C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 113–116

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Analyse fonctionnelle

Étude de certaines équations elliptiques à argument dévié

Study of some elliptic equations with deviated argument

Anouar Houmia [a,b]

[a] *King Khalid University, Abha, Faculty of sciences, department of mathematics, 61413, Saudi Arabia*
[b] *Université Paris-Dauphine, Ceremade, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 5 janvier 2013
Accepté après révision le 4 décembre 2013
Disponible sur Internet le 27 décembre 2013

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Les équations elliptiques à arguments déviés apparaissent dans certains modèles de population, en biologie, etc., comme il est indiqué dans les ouvrages [4] et [5] et dans les travaux de Levin [3] et de Skellam [6]. Nous établissons dans ce papier quelques résultats d'existence et d'unicité pour certaines équations elliptiques non-locales dites à argument dévié. Nous traitons d'abord des cas linéaires puis des cas non-linéaires. Nous espérons ainsi compléter certains résultats obtenus par Chipot et Mardare [2].

ABSTRACT

The elliptic equations with deviated arguments appear in some models of population such as in biology, etc. as indicated in the books [4] and [5] and the works of Levin [3], Skellam [6]. In this paper, we establish some results of existence and uniqueness for some non-local equations called elliptic equations with deviated argument. Firstly, we handle linear and nonlinear cases. Therefore, we hope to complete some results obtained by Chipot and Mardare [2].

1. Introduction

Étant donné Ω ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, nous nous intéressons ici à l' équation aux dérivées partielles à argument dévié [3–6] :

$$-\Delta u + f(u \circ \Phi) = g \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

où Φ est une *déviation*, c'est-à-dire une fonction $\Phi : \Omega \to \Omega$, où f est une non-linéarité donnée et g un terme source. À cause de la déviation, cette équation présente un caractère non local. De telles équations à argument dévié apparaissent dans certains modèles de population en biologie, comme l'ont souligné Chipot et Mardare [2], qui ont étudié en détail le cas $f(t) = t$ (voir aussi [1] pour l'étude d'équations non linéaires dans lesquelles ce sont les coefficients de la diffusion qui sont déviés). Avant d'aller plus loin, notons deux difficultés liées à la présence d'une déviation. La première est le caractère non variationnel de (1) : (1) n'est généralement pas une équation de point critique ; par exemple, les points critiques de $J : u \mapsto J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega F(u \circ \Phi) - \langle g, u\rangle$, avec $F' = f$, vérifient (au moins formellement) :

Adresse e-mail : anouar.houmia@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.11.021

$$-\Delta u + f(u)\mu_\Phi = g \tag{2}$$

où $\mu_\Phi := \Phi_\# \mathcal{L}^d$ désigne la mesure image de $\mathcal{L}^d$, la mesure de Lebesgue sur Ω par Φ. Ainsi, l'équation d'Euler–Lagrange (2) diffère de (1), même dans le cas très particulier où Φ préserve la mesure. Une seconde difficulté dans l'analyse de (1) réside dans le fait que le caractère non local de l'effet de la déviation rend difficile l'utilisation du principe du maximum. Pour les raisons précédemment évoquées, il nous semble difficile de faire une théorie générale et satisfaisante pour des équations de type (1), et nous nous contenterons dans ce papier de donner quelques cas où l'on peut établir l'existence et/ou l'unicité des solutions.

2. Résultats d'existence et d'unicité dans le cas linéaire

Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $g \in H^{-1}$ et $\Phi : \Omega \to \Omega$ mesurable, vérifiant que la mesure image $\mu_\Phi := \Phi_\# \mathcal{L}^d$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et que sa densité (encore notée μ_Φ) est L^∞ :

$$\mu_\Phi \in L^\infty, \quad \left|\Phi^{-1}(A)\right| = \int_A \mu_\Phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall A \subset \Omega \text{ mesurable.} \tag{3}$$

