C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 823–829

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Contrôle optimal

Sur l'état de synchronisation exacte d'un système couplé d'équations des ondes

On the exactly synchronizable state to a coupled system of wave equations

Tatsien Li [a,b,c,1], Bopeng Rao [d]

[a] *School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*
[b] *Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics, China*
[c] *Nonlinear Mathematical Modeling and Methods Laboratory, China*
[d] *Institut de recherche mathématique avancée, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 17 juillet 2014
Accepté le 15 août 2014
Disponible sur Internet le 20 septembre 2014

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous considérons la détermination de l'état de synchronisation exacte d'un système couplé d'équations des ondes. Dans un cas particulier, l'état de synchronisation exacte peut être déterminé indépendamment de contrôles frontières. Dans le cas général, celui-ci dépend des contrôles frontières employés. Néanmoins, nous donnons une estimation de la différence entre l'état de synchronisation exacte et la solution d'un problème indépendant de contrôles frontières. La détermination de l'état de synchronisation exacte par groupes est également discutée.

ABSTRACT

In this Note, we consider the determination of the state of exact synchronization for a coupled system of wave equations. In a special case, the state of exact synchronization can be uniquely determined whatever the boundary controls would be chosen. In the general case, the state of exact synchronization depends on the boundary controls that realize the exact synchronization. However, we can estimate the difference between the state of exact synchronization and the solution to a problem independent of boundary controls. The determination of the state of exact synchronization by groups is also discussed.

Abridged English version

The phenomenon of synchronization was first observed by Huygens in 1665 [4]. The theoretical research on synchronization phenomena dates back to Fujisaka and Yamada's study of synchronization for coupled equations in 1983 [2], and since then the previous studies focused only on systems described by ODEs. The exact synchronization in the PDEs case was first

Adresses e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T. Li), bopeng.rao@math.unistra.fr (B. Rao).

[1] Project supported by the National Basic Research Program of China (No. 2013CB834100), and the National Natural Science Foundation of China (No. 11121101).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.08.007
1631-073X/

studied for a coupled system of wave equations both for the higher-dimensional case in the framework of weak solutions by Li and Rao [5,6], and for the one dimensional case in the framework of classical solutions by Li, Rao and Hu [7,3].

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with smooth boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ such that $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$. Assume that the usual geometric control condition (see [1]) is satisfied. Let $U = (u^{(1)}, \cdots, u^{(N)})^{\mathrm{T}}$ be the state variable and $H = (h^{(1)}, \cdots, h^{(N)})^{\mathrm{T}}$ be the boundary control. We consider the following coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls:

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{in } \Omega, \\ U = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ U = DH & \text{on } \Gamma_1, \\ t = 0\colon \quad U = U_0, \quad U' = U_1, \end{cases}$$

where A and D are matrices of order N with constant elements. By contrast with the statement given in [5], a control matrix D is added to the boundary condition on Γ_1. This approach is more flexible, since one can adjust the number of boundary controls by changing the rank of D correspondingly.

It was pointed out in [5] that the attainable set of exactly synchronizable states (u, u') at the synchronizable moment $t = T$ is the whole space $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ when the initial data (U_0, U_1) varies in the space $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^N$. In this Note, we will determine the exactly synchronizable state u for each given initial data (U_0, U_1). In a special case, the exactly synchronizable state u is uniquely determined by a problem independent of the employed boundary controls. In the general case, the exactly synchronizable state u depends on boundary controls H and cannot be uniquely determined. Nevertheless, under suitable assumptions, we can establish an estimate of the difference between u and the solution to a wave equation with homogeneous Dirichlet boundary condition.

These results are also generalized to the determination of the state of exact synchronization by groups.

1. Introduction

On désigne par $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ régulière telle que $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$. On suppose que Ω satisfait la condition géométrique usuelle de contrôle (voir [1]). On pose $U = (u^{(1)}, \cdots, u^{(N)})^{\mathrm{T}}$ et $H = (h^{(1)}, \cdots, h^{(N)})^{\mathrm{T}}$. Étant données deux matrices $A, D \in \mathbb{M}^{N\times N}(\mathbb{R})$, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ U = DH & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad U' = U_1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Par contraste avec le modèle étudié dans [5], on introduit ici une matrice de contrôle D dans la condition aux limites sur Γ_1 ; ceci permet d'avoir un choix plus flexible de contrôles.

