C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 143–145

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie analytique

Une définition d'espace de modules locaux de structures CR

A definition of a local moduli space of CR structures

Laurent Meersseman

LAREMA, 2 boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 avril 2013
Accepté le 4 décembre 2013
Disponible sur Internet le 6 janvier 2014

Présenté par Jean-Pierre Ramis

RÉSUMÉ

Dans cette note, nous proposons une définition d'espace de modules locaux dans un cadre général qui englobe celui des structures CR sur une variété différentiable fixée. Nous montrons qu'elle coïncide avec celle d'espace versel pour les structures complexes. Enfin, nous la testons sur les espaces construits dans [5] et [6].

ABSTRACT

In this note, we propose a definition of local moduli space in a general framework including the case of CR structures on a fixed differentiable manifold. We show that it is the same as the notion of versal deformation space for complex structures. Finally, we test this definition on the spaces constructed in [5] and [6].

1. Introduction

Le théorème de Kuranishi [3] montre l'existence, pour toute variété compacte complexe X_0, d'un espace de déformations de dimension finie K_0 qui soit versel au sens de Kodaira–Spencer [2]. Cet espace de Kuranishi est la meilleure approximation possible d'un espace de modules locaux *en restant dans la catégorie des espaces analytiques*. Concrètement, K_0 est construit comme une section locale en X_0 de l'action du groupe des difféomorphismes sur l'espace analytique banachique des structures complexes sur la variété C^∞ sous-jacente à X_0. La condition de versalité équivaut à la minimalité de la dimension de K_0 au point X_0 (en tant que section locale).

Il est naturel d'essayer de généraliser ce résultat aux structures CR, en particulier à celles associées à des structures géométriques (cf. [5] et [6] où de telles généralisations sont obtenues).

Toutefois, on se trouve alors confronté à un double problème. D'une part, la théorie de Kodaira–Spencer passe mal ; d'autre part, il n'existe pratiquement jamais de section locale de dimension finie. Dans ces conditions, on ne peut plus parler de versalité et il devient crucial de trouver en remplacement une bonne notion de minimalité d'une section locale, sans rapport, ni avec la théorie de Kodaira–Spencer, ni avec la dimension.

Dans cette note, nous proposons une définition d'espace de modules locaux dans un cadre général qui englobe celui des structures CR. Cette définition, complètement géométrique, est très faible. Mais nous montrons qu'elle coïncide avec celle d'espace versel dans le cas des structures complexes. Enfin, nous la testons sur les espaces construits dans [5] et [6].

Adresse e-mail : laurent.meersseman@univ-angers.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.12.010

2. Cadre général

Soit X une variété C^∞ compacte connexe. On s'intéresse à un certain type de structures sur X. Nous appellerons ces structures S, sans chercher à les définir (cf. les exemples ci-dessous). L'important est que l'ensemble des structures S sur X de classe de régularité C donnée forme une variété banachique $\mathcal{E}$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On supposera ensuite qu'il existe un sous-espace analytique banachique $\mathcal{I}$ de $\mathcal{E}$ de structures S dites intégrables. On supposera enfin qu'un groupe G, qui possède en plus une structure de variété banachique (mais pas forcément de structure de groupe de Lie banachique), agit analytiquement sur $\mathcal{E}$ en préservant $\mathcal{I}$.

Exemple 1. On prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble des structures presque complexes sur X et pour $\mathcal{I}$ le sous-ensemble des structures complexes. La régularité C est typiquement une classe Sobolev L^2_l, pour l assez grand, mais on peut aussi travailler en classes Hölder. Enfin, G est le groupe des difféomorphismes de classe L^2_{l+1} de X.

Exemple 2. On prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble des structures presque CR de classe L^2_l le long des fibres d'une submersion propre $\pi : X \to \mathbb{S}^1$ et pour $\mathcal{I}$ le sous-espace des structures CR (cf. [5]). Quant à G, il s'agit du groupe des difféomorphismes de classe L^2_{l+1} de X qui préservent π et induisent l'identité sur le cercle.

