C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 43–49

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse fonctionnelle

Une remarque sur les sous-espaces complémentés de $VB^p(\mu, X)$

One remark on the complemented subspaces of $VB^p(\mu, X)$

Mohammad Daher

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 7 juin 2013
Accepté après révision le 31 octobre 2013
Disponible sur Internet le 28 novembre 2013

Présenté par Gilles Pisier

RÉSUMÉ

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité et X un espace de Banach. On montre que les espaces X et $L^p(\mu, X)$ sont complémentés dans X^{**} et $VB^p(\mu, X)$, respectivement, si et seulement si $L^p(\mu, X)$ est complémenté dans son bidual, $1 \leqslant p < \infty$. Si $p = \infty$, il faut considérer $L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} X$ au lieu de $L^\infty(\mu, X)$.
Dans la suite, on suppose que X contient une copie de c_0. En construisant une copie convenable de ℓ^∞ dans $VB^p(\mu, X)$ lorsque μ est sans atome, on montre que $L^p(\mu, X)$ n'est pas complémenté dans $VB^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
Soit E le sous espace fermé de $L^\infty(\mu, X)$ définissant des opérateurs : $L^1(\mu)/Z \to X$, où Z est un sous espace fermé de $L^1(\mu)$. On construit une copie de ℓ^∞ dans E lorsque $Z^\perp$ n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert. On en déduit que, si de plus $Z^\perp$ ne contient pas de copie de c_0, l'espace $Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} X$ n'est pas complémenté dans E.
Les deux premiers résultats sont connus pour $p = 1$, en remplaçant $VB^1(\mu, X)$ par sa copie isométrique $cabv(\mu, X)$.

ABSTRACT

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ be a probability space and X a Banach space. We first show that X and $L^p(\mu, X)$ are complemented in X^{**} and $VB^p(\mu, X)$, respectively, if and only if $L^p(\mu, X)$ is complemented in its bidual, $1 \leqslant p < \infty$. If $p = \infty$, one considers $L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} X$ instead of $L^\infty(\mu, X)$.
We now assume that X contains a copy of c_0. By constructing a suitable copy of ℓ^∞ in $VB^p(\mu, X)$ if μ is atomless, we show that $L^p(\mu, X)$ is not complemented in $VB^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
Let E be the closed subspace of $L^\infty(\mu, X)$ defining operators: $L^1(\mu)/Z \to X$, where Z is a closed subspace of $L^1(\mu)$. We construct a copy of ℓ^∞ in E when $Z^\perp$ is not isomorphic to a Hilbert space. We deduce that, if moreover $Z^\perp$ contains no copy of c_0, the subspace $Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} X$ is not complemented in E.
The first two results are known for $p = 1$, replacing $VB^1(\mu, X)$ by its isometric copy $cabv(\mu, X)$.

Adresse e-mail : m.daher@orange.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.10.036

1. Introduction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité et X un espace de Banach. $L^p(\mu, X)$ est l'espace des classes de fonctions : $\Omega \to X$ (pour l'égalité μ-presque partout), fortement mesurables et de puissance p^{e} intégrable si $1 \leqslant p < +\infty$, fortement mesurables bornées si $p = \infty$.

Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'exposant conjugué q est défini par $1/p + 1/q = 1$.

$VB^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, désigne l'espace des opérateurs $T : L^q(\mu) \to X$, tels qu'il existe $g^T \geqslant 0$ dans $L^p(\mu)$, vérifiant, pour toute $f \in L^q(\mu)$,

$$\|Tf\|_X \leqslant \int_\Omega |f(\omega)| g^T(\omega)\, \mathrm{d}\mu(w),$$

muni de la norme

$$\|T\|_{VB^p(\mu,X)} = \inf\{\|g^T\|_{L^p(\mu)}\}.$$

En particulier, $VB^\infty(\mu, X)$ coïncide avec l'espace des opérateurs bornés : $L^1(\mu) \to X$. Il est clair que les espaces $VB^p(\mu, X)$ sont emboîtés.

Notons que si $T \in VB^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, il existe g^T telle que $\|T\|_{VB^p(\mu,X)} = \|g^T\|_{L^p(\mu)}$: si $1 < p \leqslant \infty$, ceci est dû à la $w*$-compacité des boules de $L^p(\mu)$; on le vérifie un peu plus loin si $p = 1$.

Signalons que $VB^p(\mu, X^*)$ est le dual de $L^q(\mu, X)$, $1 < p \leqslant \infty$ [5, chap. II-13-3, cor. 1]. On a noté X^* le dual de X.

Lorsque m est la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T}$, la définition de $VB^1(m, X)$ considérée ici est différente de celle considérée dans [1]. On notera indifféremment $L^p(m)$ ou $L^p(\mathbb{T})$.