Sous certaines conditions de compatibilité, nous avons établi la synchronisation exacte dans des travaux antérieurs [3,5–7]. Nous savons que les états de synchronisation (u, u') à l'instant synchronisable T décrivent tout l'espace $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^N$ lorsque les données initiales (U_0, U_1) varient dans l'espace $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^N$. En revanche, on ne connaît pas l'évolution de l'état de synchronisation exacte pour une donnée initiale fixée.

Dans cette Note, nous montrons que si A^{T} admet un vecteur propre correspondant E tel que $(E, e) = 1$, où $e = (1, \cdots, 1)$, alors l'état de synchronisation exacte u peut être déterminé par un problème indépendant des contrôles frontières employés. Dans le cas général, l'état de synchronisation exacte u dépend des contrôles frontières. Néanmoins, nous donnons une estimation de la différence entre l'état de synchronisation exacte et la solution d'un problème indépendant des contrôles employés.

Ces résultats sont généralisés à la détermination de l'état de synchronisation exacte par groupes.

2. Synchronisation exacte

Nous donnons d'abord un résultat complémentaire sur la synchronisation exacte, dont une version plus restreinte a été établie dans [5]. Rappelons que le problème (1.1) est exactement synchronisable à l'instant $T > 0$ si, pour toutes données initiales $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^N$, il existe un contrôle frontière $H \in (L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)))^N$ tel que la solution correspondante $U = U(t, x)$ satisfasse la condition finale

$$t \geq T: \quad u^{(1)} \equiv \cdots \equiv u^{(N)} := u, \tag{2.1}$$

où la fonction scalaire u est appelée l'état de synchronisation exacte.

Désignons par C_r une matrice d'ordre $(r-1) \times r$ définie par

$$C_r = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Span}\{e\}$ avec $e = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ et que la condition de synchronisation (2.1) s'écrit sous la forme

$$t \geq T: \quad U = ue.$$

Puis, en posant $C = C_N$, on définit l'ensemble admissible des matrices de contrôle par

$$\mathcal{D}_{N-1} = \left\{D \in \mathbb{M}^N(\mathbb{R}): \ \mathrm{rank}(D) = \mathrm{rank}(CD) = N-1\right\}.$$

Théorème 2.1. *Supposons que Ω satisfait la condition géométrique usuelle de contrôle. Alors le système (1.1) est exactement synchronisable au moyen d'une matrice de contrôle $D \in \mathcal{D}_{N-1}$, si et seulement si A satisfait la condition de compatibilité suivante :*

$$A\,\mathrm{Ker}(C) \subseteq \mathrm{Ker}(C). \tag{2.2}$$

Démonstration. En appliquant C au système (1.1), on obtient

$$t \geq T: \quad CAeu = 0.$$

La matrice D étant de rang $(N-1)$, le système (1.1) n'est pas exactement nul contrôlable (voir [6]). Il existe au moins une donnée initiale (U_0, U_1) telle que l'état de synchronisation correspondante u ne soit pas identiquement nul. On en déduit que $CAe = 0$ et donc la condition (2.2).

Réciproquement, la condition (2.2) implique l'existence d'une matrice $\overline{A}$ d'ordre $(N-1)$ telle que $CA = \overline{A}C$ ([8]). Puis, en appliquant C au système (1.1) et en posant $W = CU$, $\overline{H} = CDH$, $W_0 = CU_0$ et $W_1 = CU_1$, on transforme (1.1) en un système réduit donné par :

$$\begin{cases} W'' - \Delta W + \overline{A}W = 0 & \text{dans } \Omega, \\ W = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ W = \overline{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad W = W_0, \quad W' = W_1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Selon un résultat établi dans [5], le système (2.3) est exactement nul contrôlable dans $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^{N-1}$ au moyen d'un contrôle frontière $\overline{H} \in (L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)))^{N-1}$. Une fois que $\overline{H}$ est déterminé, on résout le système linéaire $CDH = \overline{H}$ pour trouver un contrôle $H \in (L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)))^N$ qui réalise la synchronisation exacte de (1.1). La preuve est donc complète. □

