C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 377–382

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre/Géométrie algébrique

Extensions de la filtration de Saito

Extensions of Saito's filtration

Abhishek Banerjee

Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75005, Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 18 novembre 2013
Accepté après révision le 14 mars 2014
Disponible sur Internet le 31 mars 2014

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

Nous étendons la filtration de Saito aux groupes de Chow d'un morphisme représentable de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$, la catégorie de schémas sur $\mathbb{C}$. De plus, pour un préfaisceau sur la catégorie de schémas lisses et projectifs sur $\mathbb{C}$, nous définissons ses groupes de Chow supérieurs et leurs filtrations.

ABSTRACT

We extend Saito's filtration to the Chow groups of a representable morphism of presheaves on $Sch_{\mathbb{C}}$, the category of schemes over $\mathbb{C}$. Moreover, for a presheaf on the category of smooth and projective schemes over $\mathbb{C}$, we define its higher Chow groups along with their filtrations.

Abridged English version

Given a smooth, projective scheme Z over $\mathbb{C}$, Saito [10] has defined a filtration $\{F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Z)\}_{r\geqslant 0}$ on its Chow groups that is a candidate for the conjectural Bloch–Beilinson filtration. The purpose of this paper is twofold: first, we extend the filtration of Saito to the operational Chow groups of an arbitrary variety (not necessarily smooth or projective) and more generally to the bivariant Chow groups of a representable morphism of presheaves. Secondly, we construct higher Chow groups for a presheaf on the category $SmProj_{\mathbb{C}}$ of smooth and projective schemes over $\mathbb{C}$ and show that the filtration of Saito [10] can be naturally extended to these higher Chow groups. In particular, this gives us a filtration on the higher Chow groups of a smooth and projective variety over $\mathbb{C}$. Both these aims are a continuation of our earlier work presented in [1] and [2].

Let $Sch_{\mathbb{C}}$ be the category of schemes over $\mathbb{C}$ and let $S := Spec(\mathbb{C})$. For any scheme $X \in Sch_{\mathbb{C}}$, we let h_X denote the presheaf represented by X. As introduced in [2], a class c in the Chow group $CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})$ of a representable morphism f of presheaves on $Sch_{\mathbb{C}}$ gives us a collection of morphisms:

$$c^k_g : CH_k(X) \longrightarrow CH_{k-p}(Y) \quad \forall g : h_X \longrightarrow \mathcal{F},\ X \in Sch_{\mathbb{C}},\ k \in \mathbb{Z} \tag{0.1}$$

Adresse e-mail : abhishekbanerjee1313@gmail.com.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.03.016
1631-073X/

where $Y \in Sch_{\mathbb{C}}$ is such that $h_Y = h_X \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$. Moreover, the morphisms c^k_g are compatible with flat pullbacks, proper pushforwards and refined Gysin morphisms as explained in [2, Definition 2.2]. We define a filtration $\{F^r CH_k(X)\}_{r\geqslant 0}$ on $CH_k(X)$ for any $X \in Sch_{\mathbb{C}}$ by setting $\alpha \in F^r CH_k(X) \subseteq CH_k(X) \cong CH^{-k}(X \longrightarrow S)$ if and only if, for any $d \in CH^q(g : Z \longrightarrow X)$ with Z smooth, projective and connected, the class $d \cdot \alpha$ in $CH^{q-k}(Z \longrightarrow S) \cong CH_{k-q}(Z) \cong CH^{\dim(Z)-k+q}(Z)$ lies in $F^r_{\mathcal{M}} CH^{\dim(Z)-k+q}(Z)$. We now extend Saito's filtration by saying that $c \in F^r CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}) \subseteq CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow F)$ if $\mathrm{Im}(c^k_g|F^s CH_k(X)) \subseteq F^{s+r} CH_{k-p}(Y)$ for any $s \geqslant 0$, with X, $Y \in Sch_{\mathbb{C}}$ as in (0.1). In particular, this extends Saito's filtration to the operational Chow group $CH^p(1 : h_X \longrightarrow h_X)$ of an arbitrary variety X and more generally to the bivariant Chow groups of any morphism $f : Y \longrightarrow X$ in $Sch_{\mathbb{C}}$. If Z is a smooth, projective and connected scheme over $\mathbb{C}$, we show that the filtration induced on $CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z) \cong CH^p(Z)$ recovers the original filtration of Saito. Further, as with Saito's filtration, the filtration $\{F^r CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})\}_{r\geqslant 0}$ is compatible with pullbacks and products. Our main motivation for considering this bivariant theory is that it enables us to define Chow groups equipped with filtrations for more general "spaces", such as a simplicial scheme, an algebraic space or the quotient of a scheme with respect to the action of a flat group scheme of finite type.