À toute fonction $\psi \in L^p(\mu, X)$, on associe l'opérateur $T_\psi : L^q(\mu) \to X$, défini par :

$$T_\psi(f) = \int_\Omega f(\omega)\psi(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega).$$

L'application : $\psi \to T_\psi$ est une isométrie : $L^p(\mu, X) \to VB^p(\mu, X)$, identifiant donc $L^p(\mu, X)$ à un sous-espace fermé de $VB^p(\mu, X)$ [4, lemme 2], [3, p. 98].

Les éléments de $VB^1(\mu, X)$ sont des opérateurs dominés (au sens de [13]), si on identifie $L^\infty(\mu)$ à $C(S)$, où S, compact, est le spectre de $L^\infty(\mu)$.

On note $L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} X$ la fermeture dans $L^\infty(\mu, X)$ des fonctions étagées ; ce produit tensoriel injectif s'identifie à $C(S, X)$ ainsi qu'à l'espace des opérateurs compacts : $L^\infty(\mu) \to X$. D'après [13], l'espace $VB^1(\mu, X)$ est en dualité normante avec $L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} X^*$.

On note $M(\mathcal{F}, X)$ l'espace des mesures σ-additives à variation bornée définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans X et $cabv(\mu, X)$ le sous-espace formé des mesures M dont la variation $|M|$ est dans $L^1(\mu)$.

Il est facile de voir (cf. [5, III-19-3, th. 2]) que $cabv(\mu, X)$ coincide avec $VB^1(\mu, X)$, en posant $M(F) = T(1_F)$, $F \in \mathcal{F}$. En effet, si $M \in cabv(\mu, X)$, T est défini par linéarité sur les fonctions étagées, puis par densité sur $L^\infty(\mu)$, et $|M|$ fournit un $g^T\, \mathrm{d}\mu$. Inversement, si $T \in VB^1(\mu, X)$, M est une fonction additive sur $\mathcal{F}$ par la linéarité de T, on voit que $|M| \leqslant g^T\, \mathrm{d}\mu$, et M est σ-additive car, si les $F_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints, par le théorème de convergence monotone, on a :

$$\left\| M\left(\bigcup_{n\geqslant 0} F_n\right) - M\left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right)\right\|_X = \left\|T(1_{\bigcup_{n>N} F_n})\right\|_X \leqslant \int 1_{\bigcup_{n>N} F_n} g^T\, \mathrm{d}\mu \to_{N\to\infty} 0.$$

Les principaux résultats de l'article sont les théorèmes 2.1 et 3.1, 3.8.

D'après [7, th. 4], les espaces X et $L^1(\mu, X)$ sont complémentés dans X^{**} et $cabv(\mu, X)$ respectivement, si et seulement si $L^1(\mu, X)$ est complémenté dans son bidual. Le théorème 2.1 généralise ce résultat à $L^p(\mu, X)$, $1 < p < \infty$, en remplaçant $cabv(\mu, X)$ par $VB^p(\mu, X)$.

D'après [6, th. 3.1], $L^1(\mu, X)$ ne peut être complémenté dans $cabv(\mu, X)$ si X contient c_0 et μ est sans atome. De même, le théorème 3.1 généralise ce résultat à $L^p(\mu, X)$, $1 < p \leqslant \infty$, en remplaçant $cabv(\mu, X)$ par $VB^p(\mu, X)$.

Nous présentons aussi les preuves dans le cas $p = 1$ pour la commodité du lecteur.

Nous considérons enfin le sous espace fermé E de $L^\infty(\mu, X)$ définissant des opérateurs : $L^1(\mu)/Z \to X$, où Z est un sous-espace fermé de $L^1(\mu)$. Le théorème 3.8 montre que l'espace $Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} X$ n'est pas complémenté dans E, sous les hypothèses : $Z^\perp$ n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert, X ne contient pas de copie de c_0, et $L^1(\mu)/Z$ est séparable.

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que $L^p(\mu, X)$ soit complémenté dans $VB^p(\mu, X)$

Théorème 2.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité, X un espace de Banach et $1 \leqslant p < \infty$. Les espaces X et $L^p(\mu, X)$ sont complémentés dans X^{**} et $VB^p(\mu, X)$, respectivement, si et seulement si $L^p(\mu, X)$ est complémenté dans son bidual. Lorsque $p = \infty$, on a un résultat analogue en remplaçant $L^p(\mu, X)$ par $L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} X$.*

Notre preuve utilise essentiellement les mêmes idées que celle de [7, th. 4] pour le cas $p=1$; le cas $1<p\leqslant\infty$ est un peu plus simple. Un cas particulier du lemme 2.2 (qui remplace [7, lemme 2]) est montré dans [1, preuve du théorème 3.1].

Lemme 2.2. *Il existe une isométrie $U : VB^p(\mu,X)\to L^p(\mu,X)^{**}$, $1\leqslant p<\infty$, qui coincide avec l'identité sur $L^p(\mu,X)$. Lorsque $p=\infty$, on a un résultat analogue en remplaçant $L^\infty(\mu,X)$ par $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X$.*

Démonstration. Si $\mathcal{F}'$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on note $\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'} : L^q(\mu)\to L^q(\mathcal{F}',\mu)$ l'espérance conditionnelle.