La condition de compatibilité (2.2) implique l'existence d'une constante a telle que $Ae = ae$, ce qui se traduit en une condition de somme sur les lignes de la matrice A (conditions déjà obtenues dans [5]) :

$$\sum_{p=1}^{N} a_{kp} = a, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.4}$$

Désignons par $e_1, e_2, \cdots, e_r$ (resp. $E_1, E_2, \cdots, E_r$) la chaîne de Jordan de A (resp. de A^{T}) telle que

$$\begin{cases} Ae_l = ae_l + e_{l+1}, & 1 \leq l \leq r, \\ A^{\mathrm{T}}E_k = aE_k + E_{k-1}, & 1 \leq k \leq r, \\ (E_k, e_l) = \delta_{kl}, & 1 \leq k, l \leq r, \\ e_0 = E_{r+1} = 0, & e_r = (1, \cdots, 1)^T. \end{cases} \tag{2.5}$$

Puis nous définissons la projection P sur les systèmes bi-orthogonaux $e_1, e_2, \cdots, e_r$ et $E_1, E_2, \cdots, E_r$ comme suit :

$$PU = \sum_{k=1}^{r} (E_k, U)e_k \quad \text{pour chaque } U \in \mathbb{R}^N.$$

On a

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}. \tag{2.6}$$

Ensuite, nous définissons la partie contrôlable $U_c := (I-P)U$ et la partie synchronisable $U_s := PU$. Alors, la synchronisation exacte implique que

$$t \geq T: \quad U_c = u(I-P)e_r = 0, \quad U_s = uPe_r = ue_r.$$

Ainsi, le contrôle frontière H réalise la nulle contrôlabilité exacte de la donnée initiale $((I-P)U_0, (I-P)U_1) \in \mathrm{Ker}(P) \times \mathrm{Ker}(P)$, d'une part, et la synchronisation exacte de la donnée initiale $(PU_0, PU_1) \in \mathrm{Im}(P) \times \mathrm{Im}(P)$, d'autre part. De plus, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Supposons que le système (1.1) est exactement synchronisable et que la partie synchronisable U_s est indépendante des contrôles frontières employés H. Alors on a nécessairement :*

$$r = 1 \quad et \quad PD = 0.$$

Démonstration. Comme U_s est indépendante des contrôles frontières,

$$U_s = PU = PDH \quad \text{sur }]0, T[\times \Gamma_1$$

est donc indépendante du contrôle H. D'autre part, la valeur de H sur $]T-\epsilon, T[\times \Gamma_1$ peut être arbitrairement choisie si $\epsilon > 0$ est assez petit. Il s'ensuit que $PD = 0$, puis $\mathrm{Im}(D) \subseteq \mathrm{Ker}(P)$. D'après (2.6), on a $\dim \mathrm{Ker}(P) = N - r$ and $\dim \mathrm{Im}(D) = N - 1$, ce qui implique que $r = 1$. □

Corollaire 2.1. *Supposons que* $\mathrm{Ker}(C)$ *et* $\mathrm{Im}(C^{\mathrm{T}})$ *sont des sous-espaces invariants de A. Alors il existe une matrice de contrôle $D \in \mathcal{D}_{N-1}$ telle que la partie synchronisable U_s est indépendante des contrôles frontières employés.*

Maintenant, nous retournons à la détermination de l'état de synchronisation exacte. Définissons

$$\psi_k = (E_k, U), \quad 1 \le k \le r.$$

En appliquant $E_k (1 \le k \le r)$ au système (1.1), nous obtenons le système réduit suivant :

$$\begin{cases} \psi_k'' - \Delta \psi_k + a\psi_k + \psi_{k-1} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_k = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \psi_k = E_k^T DH & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0 : \quad \psi_k = (E_k, U_0), \quad \psi_k' = (E_k, U_1). \end{cases} \tag{2.7}$$

Par ailleurs, par la synchronisation exacte, il vient que :

$$t \ge T : \quad \psi_k(t) = \big(E_k, U(t)\big) = u(t)(E_k, e_r) = u(t)\delta_{kr}, \quad 1 \le k \le r. \tag{2.8}$$

