [1], elle peut être décrite dans le cas algébrique directement sur X d'après [4], où elle s'applique à l'image réciproque d'un ouvert de Zariski de V. Nous aurons besoin de ce résultat au voisinage d'un point v de V, dans le cas d'un ouvert analytique $B_v^* := B_v - \{v\}$ où B_v est une boule de Stein de centre v. Alors cette description s'adapte à la situation locale sur $X_{B_v}^* := f^{-1}(B_v^*)$ au voisinage de la fibre X_v en v, ce qui permet d'établir la compatibilité de la filtration perverse avec la SHM sur la cohomologie de $X_{B_v}^*$ à coefficients. Nous insistons ci-dessous sur le cas d'une boule de Stein car le cas affine est bien décrit dans [4].

Soit B_v une boule de centre v de Stein (resp. un ouvert quasi projectif U) de V et soient deux suites de sections hyperplanes L_i et M_i de B_v (resp. U) d'indices $0 < i \leq m := \dim V$. On note $H_{-j} := \bigcap_{i \leq j} L_i \cap B_v^*$ et $W_{-j} := \bigcap_{i \leq j} M_i \cap B_v^*$ les suites croissantes de sous-variétés fermées de B_v^* (resp. U) pour $j \geq 0$:

$$H_* : B_v^* = H_0 \supset H_{-1} \supset \cdots \supset H_{-m}, \qquad W_* : B_v^* = W_0 \supset W_{-1} \supset \cdots \supset W_{-m}$$

On note $h_i : (B_v^* - H_{-i}) \to B_v^*$ l'inclusion et on considère un complexe $K \in D_c^b(B_v^*, \mathbb{Q})$ à cohomologie constructible bornée. En reprenant les notations de [4] (remarque 3.6), on définit sur $\mathbb{H}^*(B_v^*, K)$ la filtration :

$$\delta_p \mathbb{H}^*(B_v^*, K) := \operatorname{Im}\left\{ \bigoplus_{i-j=p} \mathbb{H}^*_{W_{-j}}\big(B_v^*, (h_i)_! h_i^* K\big) \to \mathbb{H}^*\big(B_v^*, K\big) \right\} \tag{6}$$

resp. pour U au lieu de B_v^*. La filtration δ est l'aboutissement d'une suite spectrale.

Proposition 3. *Soit B_v une boule de centre v assez petite dans V et $K \in D_c^b(B_v^*, \mathbb{Q})$. Pour un choix convenable, mais assez général, des deux suites de sous-espaces fermés H_* et W_*, la filtration δ (6) est égale à la filtration perverse ${}^p\tau$ à un décalage d'indices près.*

Cette proposition correspond à l'énoncé du théorème 4.2.1 dans [4], dans le cas quasi projectif. La preuve, basée sur la notion de résolution par des faisceaux pervers acycliques sauf en degré 0, correspond à un énoncé qui semble remonter dans le cas algébrique à une lettre inédite de Deligne selon [4] :

Lemme 3.1. *Soient H et H' deux sections hyperplanes de B_v en position générale et passant par le centre v. Les inclusions $j : (B_v^* - H \cap B_v^*) \to B_v^*$ et $j' : (B_v^* - H' \cap B_v^*) \to B_v^*$ sont de Stein, et pour tout faisceau pervers $\mathcal{P}$ sur B_v^*, on a : $\mathbb{H}^r(B_v^*, j_! j^* j'_*(j')^! \mathcal{P}) = 0$ pour $r \neq 0$.*

Le choix assez général des deux sections hyperplanes H et H' assure un isomorphisme $j_! j^* j'_*(j')^! \mathcal{P} \simeq j'_*(j')^! j_! j^* \mathcal{P}$. La preuve du lemme utilise le lemme d'Artin–Lefschetz faible [1] appliqué au faisceau pervers $j_! j^* j'_*(j')^! \mathcal{P}$ sur B_v^* et à son dual et le fait que $B_v^* - H \cap B_v^*$ soit de Stein.

Théorème 3.2. *i) Soit $f : X \to V$ un morphisme de variétés algébriques avec X lisse ; pour tout ouvert quasi projectif U de V tel que $X_U := f^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur D à croisements normaux dans X et que $D \cup Y$ soit aussi un DCN, la filtration δ, et par conséquent la filtration perverse ${}^p\tau$, est compatible avec la SHM (proposition 2) l'hypercohomologie $\mathbb{H}^j(X_U, j_{!*}\mathcal{L})$ en tout degré $j \in \mathbb{Z}$.*

ii) Avec les notations du théorème 1.1, pour tout point v de V tel que la fibre $X_v := f^{-1}(v)$ soit un diviseur à croisements normaux dans X et que $X_v \cup Y$ soit aussi un DCN, la filtration δ, et par conséquent pour une boule B_v de rayon assez petit, la filtration perverse ${}^p\tau$ est compatible avec la SHM (définition 2.4) sur l'hypercohomologie $\mathbb{H}^j(X_{B_v^*}, j_{!*}\mathcal{L})$ en tout degré $j \in \mathbb{Z}$.