In the second part of the paper, our aim is to construct higher Chow groups for presheaves along with filtrations analogous to that of Saito [10]. In [1, Section 5], we have constructed higher bivariant Chow groups for morphisms $f : Y \longrightarrow X$ in $SmProj_{\mathbb{C}}$. We extend these methods to define higher Chow groups $CH^p(\mathcal{F}, m)$, p, $m \geqslant 0$ for a presheaf $\mathcal{F}$ on $SmProj_{\mathbb{C}}$. We mention here that due to certain technical aspects of the construction of "higher refined Gysin morphisms" in [1, Section 5], in this latter section, we must limit ourselves to presheaves on $SmProj_{\mathbb{C}}$ (instead of presheaves on $Sch_{\mathbb{C}}$). We start by constructing a filtration $\{F^r CH^p(X, m)\}_{r\geqslant 0}$ on the higher Chow groups $CH^p(X, m)$ for any $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$ that is identical to Saito's filtration when $m = 0$. For any $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, we let h^{res}_X denote the restriction of h_X to $SmProj_{\mathbb{C}}$. Then, given a presheaf $\mathcal{F}$ on $SmProj_{\mathbb{C}}$, a class $c \in CH^p(\mathcal{F}, m)$ gives us a collection of morphisms:

$$\big(c(n)\big)^k_g : CH^k(X, n) \longrightarrow CH^{k+p}(X, m+n) \quad \forall g : h^{\mathrm{res}}_X \longrightarrow \mathcal{F},\ X \in SmProj_{\mathbb{C}},\ k \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0 \tag{0.2}$$

that is well behaved with respect to flat pullbacks, proper pushforwards, and higher refined Gysin morphisms in $SmProj_{\mathbb{C}}$. We define the filtration $\{F^r CH^p(\mathcal{F}, m)\}_{r\geqslant 0}$ by saying that $c \in F^r CH^p(\mathcal{F}, m)$ if and only if $\mathrm{Im}((c(n))^k_g|F^s CH^k(X, n)) \subseteq F^{r+s} CH^{k+p}(X, m+n)$, $\forall s \geqslant 0$ in the situation of (0.2). In particular, when $\mathcal{F} = h^{\mathrm{res}}_X$ for some $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, we show that there is a filtered isomorphism between the higher Chow group $CH^p(X, m)$ and the group $CH^p(h^{\mathrm{res}}_X, m)$.

1. Introduction

Soit $Sch_{\mathbb{C}}$ la catégorie de schémas sur $\mathbb{C}$. Alors, nous avons défini dans [2] les groupes de Chow $CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})$, $\forall p \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme représentable $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$. Rappelons que, en direction des conjectures de Bloch et Beilinson, les définitions de Saito [10] nous fournissent une filtration $\{F^r_{\mathcal{M}} CH^p(Z)\}_{r\geqslant 0}$ sur les groupes de Chow d'un schéma lisse et projectif Z. Dans cette note, nous introduisons une filtration $\{F^r CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})\}_{r\geqslant 0}$ sur les groupes de Chow d'un morphisme représentable de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$, qui est analogue à celle de Saito [10]. En particulier, on peut munir les groupes de Chow d'un schéma lisse (mais pas nécessairement projectif) d'une filtration analogue à celle de Saito en posant $f = 1 : h_X \longrightarrow h_X$, où h_X est le préfaisceau représentable correspondant à un schéma lisse X sur $\mathbb{C}$. Quand $Z \in Sch_{\mathbb{C}}$ est un schéma lisse, projectif et connexe, nous montrons qu'on dispose d'un isomorphisme $CH^p(Z) \cong CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$ respectant les filtrations $\{F^r_{\mathcal{M}} CH^p(Z)\}_{r\geqslant 0}$ et $\{F^r CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)\}_{r\geqslant 0}$. Nos constructions reposent sur les techniques dans la théorie bivariante définie par Fulton et MacPherson [7]. En particulier, nous parvenons à définir les groupes de Chow munis d'une filtration pour les schémas simpliciaux, les espaces algébriques et les champs quotients.