L'ensemble $I=\{\mathcal{F}';\ \mathcal{F}'$ sous-tribu finie de $\mathcal{F}\}$ est ordonné par inclusion. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de I.

(a) Pour toute fonction étagée f, il existe $\mathcal{F}'\in I$ telle que $\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f=f$. Par définition, $\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f\overset{\mathcal{U}}{\to}f$ dans $L^\infty(\mu)$. Comme les fonctions étagées sont denses dans $L^q(\mu)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, on a $\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f\overset{\mathcal{U}}{\to}f$ dans $L^q(\mu)$, pour toute $f\in L^q(\mu)$.

Si $T\in VB^p(\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, on a donc :

$$\big\|T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f-Tf\big\|_X\to_{\mathcal{U}}0.$$

(b) Soit $T\in VB^p(\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. L'opérateur $T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}$, $\mathcal{F}'\in I$, agit en fait sur l'espace de dimension finie $L^q(\mathcal{F}',\mu)$, vu comme quotient de $L^q(\mathcal{F},\mu)$; il existe donc une fonction (étagée) $\psi_{\mathcal{F}'}^T\in L^p(\mathcal{F}',\mu,X)$ telle que, pour toute $f\in L^q(\mu)$,

$$T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}(f)=\int_\Omega f(\omega)\psi_{\mathcal{F}'}^T(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Montrons d'abord que $\|\psi_{\mathcal{F}'}^T\|_{L^p(\mu,X)}\leqslant\|T\|_{VB^p(\mu,X)}$.

Soit g^T associée à T. Pour $f\in L^q(\mu)$, on a :

$$\begin{aligned}\bigg\|\int_\Omega f\psi_{\mathcal{F}'}^T\,\mathrm{d}\mu\bigg\|_X&=\big\|T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f\big\|_X\leqslant\int_\Omega\big|\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}f\big|g^T\,\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega\big(\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}|f|\big)g^T\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega|f|\big[\big(\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}\big)^*\big(g^T\big)\big]\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\big\|\psi_{\mathcal{F}'}^T\big\|_{L^p(\mu,X)}&=\big\|\psi_{\mathcal{F}'}^T\big\|_{VB^p(\mu,X)}\leqslant\big\|\big(\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}\big)^*g^T\big\|_{L^p(\mu)}\\&\leqslant\big\|g^T\big\|_{L^p(\mu)}=\|T\|_{VB^p(\mu,X)}.\end{aligned}\tag{1}$$

On peut donc définir une contraction $U : VB^p(\mu,X)\to L^p(\mu,X)^{**}$, $1\leqslant p<\infty$, par :

$$U(T)=\lim_{\mathcal{U}}\big(\psi_{\mathcal{F}'}^T\big),$$

où la limite est au sens de $\sigma[L^p(\mu,X)^{**},L^p(\mu,X)^*]$. Si $p=\infty$, on remplace $L^\infty(\mu,X)$ par son sous-espace fermé $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X$, qui contient les $\psi_{\mathcal{F}'}^T$.

(c) Vérifions que U est l'identité sur $L^p(\mu,X)$, $1\leqslant p<\infty$, respectivement $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X$. Soient ψ dans cet espace et $T_\psi\in VB^p(\mu,X)$ l'opérateur associé. Alors :

$$T_\psi\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}(f)=\int_\Omega\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}(f)\psi\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f\mathbb{E}_p^{\mathcal{F}'}\psi\,\mathrm{d}\mu,$$

donc $\psi_{\mathcal{F}'}^{T_\psi}=\mathbb{E}_p^{\mathcal{F}'}\psi$. Comme $\mathbb{E}_p^{\mathcal{F}'}\psi\to_{\mathcal{U}}\psi$ dans $L^p(\mu,X)$, respectivement $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X$, on en déduit : $\lim_{\mathcal{U}}(\psi_{\mathcal{F}'}^{T_\psi})=\psi$.

(d) Vérifions que U est une isométrie. Soit $T\in VB^p(\mu,X)$.

Donnons d'abord une preuve naturelle si $1<p\leqslant\infty$. L'espace $L^p(\mu)$ étant le dual de $L^q(\mu)$, il existe φ^T telle que $\|\psi_{\mathcal{F}'}^T\|_X\to_{\mathcal{U}}\varphi^T$ pour $\sigma[L^p(\mu),L^q(\mu)]$.

Pour $f\in L^q(\mu)$, comme $T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}(f)\to_{\mathcal{U}}Tf$ dans X,

$$\|Tf\|_X\leqslant\lim_{\mathcal{U}}\int_\Omega\big|f(\omega)\big|\big\|\psi_{\mathcal{F}'}^T(\omega)\big\|_X\,\mathrm{d}\mu(\omega)=\int_\Omega|f|\varphi^T\,\mathrm{d}\mu.$$

Donc $\|T\|_{VB^p(\mu,X)}\leqslant\|\varphi^T\|_{L^p(\mu)}\leqslant\lim_{\mathcal{U}}\|\psi_{\mathcal{F}'}^T\|_{L^p(\mu,X)}$ et on applique (1).

