C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 947–952

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Correction non linéaire d'ordre 2 et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion

A nonlinear second order in space correction and maximum principle for diffusion operators

Christophe Le Potier

CEA Saclay, DEN, DM2S, STMF, LMEC, 91191 Gif-sur-Yvette, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 mars 2014
Accepté après révision le 20 août 2014
Disponible sur Internet le 23 septembre 2014

Présenté par O. Pironneau

RÉSUMÉ

Nous décrivons une technique non linéaire d'ordre 2 qui permet de supprimer les oscillations apparaissant pour la discrétisation d'opérateur de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles.

ABSTRACT

We describe a second order in space nonlinear technique which suppresses oscillations appearing in the discretization of diffusion operators.

Abridged English version

It is well known that classical linear methods discretizing diffusion operators do not always satisfy maximum principle for distorted meshes or high anisotropy ratio. A few years ago, a nonlinear finite volume scheme was proposed to discretize the diffusion operators [4,6,10]. For that scheme, we obtained a discrete maximum principle for distorted meshes or highly anisotropic diffusion tensors. In the present work, we propose a nonlinear correction that gives nonoscillating solutions and which is in practice second order in space.

We consider problem (1) and a cell-centered finite volume scheme described in (2). Here, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{E}$ are the meshes and the faces of the grid. We denote by $|K|$ the volume of a mesh and by $F_{K,\sigma}$ a consistent approximation of $\int_\sigma D\nabla u.\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\sigma$. For $\mu > 0$ and $\eta > 0$, we propose the nonlinear correction described in (5).

The scheme consists in mixing the two methods developed in [9] and [11]. In Proposition 4.1, we show that the new scheme is coercive. In Proposition 4.2, we explain why there exists at least one solution to the system (5). In Proposition 4.3, we show that the new scheme satisfies the LMP structure (Definition 1.3 in [4]).

In Proposition 4.4, we show, in the one-dimensional case, with a traditional discretization of the diffusion operator, why the nonlinear correction is second order in space with regular functions. The numerical results are presented in the final section. We consider the analytical problem (7) and use the finite volume scheme in [10]. We first show the L^2 error with respect to the analytical solution, the order in space, the minimum values and the percentage of negative values as a function of the discretization step h (Scheme 1). Then we present the results obtained with the modified scheme (Scheme 2

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.08.010
1631-073X/

and Scheme 3). Finally, we compare with the nonlinear correction developed in [11] (Scheme 4). We observe that Scheme 2 and Scheme 3 are second order in space and are even more accurate than the original scheme. We check that there are nonoscillating. On these numerical tests, Scheme 4 remains first order in space and nonoscillating. Note that it is easy to generalize this new correction to hybrid schemes [5] in the spirit of [12] or to DDFV schemes [3].

1. Introduction

Nous nous intéressons à la discrétisation d'une équation elliptique. Il est bien connu que les schémas classiques discrétisant des opérateurs de diffusion ne satisfont pas toujours le principe du maximum pour des mailles très déformées ou des rapports d'anisotropie très élevés [8]. Nous proposons une nouvelle correction non linéaire qui donne des solutions non oscillantes pour des schémas volumes finis centrés sur les mailles. Elle se généralise aux schémas hybrides [5] ou aux schémas DDFV [3] en suivant la méthode décrite dans [12]. En pratique, elle est d'ordre 2 et s'avère donc très précise comparée à celles développées dans [11]. Rappelons que cette dernière a été analysée dans [2] sur l'équation de la chaleur en dimension 1.

2. Présentation

Nous considérons un domaine polygonal Ω de $\mathcal{R}^N$. Nous intéressons au problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \nabla u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

avec u la solution du problème, $\overline{\overline{D}}(x)$ une matrice (N,N) symétrique définie positive continue pour $x \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ le second membre.