Dans la deuxième partie de cet article, nous définissons les groupes de Chow supérieurs $CH^p(\mathcal{F}, m)$, $p \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$ d'un préfaisceau $\mathcal{F}$. Pour quelques raisons techniques, nous nous limitons aux préfaisceaux sur $SmProj_{\mathbb{C}}$, la catégorie de schémas lisses et projectifs sur $\mathbb{C}$ (voir Section 3). Cela étend la théorie de [1], dans laquelle nous avons introduit les groupes de Chow supérieurs d'un morphisme dans $SmProj_{\mathbb{C}}$. De plus, nous introduisons une filtration $\{F^r CH^p(\mathcal{F}, m)\}_{r\geqslant 0}$ sur les groupes de Chow supérieurs d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $SmProj_{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, pour un schéma $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, nous obtenons une filtration $\{F^r CH^p(X, m)\}_{r\geqslant 0}$ sur ses groupes de Chow supérieurs en étendant les définitions de Saito [10]. Enfin, nous montrons que, pour $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, on dispose d'un isomorphisme $CH^p(X, m) \cong CH^p(h^{\mathrm{res}}_X, m)$ respectant ces filtrations, où h^{res}_X est la restriction du préfaisceau h_X à la catégorie $SmProj_{\mathbb{C}}$.

2. Filtrations sur les groupes de Chow d'un morphisme

Posons $S := Spec(\mathbb{C})$. Pour un schéma $Z \in Sch_{\mathbb{C}}$ lisse et projectif, soit $\{F^r_{\mathcal{M}} CH^p(Z)\}_{r\geqslant 0}$ la filtration sur ses groupes de Chow définie par Saito [10]. Étant donné un morphisme $f : Y \longrightarrow X$ de schémas sur $\mathbb{C}$, notons par $CH^p(f : X \longrightarrow Y)$, $p \in \mathbb{Z}$ ses groupes de Chow bivariants comme définis par Fulton et MacPherson [7]. Rappelons que, pour chaque schéma $X \in Sch_{\mathbb{C}}$, on dispose des isomorphismes $I^k_X : CH_k(X) \xrightarrow{\cong} CH^{-k}(X \longrightarrow S)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (voir [8, Proposition 17.3.1]). Nous commençons en introduisant une filtration $\{F^r CH_k(X)\}_{r\geqslant 0}$ sur $CH_k(X)$ comme suit : pour $r \geqslant 0$ et $\alpha \in CH_k(X)$, on dit que $\alpha \in F^r CH_k(X)$ si et seulement si la classe $I^k_X(\alpha) \in CH^{-k}(X \longrightarrow S) \cong CH_k(X)$ correspondant à α est telle que

$$\big(d \cdot I^k_X(\alpha)\big) \in F^r_{\mathcal{M}} CH^{\dim(Z)-k+q}(Z) \subseteq CH^{\dim(Z)-k+q}(Z) \cong CH_{k-q}(Z) \cong CH^{q-k}(Z \longrightarrow S) \tag{2.1}$$

pour toutes les classes $d \in CH^q(g : Z \longrightarrow X)$, $q \in \mathbb{Z}$, où Z est un schéma lisse, projectif et connexe. Pour chaque schéma $X \in Sch_{\mathbb{C}}$, soit h_X le préfaisceau représentable correspondant à X. Alors, un morphisme $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$ est dit « représentable » si, pour chaque morphisme $h_X \longrightarrow \mathcal{F}$ avec $X \in Sch_{\mathbb{C}}$, le produit fibré $h_X \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ est un préfaisceau représentable (voir, par exemple, [5, Definition 2.1.9]).

Soit $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme représentable de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$ et soit p un nombre entier. Alors, (voir [2, Definition 2.2]), une classe $c \in CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})$ nous donne une famille de morphismes :

$$c_g^k : CH_k(X) \longrightarrow CH_{k-p}(Y) \quad \forall g : h_X \longrightarrow \mathcal{F},\ X \in Sch_{\mathbb{C}},\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

où $Y \in Sch_{\mathbb{C}}$ est un schéma tel que $h_Y = h_X \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$. De plus, les morphismes c_g^k sont fonctoriels par rapport aux morphismes propres, morphismes plats et immersions régulières.