La preuve suivante, que nous écrivons pour $p=1$, est aussi valable pour $1<p\leqslant\infty$. Soient $f\in L^\infty(\mu)$, $x^*\in X^*$. Alors, d'après (a), (b),

$$\begin{aligned}\langle U(T), f\otimes x^*\rangle &= \lim_{\mathcal{U}}\Big\langle\int_\Omega f\psi^T_{\mathcal{F}'}\,\mathrm{d}\mu, x^*\Big\rangle\\ &= \lim_{\mathcal{U}}\langle T\circ\mathbb{E}_q^{\mathcal{F}'}(f), x^*\rangle = \langle T(f), x^*\rangle.\end{aligned}$$

Par linéarité et densité, on en déduit que la restriction de $U(T)$ à $L^\infty(\mu)\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,X^*$ (sous-espace fermé de $L^1(\mu,X)^*$) coincide avec celle de T, d'où l'inégalité :

$$\|U(T)\|_{L^1(\mu,X)^{**}}\geqslant\|T\|_{(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X^*)^*}=\|T\|_{VB^1(\mu,X)};$$

l'égalité vient du fait (voir l'introduction) que $VB^1(\mu,X)$ est en dualité normante avec $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X^*$. □

Démonstration du théorème 2.1. Preuve de la condition suffisante :

Supposons d'abord $1<p\leqslant\infty$. Comme $L^q(\mu,X^*)$ est un sous-espace fermé de $L^p(\mu,X)^*$, l'application quotient Π, qui à $f^{**}\in L^p(\mu,X)^{**}$ associe sa restriction à $L^q(\mu,X^*)$, est surjective : $L^p(\mu,X)^{**}\to L^q(\mu,X^*)^*$.

L'espace $L^q(\mu,X^*)^*$ s'identifie isométriquement à $VB^p(\mu,X^{**})$ [5, chap. II-13-3, cor. 1]. Supposons l'existence de projections continues $P_1: X^{**}\to X$ et $P_2: VB^p(\mu,X)\to L^p(\mu,X)$. Par définition, l'application $\widetilde{P_1}: T\to P_1\circ T$ est une projection continue : $VB^p(\mu,X^{**})\to VB^p(\mu,X)$. L'application $Q=P_2\circ\widetilde{P_1}\circ\Pi$ est bien une projection continue : $L^p(\mu,X)^{**}\to L^p(\mu,X)$.

Passons au cas $p=1$. L'espace $L^\infty(\mu)\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,X^*$ est fermé dans $L^1(\mu,X)^*$. Soit $\Pi: L^1(\mu,X)^{**}\to(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}X^*)^*$ l'application quotient.

L'espace $L^\infty(\mu)\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,X^*$ s'identifie à $C(S,X^*)$ où S, compact, est le spectre de $L^\infty(\mu)$. Son dual est $M(S,X^{**})$; μ s'identifie à une mesure $\widetilde{\mu}$ sur S. Le théorème de décomposition de Lebesgue [3, th. I, 5.9] donne une projection continue R : $M(S,X^{**})\to cabv(\widetilde{\mu},X^{**})=VB^1(\mu,X^{**})$, et on termine comme ci-dessus, avec $Q=P_2\circ\widetilde{P_1}\circ R\circ\Pi$.

Preuve de la condition nécessaire :

Supposons l'existence d'une projection continue $Q: L^p(\mu,X)^{**}\to L^p(\mu,X)$, $1\leqslant p<\infty$. En particulier, Q est une projection continue : $L^p(\mu,X^{**})\to L^p(\mu,X)$. Comme X^{**} s'identifie à un sous espace de $L^p(\mu,X^{**})$, comme X est complémenté dans $L^p(\mu,X)$, on en déduit que X^{**} est complémenté dans X.

D'autre part, d'après le lemme 2.2, $P=Q\circ U: VB^p(\mu,X)\to L^p(\mu,X)$ est une projection continue.

Lorsque $p=\infty$, le raisonnement est analogue en remplaçant $L^p(\mu,X)$ par $L^\infty(\mu)\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,X$, à cause du lemme 2.2. □

3. Le cas où X contient une copie de c_0

Théorème 3.1. *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace de probabilité où μ est sans atome et X un espace de Banach qui contient c_0 isomorphiquement. Alors, il n'existe aucune projection continue : $VB^p(\mu,X)\to L^p(\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.*

Le lemme suivant permet de se ramener au cas de la mesure de Lebesgue normalisée m sur le tore $\mathbb{T}$.