3. Correction non linéaire

Nous considérons un maillage de Ω caractérisé par l'ensemble de ses mailles $\mathcal{M}$, de ses faces $\mathcal{E}$ (arêtes en 2 dimensions) et de ses points $\mathcal{P}$, notés $(x_K)_{K\in\mathcal{M}}$ et $(x_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$. Nous notons :

- $|K|$ le volume de la maille $K \in \mathcal{M}$, h_K son diamètre et $h_{\mathcal{M}} = sup_{K\in\mathcal{M}}\ h_K$,
- $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ l'ensemble des faces appartenant à $\partial\Omega$,
- $\forall K \in \mathcal{M}$, u_K la solution calculée sur la maille K et $f_K = \frac{\int_K f \mathrm{d}\Omega}{|K|}$,
- $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$, u_σ la solution calculée sur la face σ,
- $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, l'ensemble des fonctions constantes par mailles,
- $\operatorname{reg}\mathcal{M}$, la régularité du maillage définie dans [1].

Nous nous donnons un schéma $\mathcal{A}_K(u)$, linéaire, centré sur les mailles avec un stencil noté $V(K)$ constitué de mailles voisines de K et éventuellement de faces situées sur le bord de Ω. On suppose alors que $\mathcal{A}_K(u)$ vérifie : $\mathcal{A}_K(u) = \sum_{Z\in V(K)} \alpha_{Z,K}(u_Z - u_K)$, $\alpha_{Z,K}$ étant des réels. Notons que le nombre d'éléments des $V(K)_{K\in\mathcal{M}}$ est borné indépendamment du maillage. Le schéma $\mathcal{A}_K(u)$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{M}, & -\mathcal{A}_K(u) = |K| f_K \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, & u_\sigma = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Nous supposons aussi que le schéma est symétrique et vérifie les hypothèses de coercivité et de consistance décrites dans les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 dans [1].

Pour chaque maille K et pour chaque maille ou face Z ($Z \in V(K)$), nous supposons qu'il existe deux ensembles constitués de mailles ou de faces notés $V'(K,Z)$ et ($V'(Z,K)$ si $Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$) et des réels positifs notés $(C_{K,L},\ L \in V'(K,Z))$ et $(C_{L,Z},\ L \in V'(Z,K)$ si $Z \in V(K) \cap \mathcal{M})$ tels que, si u est affine et $u_K = u(x_K)$ (pour toute maille K) et $u_\sigma = u(x_\sigma)$ (pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$) :

$$(u_K - u_Z) = -\sum_{L\in V'(K,Z)} C_{K,L}(u_K - u_L) = -h_{K,Z}(u)$$

et si $Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$:

$$(u_Z - u_K) = -\sum_{L\in V'(Z,K)} C_{L,Z}(u_Z - u_L) = -h_{Z,K}(u)$$

Nous notons $\gamma_{KZ} = \sum_{L\in V'(K,Z)} C_{K,L}$. En suivant les notations de [9], nous définissons le gradient de la fonction u sur chaque maille $K \in \mathcal{M}$. Nous obtenons :

$$g_K = \frac{1}{|m_K|} \sum_{L\in V(K)} b_{LK}(u_K - u_L)$$

m_K et b_{LK} étant un volume et des vecteurs tels que g_K soit exact lorsque u est affine et $u_K = u(x_K)$. Pour $Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$, nous notons $v_{K,Z} = \frac{g_K.(x_K-x_Z)|g_Z.(x_K-x_Z)|+|g_K.(x_K-x_Z)|g_Z.(x_K-x_Z)}{|g_K.(x_K-x_Z)|+|g_Z.(x_K-x_Z)|}$ si $|g_K.(x_K - x_Z)| + |g_Z.(x_K - x_Z)| \neq 0$ et $v_{K,Z} = 0$ sinon. Pour $Z \in V(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}$, nous définissons $v_{K,Z} = g_K.(x_K - x_Z)$. Par ailleurs, nous notons $t_{K,Z}(u) = \frac{v_{K,Z}|u_K-u_Z|+|v_{K,Z}|(u_K-u_Z)}{|u_K-u_Z|+|v_{K,Z}|}$ si $|u_K - u_Z| + |v_{K,Z}| \neq 0$ et $t_{K,Z} = 0$ sinon. En outre, nous définissons $u_{\{KZ\}^{\max}} = u_K + (\max_{L\in V'(K,Z)}(u_L - u_K), 0)$ et $u_{\{KZ\}^{\min}} = u_K + (\min_{L\in V'(K,Z)}(u_L - u_K), 0)$.