En particulier, on a :

$$t \ge T : \quad u = \psi_r. \tag{2.9}$$

Les relations (2.8)–(2.9) montrent que seule la dernière composante ψ_r est synchronisée, tandis que les autres sont ramenées à zéro à l'instant T. Mais, pour déterminer ψ_r, nous devons résoudre le problème (2.7) pour tout $1 \le k \le r$. Sauf dans le cas $r = 1$, l'état de synchronisation exacte u dépend des contrôles frontières. Néanmoins, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.3. *Soit $D \in \mathcal{D}_{N-1}$ une matrice de contrôle telle que $E_r^{\mathrm{T}} D = 0$. On désigne par ϕ la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + a\phi = 0 & dans\ \Omega, \\ \phi = 0 & sur\ \Gamma, \\ t = 0 : \quad \phi = (E_r, U_0), \quad \phi' = (E_r, U_1). \end{cases} \tag{2.10}$$

Si $r = 1$, l'état de synchronisation exacte u est donné par :

$$t \ge T : \quad u = \phi. \tag{2.11}$$

Dans ce cas, l'état de synchronisation exacte u est indépendant des contrôles employés.

Si $r > 1$, il existe une constante positive $c > 0$ telle que l'état de synchronisation exacte u satisfait l'estimation suivante :

$$\sup_{t \ge T} \big\| \big(u, u'\big)(t) - \big(\phi, \phi'\big)(t) \big\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \le c \min_{S \in \mathcal{S}_N} \big\| CS(U_0, U_1) \big\|_{(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^{N-1}}, \tag{2.12}$$

où $\mathcal{S}_N$ désigne l'ensemble des matrices de permutation de $\{1, 2, \cdots, N\}$.

Démonstration. Dans le cas $r = 1$, le problème (2.7) est réduit au problème (2.10), et la relation (2.9) donne (2.11). Nous renvoyons à [9] pour le cas général. □

3. Synchronisation exacte par groupes

Nous répartissons les composantes de U en deux groupes : $(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})$ et $(u^{(m+1)},\cdots,u^{(N)})$. Le problème (1.1) est dit exactement synchronisable par groupes à l'instant $T>0$ si, pour toutes données initiales $(U_0,U_1)\in(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^N$, il existe des contrôles frontières $H\in(L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)))^N$, tels que la solution correspondante $U=U(t,x)$ satisfasse la condition finale :

$$t\geq T:\quad u^{(1)}\equiv\cdots\equiv u^{(m)}:=u,\quad u^{(m+1)}\equiv\cdots\equiv u^{(N)}:=v, \tag{3.1}$$

où (u,v) est appelée l'état de synchronisation exacte par groupes.

On désigne par C la matrice de synchronisation par groupes :

$$C=\begin{pmatrix}C_m & 0\\ 0 & C_{N-m}\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Puis on définit l'ensemble admissible des matrices de contrôle par

$$\mathcal{D}_{N-2}=\big\{D\in\mathbb{M}^N(\mathbb{R}):\ \operatorname{rank}(D)=\operatorname{rank}(CD)=N-2\big\}. \tag{3.3}$$

Nous donnons d'abord un résultat complémentaire sur la synchronisation exacte par groupes, dont une version plus restreinte a été établie dans [5].

Théorème 3.1. *Supposons que Ω satisfait la condition géométrique usuelle de contrôle. Alors le système (1.1) est exactement synchronisable par groupes au moyen d'une matrice de contrôle $D\in\mathcal{D}_{N-2}$ si et seulement si A satisfait la condition de compatibilité suivante :*

$$A\operatorname{Ker}(C)\subseteq\operatorname{Ker}(C). \tag{3.4}$$

Démonstration. Notons que $\operatorname{Ker}(C)=\operatorname{Span}\{e_1,e_2\}$, où

$$e_1=\big(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{m},\overbrace{0,0,\cdots,0}^{N-m}\big)^T,\qquad e_2=\big(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m},\overbrace{1,1,\cdots,1}^{N-m}\big)^T.$$