Exemple 3. On prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble des structures presque CR Levi-plates le long d'une distribution fixée E de X. On suppose que E possède une connexion invariante par holonomie, cf. [6], section 3.2. On prend pour $\mathcal{I}$ le sous-espace des structures polarisées au sens de [6]. On travaille toujours en classe L^2_l. Et G est un sous-groupe des difféomorphismes de classe L^2_{l+1} qui préservent le feuilletage et la polarisation (cf. [6], sections 3.2 et 3.9).

Nous nous focalisons dans cette note sur les espaces de structures CR, mais entrent également dans le cadre général les feuilletages C^∞ de codimension fixée ou certaines (G, X)-structures.

3. Section de modules locaux

On se fixe un type S de structures sur X qui vérifie les hypothèses du cadre général. On choisit une structure J_0 de $\mathcal{I}$ et on note X_0 la variété X munie de la structure J_0.

Définition 3.1. On dira que X_0 possède une section de modules locaux (sous-entendu pour les structures S de classe C) s'il existe :

(i) un sous-espace analytique $K \subset \mathcal{I}$ (éventuellement banachique) passant par J_0,
(ii) une rétraction analytique $\Xi : V \subset \mathcal{I} \to K$ définie au voisinage V de J_0 dans $\mathcal{I}$,

tels que :

A1. Deux structures J_1 et J_2 de V ayant même image par Ξ appartiennent à la même G-orbite.
A2. Il n'existe pas de chemin lisse $c : [0, 1] \to K$ partant de J_0, non constant, et dont l'image réciproque par Ξ soit incluse dans la G-orbite de J_0.

On parlera de section faible de modules locaux lorsque (i) est remplacée par (i′), un espace analytique K (éventuellement banachique) et une inclusion topologique $K \subset \mathcal{I}$ passant par J_0.

La propriété A1 est une propriété de complétude. Elle implique qu'un point de K correspond à une unique structure modulo action de G, et que chaque G-orbite passant par V est codée en au moins un point de K.

La propriété A2 est une propriété de minimalité. Elle indique que les répétitions de J_0 dans K (c'est-à-dire l'intersection de $V = \Xi^{-1}(K)$ avec la G-orbite de J_0) ne contiennent pas de courbe. Elle remplace la propriété de versalité de Kodaira–Spencer (cf. section 4).

4. Quelques exemples

On va reprendre les exemples de la section 2. Tout d'abord, montrons que la définition 3.1 généralise celle d'espace versel pour les structures complexes.

Proposition 4.1. *On se place sous les hypothèses de l'exemple 1. Soit X_0 une variété compacte complexe. Alors,*

(i) *X_0 possède toujours une section de modules locaux K de dimension finie ;*
(ii) *K est une section de modules locaux de X_0 si et seulement si le germe de K en J_0 est l'espace de Kuranishi de X_0.*

Preuve. Soit $\mathcal{K}$ l'espace de Kuranishi de X_0. La preuve du théorème de Kuranishi donnée dans [3] construit un représentant de $\mathcal{K}$ inclus dans $\mathcal{I}$ et muni d'une rétraction Ξ vérifiant la propriété A1. Par ailleurs, la propriété A2 découle du théorème de Fischer–Grauert, cf. [4], Lemma 5.

Réciproquement, un espace K satisfaisant la définition 3.1 est un espace complet au sens de Kodaira–Spencer. En effet, comme K est un sous-espace analytique de $\mathcal{I}$, il est recouvert d'une famille de variétés complexes, cf. [3]. De plus, il existe une application analytique du germe de K en J_0 vers $\mathcal{K}$. Appelons cette flèche f et soit $0 \in \mathcal{K}$ le point base. L'image réciproque de 0 ne peut contenir d'espace analytique réduit de dimension finie strictement positive, sinon K violerait la condition A2. Donc $f^{-1}(0)$ est J_0, éventuellement avec multiplicité. Ceci montre que K est de dimension finie. Mais également, par complétude de K et par [1], Satz 2.2, que les réductions de K et de $\mathcal{K}$ sont isomorphes, et que la multiplicité d'une composante de K est toujours supérieure ou égale à la multiplicité de la composante correspondante de $\mathcal{K}$. Enfin, le théorème de Kuranishi implique que V est le produit de $\mathcal{K}$ par un espace de Banach. Les seuls éléments nilpotents de l'anneau local de $\mathcal{I}$ en J_0 sont donc ceux induits par la rétraction sur $\mathcal{K}$. La rétraction sur K ne peut en engendrer d'autres. On a donc égalité des multiplicités et les deux germes d'espaces sont isomorphes. $\square$