Dans l'esprit de la formule (59) dans [9], nous définissons $\forall K \in \mathcal{M}$ et $\forall Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$, $\Theta_{K,Z}(u)$ satisfaisant :

$$\Theta_{K,Z}(u) = \begin{cases} \frac{(u_K-u_Z)-\min\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\max}}-u_K),t_{K,Z}(u),u_K-u_Z,\gamma_{ZK}(u_Z-u_{\{ZK\}^{\min}})\}}{(u_K-u_Z)} & \text{si } u_K > u_Z \\ \frac{(u_K-u_Z)-\max\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\min}}-u_K),t_{K,Z}(u),u_K-u_Z,\gamma_{ZK}(u_Z-u_{\{ZK\}^{\max}})\}}{(u_K-u_Z)} & \text{si } u_K < u_Z \\ 0 & \text{si } u_K = u_Z \end{cases} \tag{3}$$

Si $Z \in V(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}$, $\Theta_{K,Z}(u)$ devient :

$$\Theta_{K,Z}(u) = \begin{cases} \frac{(u_K-u_Z)-\min\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\max}}-u_K),t_{K,Z}(u),(u_K-u_Z)\}}{(u_K-u_Z)} & \text{si } u_K > u_Z \\ \frac{(u_K-u_Z)-\max\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\min}}-u_K),t_{K,Z}(u),(u_K-u_Z)\}}{(u_K-u_Z)} & \text{si } u_K < u_Z \\ 0 & \text{si } u_K = u_Z \end{cases} \tag{4}$$

La formule (59) de [9] a été modifiée avec l'introduction des termes $t_{K,Z}(u)$, qui permettent en pratique d'accélérer les algorithmes de point fixe dans les applications numériques.

Soit $\mu > 0$. Nous notons finalement : $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall Z \in V(K)$, $\tilde{\Theta}_{K,Z}(u) = \mu(|K| + |Z|) + \Theta_{K,Z}(u)$, avec la convention $|Z| = 0$ si $Z \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$.

Nous proposons de modifier le schéma précédent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{M}, \quad -\mathcal{A}_K(u) + \sum_{Z\in V(K)} \beta_{K,Z}(u)\tilde{\Theta}_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = -\mathcal{A}_K(u) + \mathcal{R}_K(u) = |K| f_K \\ \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, \quad u_\sigma = 0 \end{cases} \tag{5}$$

où $\beta_{K,Z}(u)$, qui dépend d'un réel $\eta > 0$, vérifie les égalités de la section 4.1 dans [1] :

$$\begin{aligned} \beta_{K,Z}(u) = {} & \frac{|\mathcal{A}_K(u)|}{\sum_{Y\in V(K)} |u_Y - u_K|} + \frac{|\mathcal{A}_Z(u)|}{\sum_{Y\in V(Z)} |u_Y - u_Z|} \\ & + \eta \min\left(|K| + |Z|, \frac{|K|}{\sum_{Y\in V(K)} |u_Y - u_K|} + \frac{|Z|}{\sum_{Y\in V(Z)} |u_Y - u_Z|}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

avec la convention $\mathcal{A}_Z(u) = 0$ si $Z \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$.

4. Propriétés de l'algorithme

Proposition 4.1. *Le schéma modifié est coercif.*

Nous vérifions immédiatement que $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$, $\tilde{\Theta}_{Z,K} = \tilde{\Theta}_{K,Z}$ et $\tilde{\Theta}_{Z,K} \geq 0$. Comme $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$, $\beta_{K,Z}(u) = \beta_{Z,K}(u)$ et $\beta_{K,Z}(u) \geq 0$, nous déduisons que $\sum_{K\in\mathcal{M}} \sum_{Z\in V(K)} \beta_{K,Z}(u)\tilde{\Theta}_{Z,K}(u_K - u_Z) \geq 0$. Nous concluons avec l'hypothèse de coercivité du schéma initial. □

Proposition 4.2. *Avec des maillages admissibles définis dans [1], il existe au moins une solution au système (5).*