Preuve du théorème. Il s'agit de munir les termes de la filtration δ ((6), resp. [4]) de SHM. Nous remarquons d'abord que le choix des suites H_* et W_* dans B_v^* (resp. U) étant assez général, nous pouvons supposer qu'elles sont induites par des suites dans B_v (resp. dans V), abusivement notées aussi H_* et W_*, satisfaisant les conditions suivantes :

Les différentes images inverses $H'_{-i} := f^{-1}(H_{-i})$ et $W'_{-j} := f^{-1}(W_{-j})$ sont non singulières, telles que leur réunion avec la fibre X_v (resp. D) et Y forme un DCN noté T dans X_{B_v} (resp. X). Alors nous disposons, d'après définition 2.4, de complexes logarithmiques bifiltrés pour calculer $i^!_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}$, $i^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}$ et $i^*_{X_v} R j_{X_v *} j^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}$ (resp. pour D au lieu de X_v (proposition 2)).

Isomorphismes de Thom–Gysin. Dans ce cas, si H' est une sous-variété non singulière de codimension r dans X_{B_v} transversale à $X_v \cup Y$ de sorte que $H' \cap (X_v \cup Y)$ soit un DCN dans H', on note $j_{X_v} : X_{B_v}^* \to X_{B_v}$, $H'_v := X_v \cap H'$, $j_{H'_v} : (H'_{B_v} - H'_v) \to H'_{B_v}$, $i_{H'} : H' \to X_{B_v}$, alors *l'isomorphisme de Thom–Gysin*

$$i^!_{H'_v} R(j_{X_v})_* (j_{!*}\mathcal{L})_{|X_{B_v}^*} \simeq R(j_{H'_v})_* j^*_{H'_v} i^*_{H'} (j_{!*}\mathcal{L})_{|X_{B_v}^*}[-2r]$$

est réalisé à l'aide de sous-complexes de complexes bifiltrés logarithmiques en $H' \cap (X_v \cup Y)$ dans H' (définition 2.4), donc compatibles de type (r, r) avec les bifiltrations F et W, soit :

$$i^!_{H'_v} IC(X_{B_v}, \mathcal{L})(*X_v) \simeq IC(H'_{B_v}, \mathcal{L})(*H'_v)[-2r].$$

Définition des SHM sur les termes de la filtration δ (6). Nous allons réaliser ces SHM à l'aide de sous complexes d'un complexe logarithmique le long du DCN $X_v \cap W'_{-j} \cap H'_{-i}$ dans les espaces lisses $W'_{-j} \cap H'_{-i}$.

Pour simplifier l'exposition, on considère deux étapes. On décrit d'abord le cas du complexe $K' := R(j_{X_v})_*(j_{!*}\mathcal{L}_{|X^*_{B_v}})$, description qui s'appliquerait aussi au cas global $R(j_D)_* j^*_D j_{!*}\mathcal{L}$, puis celle du complexe $i^*_{X_v} K'$ dans le cas local.

1) Cas algébrique : on pose $D := X - X_U$; c'est un DCN dans X, ce qui permet de construire le complexe bifiltré logarithmique $IC(X,\mathcal{L})(*D) \simeq R(j_D)_* j^*_D j_{!*}\mathcal{L}$. Soient $h_i : (U - H_{-i}) \to U$, $h'_i : (X_U - H'_{-i}) \to X_U$; on pose $K' := IC(X,\mathcal{L})(*D)$ et $K = Rf_* K'$, puis on introduit le triangle distingué

$$i^!_{W'_{-j}}(h'_i)_!(h'_i)^* K' \to i^!_{W'_{-j}} K' \xrightarrow{\varphi} i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K' \xrightarrow{[1]}$$

afin de calculer l'hypercohomologie : $\mathbb{H}^*_{W_{-j}}(U,(h_i)_! h^*_i K) \simeq H^*_{W'_{-j}}(X_U,(h'_i)_!(h'_i)^* K')$ à l'aide du cône sur φ, à un décalage d'indices près, puis on transforme les termes du cône à l'aide d'isomorphismes de Thom–Gysin, pour les exprimer à l'aide de complexes logarithmiques et les munir ainsi de structure de complexes de Hodge mixte, et donc munir les termes de la filtration δ (6) de SHM.