Lemme 3.2. *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace de probabilité où μ est sans atome. Alors, $VB^p(m,X)$ s'identifie isométriquement à un sous-espace de $VB^p(\mu,X)$, et cette isométrie identifie $L^p(m,X)$ à un sous-espace complémenté de $L^p(\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_0$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $L^1(\mathcal{F}_0,\mu,X)$ soit séparable, de dimension infinie. Comme μ est sans atome, d'après [12, chap. 15, p. 399], l'algèbre mesurée $(\mathcal{F}_0,\mu)$ est isomorphe à $(\mathcal{B},m)$ (où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{T}$), c'est-à-dire qu'il existe une bijection $\Phi:\mathcal{F}_0\to\mathcal{B}/\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ désigne les ensembles m-négligeables) conservant l'union et la complémentation, telle que $m(\Phi(E))=\mu(E)$, $E\in\mathcal{F}_0$. Alors $L^p(\mathbb{T},X)$ est isométrique à $L^p(\mathcal{F}_0,\mu,X)$, $1\leqslant p<\infty$, et de même pour $L^\infty(\mathbb{T},X)$ et $L^\infty(\mathcal{F}_0,\mu,X)$. Par définition, $VB^p(m,X)$ est alors isométrique à $VB^p(\mathcal{F}_0,\mu,X)$, son sous-espace $L^p(\mathbb{T},X)$ s'envoyant sur $L^p(\mathcal{F}_0,\mu,X)$.

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0}$ envoie $L^p(\mathcal{F},\mu,X)$ sur $L^p(\mathcal{F}_0,\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. L'application $T\to T\circ\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0}$ définit une projection : $VB^p(\mathcal{F},\mu,X)\to VB^p(\mathcal{F}_0,\mu,X)$, qui coïncide avec $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0}$ sur $L^p(\mathcal{F},\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. □

Un ingrédient essentiel de la preuve du théorème 3.1 est la proposition suivante, qui généralise [6, th. 2.2] (correspondant au cas $p=1$ et à $cabv(\mu,X)$, sans la propriété de complémentation), les démonstrations ayant des points communs. Cette proposition renforce [8] dans le cas $1\leqslant p<\infty$ et [2, cor. 1] dans le cas $p=\infty$, situations qui montrent, sous les mêmes hypothèses, que $L^p(\mu,X)$ contient une copie complémentée de c_0.

Proposition 3.3. *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace de probabilité tel que μ est sans atome et X un espace de Banach qui contient c_0 isomorphiquement. Alors, il existe un isomorphisme $J:\ell^\infty(\mathbb{Z})\to J(\ell^\infty(\mathbb{Z}))\subset VB^\infty(\mu,X)$, tel que $J(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ est fermé dans tous les espaces $VB^p(\mu,X)$ et $J(c_0(\mathbb{Z}))$ est fermé et complémenté dans tous les espaces $L^p(\mu,X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2, il suffit de montrer le résultat pour $VB^p(m, X)$.

On note $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base canonique de $c_0(\mathbb{Z})$ et $(e_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ celle de $l^1(\mathbb{Z})$. Soit Y un sous-espace fermé de X isomorphe à $c_0(\mathbb{Z})$, soit U un tel isomorphisme.

(a) On définit formellement l'opérateur J sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ par :

$$J(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \otimes Ue_n, \quad \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Vérifions que $J(\alpha)$ est dans $VB^\infty(m, Y) = \mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}), Y)$, avec une norme $\leqslant \|U\|\|\alpha\|_{\ell^\infty(Z)}$. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$ d'après le lemme de Riemann–Lebesgue, et

$$\begin{aligned}\big\|J(\alpha)(f)\big\|_Y &= \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\alpha_n Ue_n\Big\|_Y \leqslant \|U\|\|\alpha\|_{\ell^\infty(Z)} \sup_n\big|\widehat{f}(n)\big| \\ &\leqslant \|U\|\|\alpha\|_{\ell^\infty(Z)}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

(b) Montrons que sur $J(l^\infty)$, les normes induites par $VB^\infty(m, Y)$ et $VB^1(m, Y)$ sont équivalentes à celle de $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Soit $\alpha \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Comme $VB^\infty(m, Y)$ s'injecte dans $VB^1(m, Y)$, soit $g_1^{J(\alpha)}$ associé à l'opérateur $J(\alpha)$ vu dans $VB^1(m, Y)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $J(\alpha)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}) = \alpha_n Ue_n$, d'où :

$$\begin{aligned}\big\|U^{-1}\big\|^{-1}|\alpha_n| &\leqslant |\alpha_n|\|Ue_n\|_Y = \big\|J(\alpha)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\big)\big\|_Y \leqslant \big\|g_1^{J(\alpha)}\big\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &= \big\|J(\alpha)\big\|_{VB^1(m,Y)} \leqslant \big\|J(\alpha)\big\|_{VB^\infty(m,Y)} \leqslant \|U\|\|\alpha\|_{\ell^\infty(Z)}.\end{aligned}$$

Ceci montre la première partie de la proposition pour $VB^p(m, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(c) Soit $\alpha \in c_0(\mathbb{Z})$. Alors $J(\alpha)$ est dans l'espace (complet) $C(\mathbb{T}, Y)$, car :

$$\Big\|\sum_{m\leqslant|n|\leqslant r} \alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \otimes Ue_n\Big\|_{C(\mathbb{T},Y)} = \sup_\theta \Big\|\sum_{m\leqslant|n|\leqslant r} \alpha_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} Ue_n\Big\|_Y \leqslant \|U\| \sup_{m\leqslant|n|} |\alpha_n| \to_{m\to\infty} 0$$

(si $\alpha \in c_0(\mathbb{Z})\, J(\alpha)(f) = \int_{\mathbb{T}} f(-t)J(\alpha)(t)\,\mathrm{d}m(t)$).