Alors la condition (3.1) s'écrit sous la forme $U=ue_1+ve_2$ pour $t\geq T$. En appliquant C au système (1.1), on obtient $uCAe_1+vCAe_2=0$ pour $t\geq T$. Si u,v sont linéairement indépendants, on aura $CAe_1=CAe_2=0$, donc on obtient (3.4). Sinon, on peut étendre la matrice C à une matrice $\widehat{C}$ d'ordre $(N-1)\times N$ telle que $A\operatorname{Ker}(\widehat{C})\subseteq\operatorname{Ker}(\widehat{C})$, ci qui, grâce à un résultat exposé dans [8], implique l'existence d'une matrice $\overline{A}$ d'ordre $(N-1)$ telle que $\widehat{C}A=\overline{A}\widehat{C}$. Alors, en appliquant $\widehat{C}$ au système (1.1) et en posant $\widehat{C}U=W$, on obtient le système réduit :

$$\begin{cases}W''-\Delta W+\overline{A}W=0 & \text{dans } \Omega,\\ W=0 & \text{sur } \Gamma_0,\\ W=\widehat{C}DH & \text{sur } \Gamma_1,\\ t=0:\quad W=\widehat{C}U_0,\quad W'=\widehat{C}U_1. & \end{cases} \tag{3.5}$$

De plus, la condition de synchronisation implique que :

$$t\geq T:\quad W=\widehat{C}U\equiv 0.$$

Ainsi, le système (3.5) est exactement nul contrôlable. Mais le système (3.5) possède $(N-1)$ équations, tandis que la nouvelle matrice de contrôle $\widehat{C}D$ est de rang inférieur ou égal à $(N-2)$, ce qui contredit la non-contrôlabilité exacte établie dans [6]. La réciproque est semblable à celle du Théorème 2.1. La preuve est donc complète. □

La condition de compatibilité (3.4) implique qu'il existe des constantes a,b,c,d telles que

$$Ae_1=ae_1+be_2,\qquad Ae_2=ce_1+de_2,$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=1}^m a_{kp}=a,\quad \sum_{p=m+1}^N a_{kp}=b,\quad k=1,\cdots,m,\\ \displaystyle\sum_{p=1}^m a_{kp}=c,\quad \sum_{p=m+1}^N a_{kp}=d,\quad k=m+1,\cdots,N,\end{cases}$$

i.e. sous la forme des conditions déjà obtenues dans [5]. Dans la suite, nous cherchons à déterminer l'état (u,v) de synchronisation exacte par groupes de (1.1). Considérons d'abord un cas simple.

Théorème 3.2. *Supposons que A^{T} admet un sous-espace invariant* $\mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$, *qui est bi-orthogonal au sous-espace invariant* $\mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ *:*

$$(E_i, e_j) = \delta_{ij}. \tag{3.6}$$

Supposons, de plus, que la matrice de contrôle $D \in \mathcal{D}_{N-2}$ soit choisie telle que $E_1^{\mathrm{T}} D = E_2^{\mathrm{T}} D = 0$. Alors, l'état de synchronisation exacte est donné par

$$t \geq T: \quad (u, v) = (\phi, \psi),$$

où (ϕ, ψ) est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + a\phi + c\psi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \psi'' - \Delta\psi + b\phi + d\psi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \phi = \psi = 0 & \textit{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \begin{cases} \phi = (U_0, E_1), & \phi' = (U_1, E_1), \\ \psi = (U_0, E_2), & \psi' = (U_1, E_2). \end{cases} \end{cases} \tag{3.7}$$

Démonstration. D'après les relations (3.6), on trouve que

$$A^{\mathrm{T}} E_1 = aE_1 + cE_2, \qquad A^{\mathrm{T}} E_2 = bE_1 + dE_2.$$

Puis, en appliquant E_1, E_2 au problème (1.1) et en posant $\phi = (U, E_1)$ et $\psi = (U, E_2)$, on trouve facilement (3.7). D'autre part, la synchronisation exacte par groupes implique que

$$t \geq T: \quad \phi = (U, E_1) = (ue_1 + ve_2, E_1) = u, \quad \psi = (U, E_2) = (ue_1 + ve_2, E_2) = v. \tag{3.8}$$

La preuve est donc complète. □

Dans le cas général, on choisit deux vecteurs E_1 et E_2 qui sont bi-orthogonaux à e_1 et e_2 et qui minimisent le résidu $\|A^{\mathrm{T}} E_1 - aE_1 - cE_2\|^2 + \|A^{\mathrm{T}} E_2 - bE_1 - dE_2\|^2$. Il existe donc des vecteurs $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{N-2}$ tels que

$$aE_1 + cE_2 - A^{\mathrm{T}} E_1 = C^{\mathrm{T}} r_1, \qquad bE_1 + dE_2 - A^{\mathrm{T}} E_2 = C^{\mathrm{T}} r_2.$$