$\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall Z \in V(K) \cap \mathcal{M}$, nous remarquons que

$$\left|\beta_{K,Z}(u)\tilde{\Theta}_{K,Z}(u)(u_K - u_Z)\right| \leq \left|\beta_{K,Z}(u)\right|\left|(u_K - u_Z)\right| + \mu\left|\beta_{K,Z}(u)\right|\left(|K| + |Z|\right)\left|(u_K - u_Z)\right|.$$

Or, les termes $|\beta_{K,Z}(u)|$ étant bornés comme montré dans [1], nous déduisons la continuité de $\mathcal{R}_K(u)$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. En utilisant la proposition 4.1, et en appliquant la proposition 6 dans [1], nous déduisons l'existence d'une solution au système (5). □

Proposition 4.3. *Le schéma modifié satisfait le principe du maximum local (LMP : définition 1.3 dans [4]).*

Vérifions que le schéma corrigé a une structure LMP. En reprenant les calculs décrits dans [11], nous écrivons :

$$\mathcal{A}_K(u) = \sum_{Z\in V(K)} \frac{1}{\sum_{L\in V(K)} |u_L - u_K|} \mathcal{A}_K(u)|u_K - u_Z| = \sum_{Z\in V(K)} \Delta_K \operatorname{sgn}(u_K - u_Z)\mathcal{A}_K(u)(u_K - u_Z).$$

Nous déduisons que le schéma corrigé s'écrit : $\mathcal{S}_K(u) = \sum_{Z\in V(K)} \tau_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = |K| f_K$ avec

$$\tau_{K,Z}(u) = \Delta_K \operatorname{sgn}(u_K - u_Z)\mathcal{A}_K(u) + \beta_{K,Z}(u)\Theta_{K,Z}(u) + \mu\big(\beta_{K,Z}\big(|K| + |Z|\big)\big).$$

Remarquons que $\forall K \in \mathcal{M}$ et $Z \in V(K)\cap\mathcal{M}$,

1) si $(u_K - u_Z) > 0$, $\Theta_{K,Z}(u)$ vérifie : $\Theta_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = (u_K - u_Z) - s_{Z,K,\max}(u_{\{KZ\}^{\max}} - u_K)$ avec

$$s_{Z,K,\max} = \frac{\min\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\max}} - u_K), t_{K,Z}(u), u_K - u_Z, \gamma_{ZK}(u_Z - u_{\{ZK\}^{\min}})\}}{(u_{\{KZ\}^{\max}} - u_K)} \quad \text{qui satisfait } 0 \le s_{Z,K,\max} \le \gamma_{KZ},$$

2) si $(u_K - u_Z) < 0$, $\Theta_{K,Z}(u)$ vérifie : $\Theta_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = (u_K - u_Z) - s_{Z,K,\min}(u_{\{KZ\}^{\min}} - u_K)$ avec

$$s_{Z,K,\min} = \frac{\max\{\gamma_{KZ}(u_{\{KZ\}^{\min}} - u_K), t_{K,Z}(u), u_K - u_Z, \gamma_{ZK}(u_Z - u_{\{ZK\}^{\max}})\}}{(u_{\{KZ\}^{\min}} - u_K)} \quad \text{qui satisfait } 0 \le s_{Z,K,\min} \le \gamma_{KZ}.$$

Ces remarques restent vraies si $Z \in V(K)\cap\mathcal{E}_{\text{ext}}$.

Nous déduisons donc que : $\forall K \in \mathcal{M}$, $Z \in V(K)$, $\tau_{K,Z}(u)$ vérifie :

$$\tau_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = \big(\Delta_K \operatorname{sgn}(u_K - u_Z)\mathcal{A}_K(u) + \beta_{K,Z}(u)\big)\big\{(u_K - u_Z) + s_{Z,K,*}(u_K - u_{\{KZ\}^*})\big\} + \mu\big(\beta_{K,Z}\big(|K| + |Z|\big)\big)$$

avec $* = \max$ ou $\min$ en fonction du signe de $(u_K - u_Z)$. Nous obtenons finalement :