(d) Pour $n \in \mathbb{Z}$ on pose $y_n^* = (U^*)^{-1}(e_n^*) \in Y^*$. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $x_n^* \in X^*$ prolongeant y_n^* et avec la même norme.

Si $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(.)}\widehat{f}(n) \in L^1(\mathbb{T}, X)$, on a $\|\widehat{f}(n)\|_X \to_{|n|\to\infty} 0$ d'après le lemme de Riemann–Lebesgue, en particulier $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\widehat{f}(n), x_n^*\rangle e_n$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$, avec une norme $\leqslant \|U^{-1}\|\|f\|_{L^1(\mathbb{T},X)}$. On a noté $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$, $x \in X$, $x^* \in X^*$.

L'opérateur défini sur $L^1(\mathbb{T}, X)$ par :

$$Rf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\widehat{f}(n), x_n^*\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(.)} \otimes Ue_n = J\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\widehat{f}(-n), x_n^*\rangle e_n\Big)$$

est borné : $L^1(\mathbb{T}, X) \to J(c_0(\mathbb{Z})) \subset C(\mathbb{T}, Y)$ d'après (c) et :

$$\|Rf\|_{C(T,Y)} \leqslant \|U\|\big\|U^{-1}\big\|\|f\|_{L^1(\mathbb{T},X)}.$$

Lorsque $f = J(\alpha)$, où $\alpha \in c_0(\mathbb{Z})$, on a :

$$\big\langle\widehat{f}(n), x_n^*\big\rangle = \big\langle\alpha_n U(e_n), \big(U^*\big)^{-1}\big(e_n^*\big)\big\rangle = \alpha_n,$$

c'est-à-dire que R coincide avec l'identité sur $J(c_0(\mathbb{Z}))$. Comme l'espace $J(c_0(\mathbb{Z}))$ est fermé dans $L^1(m, X)$ d'après (b) et (c), R est une projection continue : $L^1(m, X) \to J(c_0(\mathbb{Z}))$.

Alors, d'après (b) et (c), la restriction de R à chaque $L^p(m, X)$, $1 < p \leqslant \infty$, reste une projection continue sur $J(c_0(\mathbb{Z}))$, sous-espace fermé de $L^p(m, X)$. $\square$

La dernière partie de la proposition 3.3, dans le cas $p = \infty$, ou le résultat de [2] cité ci-dessus, impliquent le corollaire 3.4 qui suit.

Rappelons qu'un espace de Banach X est un espace de Grothendieck si, pour tout espace de Banach Y séparable et tout opérateur $T : X \to Y$, T est faiblement compact. Il est bien connu que, pour toute mesure μ, $L^\infty(\mu)$ est un espace de Grothendieck.

Corollaire 3.4. *Soit X un espace de Banach qui contient une copie de c_0. Alors $L^\infty(\mathbb{T}, X)$ n'est pas un espace de Grothendieck.*

Démonstration. D'après la proposition 3.3, la projection continue $R: L^\infty(\mathbb{T}, X) \to J(c_0) \subset L^\infty(\mathbb{T}, X)$, à valeurs dans l'espace séparable $J(c_0)$, n'est pas faiblement compacte, puisque $J(c_0)$, isomorphe à c_0, n'est pas réflexif. $\square$

En particulier, $L^\infty(\mathbb{T}, L^\infty(\mathbb{T}))$ n'est pas un espace de Grothendieck, alors qu'il est fermé dans $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, qui en est un.

Démonstration du théorème 3.1.

Étape 1. Montrons le résultat pour $VB^p(m, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On garde les notations de la proposition 3.3 et de sa preuve. S'il existait une telle projection Q_p, l'opérateur

$$J^{-1} \circ R \circ Q_p \circ J : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to c_0(\mathbb{Z}),$$

serait, d'après la proposition 3.3, une projection continue de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ sur $c_0(\mathbb{Z})$. Or, une telle projection n'existe pas [11, vol. I, th. 2.a.7].