Définition 2.1. Soit $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme représentable de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$ et soit p un nombre entier. Alors, pour chaque $r \geqslant 0$, on dit qu'une classe $c \in CH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})$ est contenue dans $F^rCH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})$ si elle vérifie :

$$\operatorname{Im}\bigl(c_g^k | F^sCH_k(X)\bigr) \subseteq F^{r+s}CH_{k-p}(Y) \quad \forall s \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z},\ g : h_X \longrightarrow \mathcal{F},\ X \in Sch_{\mathbb{C}} \tag{2.3}$$

où $Y \in Sch_{\mathbb{C}}$ est un schéma tel que $h_Y = h_X \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$.

Par suite, on a une filtration $\{F^rCH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F})\}_{r \geqslant 0}$ sur les groupes de Chow d'un morphisme représentable de préfaisceaux. Nous notons que, pour un schéma $X \in Sch_{\mathbb{C}}$, il résulte de (2.2) que les groupes $CH^p(1 : h_X \longrightarrow h_X)$ sont les mêmes que les groupes de Chow opérationnels $CH^p_{op}(X)$ de X définis par Fulton [8, Definition 17.3]. Donc, pour chaque schéma $X \in Sch_{\mathbb{C}}$ (pas nécessairement lisse ou projectif), nous avons obtenu une extension de la filtration de Saito aux groupes de Chow opérationnels :

$$CH^p_{\mathrm{op}}(X) = CH^p(1 : h_X \longrightarrow h_X) = F^0CH^p(1 : h_X \longrightarrow h_X) \supseteq F^1CH^p(1 : h_X \longrightarrow h_X) \supseteq \cdots \tag{2.4}$$

En particulier, quand Y est un schéma lisse, on sait que $CH^p_{\mathrm{op}}(Y) \cong CH^p(Y)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, et donc on dispose d'une extension de la filtration de Saito sur les groupes de Chow d'un schéma lisse (mais pas nécessairement projectif). Grâce à la Définition 2.1, on peut vérifier les résultats suivants :

Proposition 2.2. *(a) Soit $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme représentable de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$. Étant donné un morphisme $h : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ de préfaisceaux, soit $f' : \mathcal{G}' := \mathcal{G} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'$ le changement de base. Alors, on a des morphismes induits $h^* : F^rCH^p(f : \mathcal{G} \longrightarrow F) \longrightarrow F^rCH^p(f' : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{F}')$, $\forall r \geqslant 0$, $p \in \mathbb{Z}$.*

(b) Soient $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$, $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes représentables de préfaisceaux sur $Sch_{\mathbb{C}}$. Alors, on a un produit $F^rCH^p(g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}) \otimes F^sCH^q(f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}) \longrightarrow F^{r+s}CH^{p+q}(f \circ g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F})$, $\forall r, s \geqslant 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Pour $Z \in Sch_{\mathbb{C}}$ un schéma lisse, projectif et connexe et $\alpha \in CH^p(Z)$, on a une classe $R(\alpha) \in CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$ définissant un isomorphisme (voir [8, § 17])

$$R : CH^p(Z) \xrightarrow{\cong} CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)\bigl(R(\alpha)\bigr)_g^k(\beta) := g^*(\alpha) \cdot \beta \quad \forall g : W \longrightarrow Z,\ W \in Sch_{\mathbb{C}},\ \beta \in CH_k(W) \tag{2.5}$$

Par ailleurs, étant donnée $c \in CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$, l'association $c \mapsto c_1^{\dim(Z)}([Z]) \in CH_{\dim(Z)-p}(Z) \cong CH^p(Z)$ est l'inverse de l'isomorphisme dans (2.5). Le but principal de cette section est de montrer que l'isomorphisme dans (2.5) est un isomorphisme filtré.