$$\tau_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) = \tau^1_{K,Z}(u)(u_K - u_Z) + \tau^2_{K,Z}(u)\big(u_K - u^*_{\{KZ\}}\big) + \mu\big(\beta_{K,Z}\big(|K| + |Z|\big)\big)$$

avec $\tau^1_{K,Z}(u) = \Delta_K \operatorname{sgn}(u_K - u_Z)\mathcal{A}_K(u) + \beta_{K,Z}(u)$ et $\tau^2_{K,Z}(u) = \beta_{K,Z}(u)s_{Z,K,*}$. D'après la définition de $\beta_{K,Z}(u)$, nous vérifions que $\tau^1_{K,Z}(u) \ge 0$. Par ailleurs, comme $s_{Z,K,*} \ge 0$, alors $\tau^2_{K,Z}(u) \ge 0$. Les inégalités strictes (3) de la définition (1.3) dans [4] sont également vraies, car $\mu > 0$ et $\eta > 0$. □

Nous nous intéressons ici à la discrétisation classique centrée du laplacien en dimension 1, avec une taille de maille constante Δx. Nous obtenons $\mathcal{A}_j(u) = \frac{(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})}{\Delta x}$. Il est bien sûr inutile de corriger ce schéma pour supprimer les oscillations. À la manière de [7], l'objectif est ici d'estimer si la correction non linéaire change la précision du schéma initial avec des fonctions très régulières. Nous supprimons ici tous les termes $t_{K,Z}(u)$ dans la définition de $\tilde{\Theta}_{K,Z}(u)$, qui ont été ajoutés pour améliorer les temps de calculs dans les applications numériques.

Proposition 4.4. *En dimension 1, pour un maillage à pas constant, avec la discrétisation centrée du laplacien, la correction non linéaire appliquée à des fonctions régulières à dérivées non nulles est d'ordre 2.*

Pour un maillage à pas constant, les points x_j sont les milieux des mailles (qui sont des segments en dimension 1). Soit u une fonction régulière à dérivées non nulles. Nous notons $u_j = u(x_j)$, $u'_j = u'(x_j)$ et $u''_j = u''(x_j)$. La correction non linéaire $\mathcal{R}_j(u)$ s'écrit :

$$\frac{\mathcal{R}_j(u)}{\Delta x} = \frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x}\tilde{\Theta}_{j,j+1}(u)(u_j - u_{j+1}) + \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x}\tilde{\Theta}_{j,j-1}(u)(u_j - u_{j-1}).$$

Pour chaque nœud j, nous choisissons $h_{j,j+1}(u) = u_j - u_{j-1}$ et $h_{j+1,j}(u) = u_{j+1} - u_{j+2}$. Nous obtenons $\gamma_{jj+1} = \gamma_{j+1j} = 1$. Posons $\phi(r_1, r_2) = \min(r_1, r_2, 1)$ si $r_1 \ge 0$ et $r_2 \ge 0$ et $\phi(r_1, r_2) = 0$ sinon. Pour $(u_j - u_{j+1}) \ge 0$, nous écrivons :

$$\frac{\min\{(u_{\{jj+1\}^{\max}} - u_j), u_j - u_{j+1}, (u_{j+1} - u_{\{j+1j\}^{\min}})\}}{(u_j - u_{j+1})} = \phi\left(\frac{u_{j-1} - u_j}{u_j - u_{j+1}}, \frac{u_{j+1} - u_{j+2}}{u_j - u_{j+1}}\right).$$

De même, pour $(u_j - u_{j+1}) < 0$, nous obtenons :

$$\frac{\max\{(u_{\{jj+1\}^{\min}} - u_j), u_j - u_{j+1}, (u_{j+1} - u_{\{j+1j\}^{\max}})\}}{(u_j - u_{j+1})} = \phi\left(\frac{u_{j-1} - u_j}{u_j - u_{j+1}}, \frac{u_{j+1} - u_{j+2}}{u_j - u_{j+1}}\right).$$