Intéressons nous tout d'abord, comme Chipot et Mardare [2], au cas de l'équation linéaire :

$$-\Delta u + u \circ \Phi = g \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{4}$$

dont on cherche une solution faible $u \in H_0^1$, c'est-à-dire $u \in H_0^1$ telle que $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega (u \circ \Phi) v = \langle g, v\rangle$, $\forall v \in H_0^1$. Une application immédiate du théorème de Lax–Milgram fournit :

Proposition 1. *Sous les hypothèses ci-dessus (en particulier l'hypothèse de régularité* (3) *sur Φ), et s'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que :*

$$(1-\alpha)\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega (v \circ \Phi) v \geqslant 0, \quad \forall v \in H_0^1 \tag{5}$$

alors l'équation (4) *possède une unique solution faible.*

Remarque. Une condition suffisante pour que (5) ait lieu est que $\lambda_1(\Omega) + \eta_\Phi > 0$ avec $\lambda_1(\Omega) := \inf\{\int_\Omega |\nabla v|^2\colon\ v \in H_0^1, \int_\Omega v^2 = 1\}$ la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet homogène sur Ω et $\eta_\Phi := \inf\{\int_\Omega (v \circ \Phi)v\colon \int_\Omega v^2 = 1\}$.

Remarque. La condition (5) est à comparer à une autre condition suffisante pour l'existence et l'unicité obtenue par Chipot et Mardare [2], que nous rappelons ici. Résoudre (4) revient à trouver un point fixe de l'opérateur $T : H_0^1 \to H_0^1$, qui à $v \in H_0^1$ associe u solution faible de $-\Delta u + u = v - v \circ \Phi + g$. Cette condition suffisante pour l'existence et l'unicité est donnée par :

$$4 > C^2 = \sup\left\{\|v - v \circ \Phi\|_{L^2}^2\colon\ v \in H_0^1, \|\nabla v\|_{L^2} \leqslant 1\right\} \tag{6}$$

de sorte que T est une contraction de H_0^1 (muni de $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2}$).

Notons que si (6) est satisfaite, alors il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $v \in H_0^1$, on ait $(1-\alpha)\int_\Omega |\nabla v|^2 \geqslant \frac{1}{4}\int_\Omega (v^2 + v^2 \circ \Phi - 2(v \circ \Phi)v)$ et donc $(1-\alpha)\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega (v \circ \Phi)v \geqslant \frac{1}{4}(\int_\Omega v^2 + v^2 \circ \Phi + 2(v \circ \Phi)v) = \frac{1}{4}\|v + v \circ \Phi\|_{L^2}^2$, de sorte que la condition (6) est plus forte que (5).

Remarque. Comme l'ont remarqué Chipot et Mardare [2], par compacité de $v \in L^2 \mapsto u \in L^2$ où $u \in H_0^1$ satisfait $\Delta u = v \circ \Phi$ (si par exemple (3) est satisfaite) en appliquant l'alternative de Fredholm, la question de la résolubilité de (4) pour tout g est étroitement liée à la dimension (finie) de l'ensemble des solutions de l'équation homogène correspondante. Si 0 est la seule solution de l'équation homogène, alors (4) est résoluble pour tout g. Cependant, en l'absence du principe du maximum, il paraît difficile d'identifier les déviations pour lesquelles l'équation homogène n'a que la solution triviale. En général, en notant k la dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène, (4) est résoluble si et seulement si g appartient à un espace de dimension k, c'est-à-dire vérifie k conditions linéairement indépendantes de compatibilité.

Nous nous proposons maintenant d'affaiblir l'hypothèse (3) qui demandait que la mesure image μ_Φ soit L^∞. Supposons toujours que μ_Φ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et supposons aussi, toujours en notant μ_Φ sa densité :

$$d \geqslant 3, \quad \mu_\Phi \in L^\beta, \quad \text{avec } \beta \geqslant \frac{d+2}{4} \tag{7}$$

alors on peut écrire $\beta = \frac{p}{p-p'} = \frac{p-1}{p-2}$ pour $p = \frac{2\beta-1}{\beta-1} \in]2, 2^*]$, $2^* := \frac{2d}{d-2}$.