Proposition 2.3. *Soit $Z \in Sch_{\mathbb{C}}$ un schéma lisse, projectif et connexe. Alors, pour $p \geqslant 0$, l'isomorphisme $R : CH^p(Z) \cong CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$ dans (2.5) induit des isomorphismes $F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Z) \cong F^rCH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$, $\forall r \geqslant 0$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in CH^p(Z) \cong CH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$ un cycle tel que $\alpha \in F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Z)$. On va montrer que $R(\alpha) \in F^rCH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$. Choisissons un morphisme $g : X \longrightarrow Z$ dans $Sch_{\mathbb{C}}$. Nous affirmons que, pour chaque morphisme $h : Y \longrightarrow X$ avec Y lisse, projectif et connexe et pour chaque $d \in CH^q(h : Y \longrightarrow X)$, on a :

$$d \cdot g^*(\alpha) = (g \circ h)^*(\alpha) \cdot d \in CH^{p+q}(h : Y \longrightarrow X) \tag{2.6}$$

Pour le voir, choisissons un morphisme $g_1 : W \longrightarrow X$ et soit $\gamma = [V] \in CH_k(W)$ un cycle correspondant à un sous-schéma $i : V \hookrightarrow W$. Il faut montrer que $(d \cdot g^*(\alpha))([V]) = ((g \circ h)^*(\alpha) \cdot d)([V])$. Notons que, pour une classe $e \in CH^{p+q}(h : Y \longrightarrow X)$, on a :

$$e(\gamma) = e\bigl(i_*[V]\bigr) = i'_*e\bigl([V]\bigr) \in CH_*(W \times_X Y) \tag{2.7}$$

où $i' : V \times_X Y \hookrightarrow W \times_X Y$ est l'inclusion induite par $i : V \hookrightarrow W$. Donc, il suffit d'étudier le cas où $V = W$. De plus, sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha = [U] \in CH^p(Z)$ pour un sous-schéma $j : U \hookrightarrow Z$. Considérons les carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U_T & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{g_1'} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\ U_W & \xrightarrow{j_W} & W & \xrightarrow{g_1} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U_W & \xrightarrow{j_W} & W \\ \downarrow & & \downarrow g\circ g_1 \\ U & \xrightarrow{j} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U_T & \xrightarrow{j_T} & T \\ \downarrow & & \downarrow g\circ h\circ g_1' \\ U & \xrightarrow{j} & Z \end{array} \tag{2.8}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \big(d \cdot g^*(\alpha)\big)\big([W]\big) &= d\big(j_{W*}[U_W]\big) = j_{T*}\big(d\big([U_W]\big)\big) = j_{T*}\big([U_T] \cdot d\big([U_W]\big)\big) = j_{T*}\big([U_T] \cdot d\big(j_W^*[W]\big)\big) \\ &= j_{T*}\big([U_T] \cdot j_T^*\big(d\big([W]\big)\big)\big) = j_{T*}\big([U_T]\big) \cdot d\big([W]\big) = \big((g \circ h)^*(\alpha) \cdot d\big)\big([W]\big) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ceci montre (2.6). Pour $s \geqslant 0$, soit $\beta \in F^sCH_k(X) \subseteq CH_k(X) \cong CH^{-k}(X \longrightarrow S)$. Par définition, $(R(\alpha))(\beta) := g^*(\alpha) \cdot \beta \in CH^{p-k}(X \longrightarrow S)$. Alors, pour chaque $d \in CH^q(h : Y \longrightarrow X)$ avec Y lisse, projectif et connexe, on a :

$$d \cdot \big(\big(R(\alpha)\big)(\beta)\big) = d \cdot g^*(\alpha) \cdot \beta = (g \circ h)^*(\alpha) \cdot d \cdot \beta \in CH^{p+q-k}(Y \longrightarrow S) \tag{2.10}$$

Puisque $\beta \in F^sCH_k(X)$, il résulte de (2.1) que $d \cdot \beta \in F^s_{\mathcal{M}}CH^{\dim(Y)-k+q}(Y)$. De plus, puisque $\alpha \in F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Z)$ et la filtration de Saito est fonctorielle, on a $(g \circ h)^*(\alpha) \in F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Y)$. Il s'ensuit que

$$d \cdot \big(\big(R(\alpha)\big)(\beta)\big) = \big((g \circ h)^*(\alpha)\big) \cdot (d \cdot \beta) \in F^{r+s}_{\mathcal{M}}CH^{\dim(Y)+p+q-k}(Y) \tag{2.11}$$

et donc $(R(\alpha))(\beta) \in F^{r+s}CH_{k-p}(X)$. Il résulte que $R(\alpha) \in F^rCH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$.