La correction $\mathcal{R}_j(u)$ devient alors :

$$\frac{\mathcal{R}_j(u)}{\Delta x} = T_1 + T_2 \quad \text{avec } T_1 = \frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x}\big(\mu 2\Delta x(u_j - u_{j+1})\big) + \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x}\big(\mu 2\Delta x(u_j - u_{j-1})\big) \quad \text{et}$$

$$T_2 = \frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x}\left(1 - \phi\left(\frac{u_{j-1}-u_j}{u_j - u_{j+1}}, \frac{u_{j+1}-u_{j+2}}{u_j - u_{j+1}}\right)\right)(u_j - u_{j+1}) + \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x}\left(1 - \phi\left(\frac{u_{j-1}-u_{j-2}}{u_j - u_{j-1}}, \frac{u_{j+1}-u_j}{u_j - u_{j-1}}\right)\right)(u_j - u_{j-1}).$$

L'expression $T_3 = \frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x} - \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x}$ devient :

$$T_3 = \frac{|\mathcal{A}_{j+1}(u)| + O(\Delta x)}{\Delta x(|u_{j+1} - u_{j+2}| + |u_{j+1} - u_j|)} - \frac{|\mathcal{A}_{j-1}(u)| + O(\Delta x)}{\Delta x(|u_{j-1} - u_j| + |u_{j-1} - u_{j-2}|)}.$$

Nous obtenons donc :

$$T_3 = \frac{2\frac{|\mathcal{A}_{j+1}(u)|+O(\Delta x)}{\Delta x}||u'_{j-1}|\Delta x - 2\frac{|\mathcal{A}_{j-1}(u)|+O(\Delta x)}{\Delta x}||u'_{j+1}|\Delta x + O(\Delta x^2)}{4|u'_{j-1}||u'_{j+1}|\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}.$$

Avec la régularité de u, nous écrivons $\frac{|\mathcal{A}_{j+1}(u)|}{\Delta x}|u'_{j-1}| = \frac{|\mathcal{A}_{j-1}(u)|}{\Delta x}|u'_{j+1}| + O(\Delta x)$. Nous déduisons que $T_3 = O(1)$. Or $T_1 = \mu T_3 u'_j \Delta x^2 + (\frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x} + \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x})O(\Delta x^3)$. Comme $\frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x} = O(\frac{1}{\Delta x})$ et $\frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x} = O(\frac{1}{\Delta x})$, nous déduisons que $T_1 = O(\Delta x^2)$. Pour évaluer T_2, nous reprenons alors les calculs décrits dans [7] (Proposition 2.1). Nous obtenons $\frac{u_{j-1}-u_j}{u_j-u_{j+1}} = 1 - \frac{\Delta x u''_j}{u'_j} + O(\Delta x^2)$ et $\frac{u_{j-1}-u_{j-2}}{u_j-u_{j-1}} = 1 - \frac{\Delta x u''_j}{u'_j} + O(\Delta x^2)$. Avec les mêmes types de calculs, nous obtenons également : $\frac{u_{j+1}-u_{j+2}}{u_j-u_{j+1}} = 1 + \frac{\Delta x u''_j}{u'_j} + O(\Delta x^2)$ et $\frac{u_{j+1}-u_j}{u_j-u_{j-1}} = 1 + \frac{\Delta x u''_j}{u'_j} + O(\Delta x^2)$. En notant $\phi'_1(1,1)$, la valeur de la dérivée à gauche si $u''_j u'_j > 0$ ou à droite (si $u''_j u'_j < 0$) de la fonction $\phi(x,1)$ et $\phi'_2(1,1)$ la valeur de la dérivée à gauche si $u''_j u'_j < 0$ ou à droite (si $u''_j u'_j < 0$) de la fonction $\phi(1,x)$, l'expression T_2 devient :

$$T_2 = \frac{\beta_{j,j+1}}{\Delta x}\big(\phi'_1(1,1)\Delta x^2 u''_j - \phi'_2(1,1)\Delta x^2 u''_j + O(\Delta x^3)\big) - \frac{\beta_{j,j-1}}{\Delta x}\big(\phi'_1(1,1)\Delta x^2 u''_j - \phi'_2(1,1)\Delta x^2 u''_j + O(\Delta x^3)\big).$$

Comme $T_3 = O(1)$, nous obtenons $T_2 = O(\Delta x^2)$, ce qui nous permet de conclure. □

Remarque 1. Cette proposition reste vraie si on prend en compte les $t_{K,Z}(u)$.