Ainsi les termes $i^!_{W'_{-j}} K'$ (resp. $i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K'$) deviennent isomorphes à $(IC(W'_{-j},\mathcal{L})(*((D\cup Y)\cap W'_{-j})), W, F)$ (proposition 2), donc des complexes à support W'_{-j} logarithmiques en $(D \cup Y) \cap W'_{-j}$ comme sous-complexe du complexe logarithmique bifiltré $(\Omega^*_{W'_{-j}}(\mathrm{Log}((D\cup Y)\cap W'_{-j})) \otimes \mathcal{L}_{|W'_{-j}}, W, F)$ (resp. à support $W'_{-j} \cap H'_{-i}$ logarithmiques en $(D \cup Y) \cap W'_{-j} \cap H'_{-i}$).

En conclusion, $\mathbb{H}^*_{W'_{-j}}(X_{B_v},(h'_i)_!(h'_i)^* K')$ (resp. $\mathbb{H}^*_{W'_{-j}}(X_U,(h'_i)_!(h'_i)^* K')$) se déduit, à indices près, du cône mixte du morphisme φ réalisé par des complexes sur W'_{-j} logarithmiques en $(X_v \cup Y) \cap W'_{-j}$ (resp. $(D \cup Y) \cap W'_{-j}$).

2) Cas de l'hypercohomologie du voisinage tubulaire étoilé $X^*_{B_v}$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$ (définition 2.4). Pour montrer la compatibilité de la SHM avec la filtration perverse, on munit les termes $\mathbb{H}^*_{W'_j}(X^*_{B_v},(h'_i)_!(h'_i)^* j_{!*}\mathcal{L})$ de la formule (6) d'une SHM compatible. En reprenant les notations de la première étape, ce groupe de cohomologie se calcule à l'aide du cône sur φ.

On pose $K = Rf_* K'$, $h_i : (B_v - H_{-i}) \to B_v$, $h'_i : (X_{B_v} - H'_{-i}) \to X_{B_v}$, et on calcule la cohomologie : $\mathbb{H}^*_{W_{-j}}(B_v,(h_i)_! h^*_i K) \simeq H^*_{W'_{-j}}(X_{B_v},(h'_i)_!(h'_i)^* K')$ à l'aide du cône sur φ, à un décalage d'indices près, afin de munir ces groupes et donc les termes de la filtration δ (6) de bifiltrations.

En conclusion, $\mathbb{H}^*_{W'_{-j}}(X_{B_v},(h'_i)_!(h'_i)^* K')$ se déduit, à indices près, du cône mixte du morphisme φ réalisé par des complexes sur $X_{B_v} \cap W'_{-j}$ logarithmiques en $X_v \cap W'_{-j}$. Ce n'est pas encore des SHM, mais la SHM, recherchée est celle d'un double cône mixte une fois $C(I_j)$ sur le morphisme $I_j : i^!_{X_v\cap W'_{-j}} i^!_{W'_{-j}} j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_v\cap W'_{-j}} i^!_{W'_{-j}} j_{!*}\mathcal{L}$, $C(I^i_j)$ sur le morphisme $I^i_j : i^!_{X_v\cap W'_{-j}} i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_v\cap W'_{-j}} i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L}$ et une fois sur le morphisme $\varphi : C(I_j) \to C(I^i_j)$. En conclusion, la filtration δ sur $\mathbb{H}^*(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ est réalisée par des SHM compatibles avec celles de $X^*_{B_v}$, donc la filtration perverse est aussi compatible avec les SHM. □

Références

[1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, in : Analyse et topologie sur les espaces singuliers, vol. I, Luminy, 1981, Astérisque 100 (1982) 5–171.

[2] E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid, L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure, Invent. Math. 87 (1987) 217–252.

[3] E. Cattani, F. El Zein, P.A. Griffiths, D.T. Lê, Hodge Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2014.

[4] M.A. de Cataldo, L. Migliorini, The perverse filtration and the Lefschetz hyperplane theorem, Ann. Math. (2) 171 (3) (2010) 2089–2113, arXiv:0805.4634.

[5] M. Kashiwara, A study of variation of mixed Hodge structure, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 22 (5) (1986) 991–1024.

[6] M. Kashiwara, T. Kawai, Hodge structure and holonomic systems, Proc. Jpn. Acad., Ser. A, Math. Sci. 62 (1) (1986) 1–4.

[7] M. Kashiwara, T. Kawai, Poincaré lemma for a variation of Hodge structure, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 23 (1987) 345–407.