Inversement, soit $\alpha \in CH^p(Z)$ une classe telle que $R(\alpha) \in F^rCH^p(1 : h_Z \longrightarrow h_Z)$. Puisque $[Z] \in F^0CH_{\dim(Z)}(Z)$, il s'ensuit que $R(\alpha)([Z]) \in F^rCH_{\dim(Z)-p}(Z)$. Alors, $\alpha = R(\alpha)([Z]) \in F^rCH_{\dim(Z)-p}(Z) = F^r_{\mathcal{M}}CH^p(Z)$. $\square$

Exemples. (a) Soit $\Delta^{\mathrm{op}}Sch_{\mathbb{C}}$ la catégorie de schémas simpliciaux et soit $X_\bullet \in \Delta^{\mathrm{op}}Sch_{\mathbb{C}}$. On peut définir un préfaisceau $H_{X_\bullet}$ sur $Sch_{\mathbb{C}}$ en posant $H_{X_\bullet}(Y) := Mor_{\Delta^{\mathrm{op}}Sch_{\mathbb{C}}}(Y, X_\bullet)$, où $Y \in Sch_{\mathbb{C}}$ est considéré comme un schéma simplicial constant. Alors, la théorie ci-dessus nous donne les groupes de Chow $CH^p(X_\bullet) := CH^p(1 : H_{X_\bullet} \longrightarrow H_{X_\bullet})$ pour les schémas simpliciaux ainsi que les filtrations sur ces groupes.

(b) Soit $\mathcal{F}$ un espace algébrique sur $\mathbb{C}$ (voir, par exemple, [9] pour les définitions). Donc, $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $Sch_{\mathbb{C}}$. Alors, la Définition 2.1 nous permet de définir les groupes de Chow d'un espace algébrique munis des filtrations qui sont des extensions de la filtration de Saito.

(c) Soit G un schéma en groupes plat de type fini agissant sur un schéma $X \in Sch_{\mathbb{C}}$ et soit $[X/G]$ le champ quotient associé à cette action (voir, par exemple, [6, Example 2.2]). Alors, $[X/G]$ étant un faisceau sur $Sch_{\mathbb{C}}$, la théorie ci-dessus nous donne les groupes de Chow $CH^p(X/G)$ ainsi que des filtrations sur ces groupes.

3. Filtrations sur les groupes de Chow supérieurs

Dans cette section, nous allons définir les groupes de Chow supérieurs de préfaisceaux. De plus, nous montrons que ces groupes sont munis d'une filtration analogue à celle de Saito [10]. Pour quelques raisons techniques sur la fonctorialité, nous nous limitons aux préfaisceaux sur $SmProj_{\mathbb{C}}$, la catégorie de schémas lisses et projectifs sur $\mathbb{C}$. Pour en savoir plus sur les définitions et fonctorialité de groupes de Chow supérieurs $CH^p(X, m)$, $\forall p, m \geqslant 0$ d'un schéma X sur $\mathbb{C}$, voir Bloch [3,4]. Nous commençons en posant la définition suivante, qui est analogue à [10, Definition (2.10)].

Définition 3.1. Soit $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$. Pour $p, m \geqslant 0$, on définit une filtration $\{F^rCH^p(X, m)\}_{r \geqslant 0}$ sur $CH^p(X, m)$ comme suit. (1) Posons $F^0CH^p(X, m) := CH^p(X, m)$ $\forall p, m \geqslant 0$. (2) D'une manière inductive, pour chaque $r \geqslant 0$, nous posons :

$$F^{r+1}CH^p(X, m) := \sum_{V,q,\Gamma} \mathrm{Im}\big(\Gamma_* : F^rCH^{p+d_V-q}(V, m) \longrightarrow CH^p(X, m)\big) \tag{3.1}$$

où la somme est prise sur tous les triplets (V, q, Γ) tels que (a) $V \in SmProj_{\mathbb{C}}$ est un schéma de dimension d_V, (b) q est un nombre entier tel que $p \leqslant q \leqslant p + d_V$ et (c) $\Gamma \subseteq V \times X$ est un cycle de codimension q tel que la $(2q - 2p + r, 2p - r)$-composante de Künneth γ^{2p-r} de sa classe de cohomologie $\gamma \in H^{2q}(V \times X)$ satisfasse :

$$\gamma^{2p-r} \in H^{2q-2p+r}(V) \otimes N^{p-r+1}H^{2p-r}(X) \tag{3.2}$$

Ici, $\{N^*H^{2p-r}(X)\}$ est la filtration par coniveau sur $H^{2p-r}(X)$.