Remarque 2. Il sera intéressant d'utiliser la technique développée dans [2] pour des équations instationnaires afin de confirmer théoriquement l'ordre 2 de la méthode.

Hypothèse 1. *Nous supposons que* $\sup_{K\in\mathcal{M}}|\mathcal{A}_K(u)|\frac{h_K}{|K|}$ *tend vers zéro lorsque* $h_{\mathcal{M}}$ *tend vers zéro.*

Proposition 4.5. *Avec l'hypothèse 1 et des maillages* $\mathcal{M}$ *admissibles définis dans [1] tels que* $\operatorname{reg}\mathcal{M}$ *est bornée, les solutions du système (5) convergent vers la solution de (1) lorsque* $h_{\mathcal{M}}$ *tend vers zéro.*

Comme $0 \le \Theta_{K,Z}(u) \le 1$, nous obtenons l'inégalité :

$$\begin{aligned}\big|\beta_{K,Z}(u)\tilde{\Theta}_{K,Z}(u)(u_K - u_Z)\big| &\le \beta_{K,Z}(u)|u_K - u_Z|\big(1 + \mu\big(|K| + |Z|\big)\big)\\ &\le \big\{\big|\mathcal{A}_K(u)\big| + \big|\mathcal{A}_Z(u)\big| + \eta|K| + |Z|\big\}\big(1 + \mu\big(|K| + |Z|\big)\big).\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse 1 et en calquant la preuve de la proposition 8 de [1], on déduit alors que :

$$\sum_{K\in\mathcal{M}} \operatorname{diam}(K) \sum_{Z\in V(K)} \beta_{K,Z}(u)\tilde{\Theta}_{K,Z}(u)|u_K - u_Z| \text{ tend vers zéro lorsque } h_{\mathcal{M}} \text{ tend vers zéro.}$$

On peut alors appliquer la proposition 7 de [1] et déduire que les solutions du système (1) tendent vers la solution de (1). □

5. Résultats numériques

Nous cherchons à retrouver numériquement la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{\overline{D}}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega =]0,0.5[\times]0,0.5[\\ u = \sin(\pi x)\sin(\pi y) & \text{pour } (x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } \overline{\overline{D}} = \frac{1}{(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} y^2 + \epsilon x^2 & -(1-\epsilon)xy \\ -(1-\epsilon)xy & x^2 + \epsilon y^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Tableau 1
Résultats obtenus avec les schémas 1, 2, 3 et 4 en fonction du pas en espace.

h	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
Erreur L^2 (schéma 1)	5.21×10^{-1}	1.96×10^{-1}	7.14×10^{-2}	1.65×10^{-2}	2.14×10^{-3}
Ordre (schéma 1)		1.41	1.46	2.11	2.95
Conc. négatives (schéma 1)	12.5	9.38	5.46	2.14	0.53
Val. min (schéma 1)	-2.9×10^{-1}	-2.4×10^{-1}	-1.4×10^{-1}	-5.26×10^{-2}	-1.33×10^{-2}
Erreur L^2 (schéma 2)	6.54×10^{-2}	1.05×10^{-2}	3.27×10^{-3}	1.06×10^{-3}	3.06×10^{-4}
Ordre (schéma 2)		2.63	1.68	1.62	1.80
nit	48	19	20	27	44
Erreur L^2 (schéma 3)	2.02×10^{-1}	3.76×10^{-2}	7.14×10^{-3}	1.60×10^{-3}	3.65×10^{-4}
Ordre (schéma 3)		2.42	2.40	2.16	2.14
nit	25	80	21	35	76
Erreur L^2 (schéma 4)	1.52×10^{-1}	8.51×10^{-2}	4.46×10^{-2}	2.33×10^{-2}	1.21×10^{-2}
Ordre (schéma 4)		0.84	0.93	0.94	0.94
nit	3	11	8	12	15

et

$$\begin{cases} u_{\mathrm{ana}} = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ f = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} u_{\mathrm{ana}} \end{cases} \tag{8}$$