On se place maintenant sous les hypothèses de l'exemple 2. Soit $\pi : X_0 \to \mathbb{S}^1$ une submersion CR propre sur le cercle. On construit dans [5], §III.3 un espace de déformations K^g de X_0 appelé espace de modules locaux de type Kuranishi. On renvoie également à [5], §IV, où les notions de déformations, complétude, (uni)versalité sont adaptées au cadre des submersions CR propres sur le cercle.

Remarque 1. L'espace K^g est défini dans [5] comme l'espace des applications C^∞ du cercle dans un espace analytique de dimension finie K_{c_0}. Il faut ici considérer l'espace des applications L_l^2 pour être en accord avec nos hypothèses.

Proposition 4.2. *Sous les hypothèses précédentes, il y a équivalence entre les affirmations suivantes.*

(i) *L'espace K^g est une section faible de modules locaux.*
(ii) *L'espace K^g est versel au sens de* [5], *section* IV.

Preuve. L'équivalence se déduit facilement de la construction de K^g et des résultats de [5]. L'existence d'une application Ξ vérifiant la propriété A1 découle du théorème 2. Le corollaire 3 implique l'existence d'une inclusion topologique de K^g dans $\mathcal{I}$. L'espace K_{c_0} (cf. remarque 1) résulte du recollement d'espaces de Kuranishi d'un nombre fini de fibres de π. Toutefois, afin que les dimensions coïncident, on remplace parfois l'espace de Kuranishi par son produit avec un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Ces facteurs vectoriels induisent des répétitions : une structure codée par un point est maintenant codée par tout un espace vectoriel. On en déduit facilement que la propriété A2 est équivalente à leur absence (cf. [4], Lemma 5). Mais le théorème 4 prouve que K^g est versel si et seulement si il n'y a pas de facteurs vectoriels. $\square$

Lorsque X_0 est un fibré CR non trivial sur le cercle, l'espace K^g n'est jamais versel (cf. la remarque suivant le théorème 4 dans [5]). Nous ne savons pas si cela donne un exemple de structure CR sans section faible de modules locaux.

On se place enfin sous les hypothèses de l'exemple 3. Nous ne savons pas si l'espace K_0^l de [6], section 3.8 est toujours une section de modules locaux. C'est toutefois le cas pour la classe importante d'exemples suivante.

Proposition 4.3. *Soit X_0 une suspension à base complexe. Alors l'espace K_0^l est une section de modules locaux.*

Preuve. L'espace K_0^l vérifie (i), (ii) et la propriété A1 par application du théorème 3.17 et du corollaire 3.19 de [6]. Appelons B la base de la suspension. Le théorème 3.26 de [6] montre que K_0^l s'identifie naturellement (en germe) à l'espace de Kuranishi de B. La propriété A2 est ainsi une conséquence de la proposition 4.1. $\square$

Remerciements

Cette note est issue du projet Marie Curie DEFFOL 271141. Je tiens à remercier le CRM pour son hospitalité ainsi que Marcel Nicolau pour de multiples et fructueuses discussions.

Références

[1] H. Grauert, H. Kerner, Deformationen von Singularitäten komplexer Raüme, Math. Ann. 153 (1964) 236–260.
[2] K. Kodaira, D.C. Spencer, On deformations of complex analytic structures I, Ann. Math. 67 (1958) 328–402.
[3] M. Kuranishi, Deformations of Compact Complex Manifolds, Les Presses de l'université de Montréal, Montréal, 1971.
[4] L. Meersseman, Foliated structure of the Kuranishi space and isomorphisms of deformation families of compact complex manifolds, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 44 (2011) 495–525.
[5] L. Meersseman, Kuranishi type moduli spaces for proper CR submersions fibering over the circle, preprint, arXiv:1210.1244, 2012.
[6] L. Meersseman, Variétés CR polarisées et G-polarisées, IMRN (2013), http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnt153.