Soit $i' : Y' \longrightarrow X'$ une immersion régulière dans $SmProj_{\mathbb{C}}$ de codimension $d' = \dim(X') - \dim(Y')$ et soit $i : Y \longrightarrow X$ un morphisme dans $SmProj_{\mathbb{C}}$ tel qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ i\ } & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y' & \xrightarrow{\ i'\ } & X' \end{array} \tag{3.3}$$

Posons $d = \dim(X) - \dim(Y)$. Alors, dans [1, Lemme 5.1], nous avons défini les morphismes de Gysin raffinés $i'^{!}_{m} : CH^k(X,m) \longrightarrow CH^{k+d'-d}(Y,m)$ pour $m \geqslant 0$. Quand $m = 0$, ces sont les mêmes que les morphismes de Gysin raffinés habituels. De plus, dans [1], nous avons défini (voir [1, Definition 5.3]) les groupes de Chow supérieurs $CH^p(f : X \longrightarrow Y, m)$, $p \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$ des morphismes dans $SmProj_{\mathbb{C}}$ tels que $CH^p(1 : X \longrightarrow X, m) \cong CH^p(X,m)$ $\forall m \geqslant 0$ (voir [1, Proposition 5.6]). Pour $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, nous notons par h_X^{res} la restriction du préfaisceau représentable h_X à la catégorie $SmProj_{\mathbb{C}}$. Nous pouvons maintenant définir les groupes de Chow supérieurs des préfaisceaux et leurs filtrations.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $SmProj_{\mathbb{C}}$. Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $m \geqslant 0$, une classe $c \in CH^p(\mathcal{F}, m)$ est donnée par une famille de morphismes ($\forall k \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$)

$$\big(c(n)\big)^k_g : CH^k(X,n) \longrightarrow CH^{k+p}(X, n+m) \quad \forall g : h_X^{\mathrm{res}} \longrightarrow \mathcal{F},\ X \in SmProj_{\mathbb{C}} \tag{3.4}$$

telle que les morphismes $(c(n))_g : CH^*(X,n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} CH^k(X,n) \longrightarrow CH^*(X,n+m) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} CH^{k+p}(X,n+m)$ vérifient les conditions suivantes :

(a) si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme propre (resp. un morphisme plat) dans $SmProj_{\mathbb{C}}$, on a $(c(n))_g(f_*(\alpha)) = f_*((c(n))_{g\circ f}(\alpha))$ (resp. $f^*((c(n))_g(\alpha)) = (c(n))_{g\circ f}(f^*(\alpha)))$ pour $\alpha \in CH^*(Y,n)$ (resp. $\alpha \in CH^*(X,n)$);
(b) pour un carré cartésien comme dans (3.3), on a $(c(n))_{g\circ i}(i'^{!}_{n}(\alpha)) = i'^{!}_{m+n}((c(n))_g(\alpha))$, $\forall \alpha \in CH^*(X,n)$.

Pour $r \geqslant 0$, nous construisons une filtration sur $\{F^r CH^p(\mathcal{F},m)\}_{r\geqslant 0}$ comme suit : nous disons qu'une classe $c \in F^r CH^p(\mathcal{F},m) \subseteq CH^p(\mathcal{F},m)$ si, pour chaque morphisme $g : h_X^{\mathrm{res}} \longrightarrow \mathcal{F}$ avec $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$, on a $\mathrm{Im}((c(n))^k_g | F^s CH^k(X,n)) \subseteq F^{r+s} CH^{k+p}(X, n+m)$ $\forall s \geqslant 0$.

Alors, il résulte de la Définition 3.2 que les groupes de Chow supérieurs sont munis d'un produit $CH^p(\mathcal{F},m) \otimes CH^q(\mathcal{F},n) \longrightarrow CH^{p+q}(\mathcal{F}, m+n)$, $\forall p,q \in \mathbb{Z}$, $m,n > 0$. De plus, si $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme de préfaisceaux sur $SmProj_{\mathbb{C}}$, nous avons les morphismes induits $f^* : CH^p(\mathcal{F},m) \longrightarrow CH^p(\mathcal{G},m)$. Enfin, nous montrons que, pour $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$ et $m \geqslant 0$, on a un isomorphisme filtré entre $CH^p(X,m)$ et $CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$.