Le paramètre ϵ est égal à 10^{-6} ce qui donne un rapport d'anisotropie égal à 10^6. Nous vérifions que $f \geq 0$. Par ailleurs, nous utilisons des maillages de carrés de surface h^2, h variant de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{128}$. Pour chaque maille K du domaine, l'ensemble $V'(K,Z)$ et les coefficients $C_{K,L}$, $L \in V'(K,Z)$ sont déduits de l'égalité $\sum_{L \in V(K)} d_{K,L}(u_K - u_L) = 0$ pour des fonctions linéaires, avec $d_{K,L} = 1$ si L est une maille intérieure et $d_{K,L} = 2$ si $L \in \partial\Omega$. Nous calculons la solution du problème à l'aide d'un algorithme de point fixe. Notons u^i la valeur de la solution à l'itéré i et $A(u^i)$ la matrice discrétisant l'opérateur de diffusion. Le schéma itératif s'écrit $B(u^i)(u^{i+1} - u^i) = A(u^i)u^i - f$. Nous choisissons pour B la matrice du schéma développé dans [1]. Pour les schémas 2 et 3, cela permet d'obtenir un nombre d'itérations raisonnable.

Nous montrons tout d'abord les résultats obtenus dans le tableau 1 avec le schéma développé dans [10,13] (schéma 1) (erreurs L^2 de u par rapport à la solution analytique, ordre, pourcentage de valeurs négatives, valeur minimum). Nous présentons également les résultats obtenus avec le schéma décrit dans le paragraphe 3 (schéma 2) ($\mu = 0$, $\eta = 0$), (schéma 3) ($\mu = 0$, $\eta = 0$ où les $\tau_{K,Z}(u)$ sont supprimés dans (3) et (4)) et le schéma développé dans [11] (schéma 4).

Nous observons que les schémas 2, 3 et 4 n'oscillent plus. Nous observons que les schémas 2 et 3 semblent tendre vers l'ordre 2 alors que le schéma 4 reste d'ordre 1 comme déjà montré dans [11]. Pour les méthodes 2 et 4, le nombre d'itérations *nit* reste inférieur à 80 alors que les temps de calcul sont plus importants pour le schéma 3.

Références

[1] C. Cancès, M. Cathala, C. Le Potier, Monotone corrections for generic cell-centered finite volume approximations of anisotropic diffusion equations, Numer. Math. 125 (2013) 387–417.
[2] B. Després, Non-linear finite volume schemes for the heat equation in 1D, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 48 (1) (2014) 107–134.
[3] K. Domelevo, P. Omnes, A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 39 (6) (2005) 1203–1249.
[4] J. Droniou, C. Le Potier, Construction and convergence study of local-maximum-principle preserving schemes for elliptic equations, SIAM J. Numer. Anal. 49 (2) (2011) 459–490.
[5] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes SUSHI: a scheme using stabilisation and hybrid interfaces, IMA J. Numer. Anal. 30 (4) (2010) 1009–1043.
[6] A. Genty, C. Le Potier, Maximum and minimum principles for radionuclide transport calculations in geological radioactive waste repository: comparisons between a mixed hybrid finite element method and finite volume element discretizations, Transp. Porous Media 88 (2011) 65–85.
[7] E. Godlewski, P.A. Raviart, Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Ellipses, 1991.
[8] R. Herbin, F. Hubert, Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, in: 5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, 8–13 juin, 2008, http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5.
[9] D. Kuzmin, M.J. Shashkov, D. Svyatskiy, A constrained finite element method satisfying the discrete maximum principle for anisotropic diffusion problems, J. Comput. Phys. 228 (2009) 3448–3463.
[10] C. Le Potier, Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 921–926.
[11] C. Le Potier, Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (11–12) (2010) 691–695.
[12] C. Le Potier, A. Mahamane, A nonlinear correction and maximum principle for diffusion operators discretized using hybrid schemes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 101–106.
[13] K. Lipnikov, M. Shashkov, I. Yotov, Local flux mimetic finite difference methods, Numer. Math. 112 (2009) 115–152.