Étape 2. Supposons maintenant qu'il existe une projection continue $\widetilde{Q}_p : VB^p(\mu, X) \to L^p(\mu, X)$. En gardant les notations de la preuve du lemme 3.2, la restriction à $VB^p(\mathcal{F}_0, \mu, X)$ de $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} \circ \widetilde{Q_p}$ serait une projection continue sur $L^p(\mathcal{F}_0, \mu, X)$. D'après le lemme 3.2, $L^p(\mathbb{T}, X)$ serait complémenté dans $VB^p(m, X)$, ce qui est impossible d'après l'étape 1. $\square$

Remarque 3.5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité tel que μ est sans atome. D'après les théorèmes 2.1 et 3.1, si $L^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p < \infty$, est complémenté dans son bidual, alors X est complémenté dans son bidual et ne contient pas c_0 isomorphiquement. La réciproque est fausse en général [1, cor. 2.3, cor. 2.6]. Elle est vraie si X est un treillis de Banach, d'après [1, th. 3.1] et le lemme 3.2 ; le cas $p = 1$ avec $cabv(\mu, X)$ au lieu de $VB^1(\mu, X)$ est dans [9].

Rappelons qu'un espace de Banach X est injectif s'il est complémenté dans tout espace de Banach Y qui le contient (comme un sous-espace fermé) [11, vol. 1, def. 2, f.1] et que $L^\infty(\mu)$ est injectif, pour toute mesure μ. En particulier, $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ est injectif, alors que son sous-espace fermé $L^\infty(\mathbb{T}, L^\infty(\mathbb{T}))$ ne l'est pas, comme il résulte du corollaire suivant.

Corollaire 3.6. *Soit X un espace de Banach qui contient c_0 isomorphiquement. Si μ est une mesure de probabilité sans atome, $L^\infty(\mu, X)$ n'est pas injectif.*

Démonstration. D'après le théorème 3.1, $L^\infty(\mu, X)$, fermé dans $VB^\infty(\mu, X) = \mathcal{L}(L^1(\mu), X)$, n'est pas complémenté dans cet espace. $\square$

Proposition 3.7. *Soit W un sous-espace fermé de $L^\infty(\mu)$, non isomorphe à un espace de Hilbert. Il existe un isomorphisme $J : \ell^\infty \to J(\ell^\infty) \subset L^\infty(\mu, c_0)$, tel que $J(\ell^\infty)$ est fermé dans $L^\infty(\mu, c_0)$ et $J(c_0)$ est fermé dans $W \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} c_0$. De plus, $J(\ell^\infty) \subset \mathcal{L}(L^1(\mu)/W^\perp, c_0)$.*

Démonstration. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de c_0.

(a) Par hypothèse, W n'est pas fermé dans $L^2(\mu)$, donc il existe une suite dans la sphère unité de W qui converge vers 0 dans $L^2(\mu)$ et a fortiori dans $L^1(\mu)$. Il existe une sous-suite, notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers 0 μ-p.s. Si $\alpha \in l^\infty$, μ-p.s., la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n(\omega) e_n$ converge donc dans c_0. On note :

$$J(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n \otimes e_n,$$

fonction qui vérifie, μ-p.s., $\|J(\alpha)(\omega)\|_{c_0} \leqslant \|\alpha\|_{\ell^\infty}$. Alors, si $h \in L^1(\mu)$, par le théorème de convergence dominée,

$$\left\| \int_\Omega J(\alpha) h \, d\mu - \sum_{n\leqslant N} \alpha_n \int_\Omega f_n h \, d\mu \otimes e_n \right\|_{c_0} \to_{N\to\infty} 0,$$

donc $J(\alpha)$ définit un opérateur : $L^1(\mu)/W^\perp \to c_0$. Par ailleurs, la fonction $J(\alpha)$ est dans $L^\infty(\mu, c_0)$ d'après le théorème de Pettis [3, II-1-th. 2] : en effet, c_0 est un espace séparable, et, pour $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \beta_n f_n$ converge μ-p.s., donc définit une fonction mesurable $\langle J(\alpha)(.), \beta\rangle$.

(b) Si $\alpha \in c_0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n \otimes e_n$ converge donc dans $L^\infty(\mu, c_0)$; il en résulte que $J(\alpha)$ est dans $W \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} c_0$.

(c) Montrons que, sur $J(l^\infty)$ la norme induite par $\mathcal{L}(L^1(\mu), c_0)$ est équivalente à celle de l^∞. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in L^1(\mu)$, de norme 1, telle que :

$$(1-\varepsilon)|\alpha_n| \leqslant |\alpha_n| \int_\Omega f_n h_n \, d\mu = \left\langle \int_\Omega J(\alpha) h_n \, d\mu, e_n^* \right\rangle \leqslant \|J(\alpha)\|_{L^\infty(\mu, c_0)} \leqslant \|\alpha\|_{\ell^\infty}. \qquad \square$$

Notons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la sphère unité de W, qui converge vers 0 dans $L^1(\mu)$, doit converger vers 0 dans $L^2(\mu)$, puisque $L^2(\mu)$ est un espace d'interpolation entre $L^\infty(\mu)$ et $L^1(\mu)$.