Proposition 3.3. *Soit $X \in SmProj_{\mathbb{C}}$ un schéma lisse et projectif. Pour $m, p \geqslant 0$, soit $\{F^r CH^p(X,m)\}_{r\geqslant 0}$ la filtration sur $CH^p(X,m)$ définie comme dans 3.1 et soit $\{F^r CH^p(h_X^{\mathrm{res}})\}_{r\geqslant 0}$ la filtration sur $CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$ définie comme dans 3.2. Alors, on a un isomorphisme $CH^p(X,m) \cong CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$ respectant ces filtrations.*

Démonstration. Pour $\alpha \in CH^p(X,m)$, on a une classe $R(\alpha) \in CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$ définie comme ($\forall k \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$) :

$$\big(R(\alpha)(n)\big)^k_g : CH^k(Z,n) \longrightarrow CH^{k+p}(Z, n+m) \quad \big(R(\alpha)(n)\big)^k_g(\beta) := g^*(\alpha)\cdot\beta \tag{3.5}$$

où $g : Z \longrightarrow X$ est un morphisme dans $SmProj_{\mathbb{C}}$ et $\beta \in CH^k(Z,n)$. Par ailleurs, étant donnée une classe $c \in CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$, on a un cycle $T(c) \in CH^p(X,m)$ défini comme $T(c) := (c(0))^0_1([X]) \in CH^p(X,m)$. Alors, il résulte de [1, Proposition 5.6] que les morphismes $R : CH^p(X,m) \longrightarrow CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$ et $T : CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m) \longrightarrow CH^p(X,m)$ sont inverses l'un de l'autre et on a un isomorphisme $CH^p(X,m) \cong CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$.

Quand $m = 0$, la filtration $\{F^r CH^p(X,0)\}_{r\geqslant 0}$ dans 3.1 est la même que celle de Saito sur $CH^p(X) = CH^p(X,0)$. D'après [10], on sait qu'elle est fonctorielle et satisfait $F^r \cdot F^s \subseteq F^{r+s}$. De manière analogue, on vérifie ce résultat pour la filtration $\{F^r CH^p(X,m)\}_{r\geqslant 0}$ définie dans 3.1. Soit alors $\alpha \in F^r CH^p(X,m)$ un cycle. Si $g : Z \longrightarrow X$ est un morphisme dans $SmProj_{\mathbb{C}}$, il s'ensuit que $g^*(\alpha) \in F^r CH^p(Z,m)$. Alors, pour $k \in \mathbb{Z}$, s, $n \geqslant 0$, et chaque $\beta \in F^s CH^k(Z,n)$, on a :

$$\big(R(\alpha)(n)\big)^k_g(\beta) = g^*(\alpha)\cdot\beta \in F^{r+s} CH^{k+p}(Z, n+m) \tag{3.6}$$

et donc $\mathrm{Im}((R(\alpha)(n))^k_g | F^s CH^k(Z,n)) \subseteq F^{r+s} CH^{k+p}(Z, n+m)$. Alors, on voit que $R(\alpha) \in F^r CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$.

Par ailleurs, soit $c \in F^r CH^p(h_X^{\mathrm{res}}, m)$. Puisque $[X] \in F^0 CH^0(X,0)$, on a $T(c) = (c(0))^0_1([X]) \in F^r CH^p(X,m)$. $\square$

Références

[1] A. Banerjee, Higher bivariant Chow groups and motivic filtrations, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (11) (2011) 5943–5969.
[2] A. Banerjee, Bivariant Chow groups and the topology of envelopes, Topol. Appl. 160 (1) (2013) 230–240.
[3] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. Math. 61 (3) (1986) 267–304.
[4] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, J. Algebr. Geom. 3 (3) (1994) 537–568.
[5] A. Canonaco, Introduction to algebraic stacks, preprint, 2004.
[6] D. Edidin, Notes on the construction of the moduli spaces of curves, in: Recent Progress Intersection Theory, Bologna, 1997, in: Trends Math., Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2000, pp. 85–113.
[7] W. Fulton, R. MacPherson, Categorical framework for the study of singular spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 31 (1981), No. 243.
[8] W. Fulton, Intersection Theory, second edition, Ergeb. Math. Ihrer Grenzgeb., vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[9] D. Knutson, Algebraic Spaces, Lect. Notes Math., vol. 203, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1971.
[10] S. Saito, Motives and filtrations on Chow groups, Invent. Math. 125 (1) (1996) 149–196.