Si $v \in L^p$, alors $v \in L^p \mapsto v \circ \Phi \in L^{p'}$ est continue et la forme bilinéaire $a_\Phi(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega (u \circ \Phi)v$, $\forall (u,v) \in (H_0^1)^2$ est aussi continue sur H_0^1. On en déduit également que si :

$$\lambda_{1,p} + \eta_{p,\Phi} > 0 \tag{8}$$

avec $\lambda_{1,p}(\Omega) := \inf\{\int_\Omega |\nabla v|^2\colon\ v \in H_0^1, \int_\Omega |v|^p = 1\}$ et $\eta_\Phi := \inf\{\int_\Omega (v \circ \Phi)v\colon\ \int_\Omega |v|^p = 1\}$, alors a_Φ est coercive sur H_0^1. Ainsi, en utilisant à nouveau le théorème de Lax–Milgram, nous en déduisons :

Proposition 2. *Si (7) et (8) sont satisfaites, alors l'équation (4) possède une unique solution faible.*

Les hypothèses assurant l'existence et l'unicité que nous avons vues jusqu'à présent ((5), (6) et (8)) sont satisfaites lorsque la déviation Φ est suffisamment régulière et proche de l'identité. S'il est effectivement intuitivement clair qu'on a existence et unicité pour (4) dans le cas où Φ est proche de l'identité, nous allons donner deux exemples qui suggèrent qu'il y a d'autres cas d'existence et d'unicité.

Considérons tout d'abord le cas un peu extrême d'une déviation constante où $\Phi(x) = x_0$ avec x_0 un point donné de Ω, $g = 0$ et cherchons une solution (classique) de :

$$-\Delta u + u(x_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{9}$$

Soit u une telle solution, si $u(x_0) = 0$, alors $u = 0$, et si $u(x_0) \neq 0$, on peut supposer que $u(x_0) = 1$, mais alors par le principe du maximum on devrait avoir $u \leqslant 0$ sur Ω, ce qui est absurde. Ainsi, la solution nulle est l'unique solution de (9).

Considérons maintenant sur l'espace entier l'équation :

$$\Delta u(x) = \lambda u(\varepsilon x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, \tag{10}$$

avec $\lambda > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$. On cherche ici une solution L^2 résolvant (10) au sens des distributions ; il est clair qu'une telle solution est en fait H^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc en particulier C^∞.

Proposition 3. *La seule solution L^2 de (10) est la solution nulle.*

3. Cas non linéaire

Nous nous intéressons maintenant au cas de l'équation non linéaire :

$$\Delta u = f(u \circ \Phi) + g \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{11}$$

où $g \in L^2$, $\Phi : \Omega \to \Omega$ est une application mesurable dont la mesure image est absolument continue avec une densité L^∞, c'est-à-dire que (3) a lieu et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et sous-linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $\alpha \in [0,1[$ tels que :

$$\bigl|f(t)\bigr| \leqslant M\bigl(1 + |t|^\alpha\bigr), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Proposition 4. *Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (11) possède au moins une solution faible.*

Preuve. Pour $v \in L^2$ notons $u := Tv$ la solution faible de

$$\Delta u = f(v \circ \Phi) + g, \quad u \in H_0^1. \tag{13}$$

Tout d'abord, on commence par vérifier que $v \circ \Phi \in L^2$ pour tout $v \in L^2$; en effet, grâce à l'inégalité de Hölder, on a $\|v \circ \Phi\|_{L^2} \leqslant \|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2} \|v\|_{L^2}$. Aussi, d'après l'inégalité de Young appliquée à (12), pour $\delta > 0$, il existe C_δ suffisament grand tel que :

$$\bigl|f(t)\bigr| \leqslant C_\delta + \delta|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Cette dernière inégalité montre que $f(w) \in L^2$ pour tout $w \in L^2$. On observe maintenant que, sous l'hypothèse de continuité de f et l'inégalité (14), le théorème de convergence dominée permet de dire que $v \in L^2 \mapsto f(v \circ \Phi) \in L^2$ est continue, de sorte que T est continue et, avec la compacité de l'injection de H_0^1 dans L^2, que l'image par T d'un borné de L^2 est relativement compacte.