Théorème 3.8. *Soit Z un sous-espace fermé de $L^1(\mu)$ tel que $L^1(\mu)/Z$ est séparable, $Z^\perp$ ne contient pas de copie de c_0 et n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert. Soit X un espace de Banach qui contient une copie de c_0. Alors, il n'existe pas de projection continue : $E = L^\infty(\mu, X) \cap \mathcal{L}(L^1(\mu)/Z, X) \to Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} X$.*

Démonstration. D'après [10, th. 4], un espace $V^* \hat{\hat{\otimes}} S$ (qui coïncide avec l'espace des opérateurs compacts : $V \to S$) ne contient pas de copie de l^∞ si et seulement si S n'en contient pas et V ne contient pas de copie de l^1 complémentée. L'hypothèse sur V équivaut à, « V n'admet pas de quotient isomorphe à l^1 », qui elle-même équivaut à « V^* n'admet pas de copie de c_0 ». En particulier, ici, ni $G = Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} c_0$, ni $F = Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} X$ (si X ne contient pas l^∞), ne contiennent l^∞.

On va montrer que l'existence d'une projection P comme dans l'énoncé entraînerait l'existence d'un sous-espace isomorphe à l^∞, dans G si X contient l^∞, dans F sinon, d'où la contradiction.

Cas 1 : X ne contient pas l^∞.

Soient Y un sous-espace fermé de X isomorphe à c_0 et U un tel isomorphisme. D'après la proposition 3.7, $(I \otimes U) \circ J$ envoie l^∞ dans E et l'opérateur $P \circ (I \otimes U) \circ J : l^\infty \to F$ n'est pas faiblement compact, puisqu'il coincide avec $(I \otimes U) \circ J$ sur c_0. D'après [10, prop. 2], F contient l^∞.

Cas 2 : X contient l^∞.

Comme l^∞ est injectif, on peut supposer $X = l^\infty$. D'après la proposition 3.7, le noyau de l'opérateur $(I - P) \circ J : l^\infty \to \mathcal{L}(L^1(\mu)/Z, l^\infty)$ contient c_0. D'après [10, prop. 5], comme $L^1(\mu)/Z$ est séparable, il existe un sous ensemble infini $M \subset \mathbb{N}$ tel que le noyau de $(I - P) \circ J$ contient $l^\infty(M)$. Il en résulte que J envoie $l^\infty(M)$ à la fois dans $L^\infty(\mu, c_0)$ et dans $Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} l^\infty$, donc dans $Z^\perp \hat{\hat{\otimes}} c_0 = G$. L'espace G contient donc la copie $J(l^\infty(M))$ de l^∞. $\square$

Exemple. Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ un ensemble infini. On note $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})$ le sous-espace w^*-fermé de $L^\infty(\mathbb{T})$ engendré par les e^{int}, $n \in \Lambda$. On sait qu'il existe un sous-ensemble infini $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que $L^\infty_{\Lambda'}(\mathbb{T})$ est canoniquement isomorphe à l^1. Si $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})$ ne contient pas de copie de c_0, si X en contient une, le théorème 3.8 implique qu'il n'existe pas de projection continue : $E = L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, X) \to L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}) \hat{\hat{\otimes}} X$.

Remerciements

Je remercie chaleureusement F. Lust-Piquard pour le temps qu'elle m'a consacré lors de la préparation de ce travail. Je remercie également le directeur de mon établissement, M. Hamad Alanafeh, qui m'a encouragé à continuer à faire de la recherche.

Références

[1] M. Daher, $L^p(G, X^*)$ comme sous-espace complémenté de $L^q(G, X)^*$, Coll. Math. 131 (2) (2013) 273–286.

[2] S. Diaz, Complemented copies of c_0 in $L^\infty(\mu, E)$, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (4) (1994) 1167–1171.

[3] J. Diestel, J.J. Uhl, Vector Measures, Math. Surv. Monogr., vol. 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[4] J. Dieudonné, Sur le théorème de Lebesgue–Nikodym V, Canad. J. Math. 3 (1951) 129–139.

[5] N. Dinculeanu, Vector Measures, Pergamon, New York, 1967.

[6] L. Drewnowski, G. Emmanuele, The problem of complementability for some spaces of vector measures of bounded variation with values in Banach spaces containing copies of c_0, Studia Math. 104 (2) (1993) 111–123.

[7] G. Emmanuele, Remarks on the complementability of spaces of Bochner integrable functions in space of vector measures, Comment. Math. Univ. Carolin. 37 (1996) 217–228.

[8] G. Emmanuele, On complemented copies of c_0 in L^p_X $1 \leqslant p < \infty$, Proc. Amer. Math. Soc. (1988) 785–786.

[9] F. Freniche, L. Rodriguez-Piazza, Linear projections from a space of measures onto its Bochner integrable functions subspace, preprint, 1993.

[10] N.J. Kalton, Spaces of compact operators, Math. Ann. 208 (1974) 267–278.

[11] L. Lindenstrauss, L. Tzaffriri, Classical Banach Spaces. I–II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzebiete, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1979.

[12] H.L. Royden, Real Analysis, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[13] I. Singer, Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 4 (1959) 391–401.