Théorème 3.3. *Soient E_1, E_2 des vecteurs bi-orthogonaux aux vecteurs e_1, e_2. On définit ϕ, ψ par le système suivant :*

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + a\phi + c\psi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \psi'' - \Delta\psi + b\phi + d\psi = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \phi = \psi = 0 & \textit{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \begin{cases} \phi = (U_0, E_1), & \phi' = (U_1, E_1), \\ \psi = (U_0, E_2), & \psi' = (U_1, E_2). \end{cases} \end{cases} \tag{3.9}$$

Supposons que la matrice de contrôle $D \in D_{N-2}$ soit choisie telle que $E_1^{\mathrm{T}} D = E_2^{\mathrm{T}} D = 0$. Alors, il existe une constante positive $c > 0$ telle que, pour tout $t \geq T$, on ait :

$$\big\| \big(u, v, u', v'\big)(t) - \big(\phi, \psi, \phi', \psi'\big)(t) \big\|_{(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2} \leq c \big\| C(U_0, U_1) \big\|_{(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^{N-1}}, \tag{3.10}$$

où la matrice C est donnée dans (3.2).

Démonstration. En appliquant E_1, E_2 au problème (1.1) et en posant $\overline{\phi} = (U, E_1)$ et $\overline{\psi} = (U, E_2)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \overline{\phi}'' - \Delta\overline{\phi} + a\overline{\phi} + c\overline{\psi} = (r_1, CU) & \text{dans } \Omega, \\ \overline{\psi}'' - \Delta\overline{\psi} + b\overline{\phi} + d\overline{\psi} = (r_2, CU) & \text{dans } \Omega, \\ \overline{\phi} = \overline{\psi} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \begin{cases} \overline{\phi} = (U_0, E_1), & \overline{\phi}' = (U_1, E_1), \\ \overline{\psi} = (U_0, E_2), & \overline{\psi}' = (U_1, E_2). \end{cases} \end{cases} \tag{3.11}$$

Il existe donc une constante positive $c_1 > 0$ telle que

$$\big\| \big(\overline{\phi}, \overline{\psi}, \overline{\phi}', \overline{\psi}'\big)(t) - \big(\phi, \psi, \phi', \psi'\big)(t) \big\|^2_{(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2} \leq c_1 \int_0^T \big\| CU(s) \big\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

Par ailleurs, grâce à la contrôlabilité exacte du système réduit (cf. [10]), il existe une autre constante $c_2 > 0$ telle que

$$\int_0^T \|CU(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s \leq c_2 \|C(U_0, U_1)\|^2_{(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^{N-1}}. \tag{3.13}$$

Le même calcul que celui de (3.8) donne

$$t \geq T: \quad \overline{\phi} = u, \quad \overline{\psi} = v. \tag{3.14}$$

Alors, en reportant (3.13) et (3.14) dans (3.12), on obtient (3.10). La preuve est donc complète. □

Références

[1] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim. 30 (1992) 1024–1065.

[2] H. Fujisaka, T. Yamada, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 32–46.

[3] L. Hu, T.-T. Li, B. Rao, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations with coupled boundary conditions of dissipative type, Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014) 881–901.

[4] C. Huygens, Oeuvres complètes, vol. 15, Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam, 1967.

[5] T.-T. Li, B. Rao, Exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, Chin. Ann. Math., Ser. B 34 (2013) 139–160.

[6] T.-T. Li, B. Rao, A note on the exact synchronization by groups for a coupled system of wave equations, Math. Methods Appl. Sci. (2014), http://dx.doi.org/10.1002/mma.3062.

[7] T.-T. Li, B. Rao, L. Hu, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 20 (2014) 339–361.

[8] T.-T. Li, B. Rao, Y. Wei, Generalized exact boundary synchronization for a coupled system of wave equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014) 2893–2905.

[9] T.-T. Li, B. Rao, On the exactly synchronizable state to a coupled system of wave equations, Port. Math., soumis pour publication.

[10] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, vol. 1, Masson, Paris, 1988.