En multipliant (13) par u, en utilisant (14) et en notant λ_1 la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet sur Ω, on a alors :

$$\lambda_1 \|u\|_{L^2}^2 \leqslant \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leqslant \|u\|_{L^2}\bigl(\|g\|_{L^2} + \|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2}\bigl(C_\delta + \delta\|v\|_{L^2}\bigr)\bigr). \tag{15}$$

Choisissons maintenant δ tel que $2\delta\|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2} \leqslant \lambda_1$ et $R \geqslant \frac{2}{\lambda_1}[\|g\|_{L^2} + C_\delta\|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2}]$. Il découle de (15) que T envoie la boule fermée B de L^2 de rayon R et de centre 0 dans elle-même. Comme $T(B)$ est relativement compacte, il découle du théorème du point fixe de Schauder que T possède un point fixe dans B, c'est-à-dire que (11) possède au moins une solution faible. □

Intéressons nous maintenant à la question de l'unicité de la solution de (11). Tout d'abord, il est clair que si f est lipschitzienne (auquel cas on n'a plus besoin de l'hypothèse de sous-linéarité (12)) et, en définissant T comme ci-dessus, alors les mêmes arguments que précédemment conduisent à $\|T(v_1) - T(v_2)\|_{L^2} \leqslant \frac{\mathrm{Lip}(f)\|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2}}{\lambda_1}\|v_1 - v_2\|_{L^2}$, de sorte que T est une contraction dès que la constante dans le membre de droite est strictement inférieure à 1 ; on obtient alors :

Proposition 5. *Si Φ satisfait l'hypothèse de régularité (3), f est lipschitzienne et si $\mathrm{Lip}(f)\|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2} < \lambda_1 := \inf\{\int_\Omega |\nabla v|^2\colon\ v \in H_0^1,\ \int_\Omega v^2 = 1\}$, alors l'équation (11) possède une unique solution faible.*

Un autre cas d'unicité peut être obtenu par monotonie. Supposons toujours que f est lipschitzienne, que (3) a lieu et aussi que f satisfait l'hypothèse de monotonie suivante :

$$\text{il existe } \alpha \geqslant 0 \text{ tel que} \quad \big(f(t) - f(s)\big)(t - s) \geqslant \alpha(t - s)^2, \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Toujours sous l'hypothèse (3), introduisons également la norme de l'opérateur $v \in L^2 \mapsto w - w \circ \Phi \in L^2$, i.e. la quantité $M_\Phi := \sup\{\|w - w \circ \Phi\|_{L^2}\colon\ \|w\|_{L^2} = 1\}$ ainsi que $m_\Phi := \inf\{\|w \circ \Phi\|_{L^2}^2\colon\ \|w\|_{L^2} = 1\} = \operatorname{essinf}\mu_\Phi$, alors on a le résultat d'unicité :

Proposition 6. *Supposons que Φ satisfait l'hypothèse de régularité (3), que f est lipschitzienne et satisfait (16). Si, de plus, on a $\lambda_1 + \alpha m_\Phi > \mathrm{Lip}(f)\|\mu_\Phi\|_{L^\infty}^{1/2} M_\Phi$ avec λ_1 définie comme dans la Proposition 5, alors l'équation (11) possède au plus une solution faible.*

Références

[1] M. Chipot, The diffusion of a population partly driven by its preferences, Arch. Ration. Mech. Anal. 155 (2000) 237–259.
[2] M. Chipot, S. Mardare, On a model of diffusion of population, Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 1 (3) (2008) 177–190.
[3] S.A. Levin, Spatial patterning and the structure of ecological communities, in: S.A. Levin (Ed.), Some Mathematical Questions in Biology, 7, in: Lectures on Mathematics in the Life Sciences, vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976, pp. 1–35.
[4] J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1993.
[5] A. Okubo, Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, Springer, 1980.
[6] J.G. Skellam, Random dispersial in theoretical populations, Biometrika 38 (1951) 196–218.