



Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

## Approximation grossière d'un problème elliptique à coefficients hautement oscillants <sup>☆</sup>

*Coarse approximation of an elliptic problem with highly oscillatory coefficients*

Claude Le Bris <sup>a,c</sup>, Frédéric Legoll <sup>b,c</sup>, Kun Li <sup>a</sup>

<sup>a</sup> CERMICS, École des Ponts ParisTech, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

<sup>b</sup> Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

<sup>c</sup> INRIA Rocquencourt, MICMAC project, domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

### IN F O A R T I C L E

*Historique de l'article :*

Reçu le 27 février 2013

Accepté le 23 mars 2013

Disponible sur Internet le 13 mai 2013

Présenté par le Comité de rédaction

### R É S U M É

Nous nous posons la question de l'approximation d'un problème elliptique à coefficients hautement oscillants par un problème de même type, mais avec des coefficients constants, en nous plaçant délibérément dans une perspective pratique (de l'ingénieur), où toutes les informations sur les coefficients de l'équation ne sont pas forcément disponibles. Nous étudions les liens entre cette problématique et la théorie classique de l'homogénéisation. Quelques cas pratiques simples sont examinés, sur lesquels on démontre l'intérêt potentiel de l'approche.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### A B S T R A C T

Our wish is to approximate an elliptic problem with highly oscillatory coefficients using a problem of the same type, but with constant coefficients. We deliberately take an engineering perspective, where the information on the oscillating coefficients in the equation can be incomplete or entirely missing. We investigate the links between this particular question and the classical theory of homogenization. On some illustrating examples we show the potential practical interest of the approach.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abridged English version

We consider a simple elliptic linear equation (1) in divergence form, with a highly oscillatory matrix coefficient  $A_\varepsilon$ . We assume the conditions are satisfied so that this equation is well posed. It is well known that for  $\varepsilon$  small, and not necessarily infinitesimally small, the solution  $u_\varepsilon$  to (1) is difficult to compute using direct approaches. Homogenization theory (see [1,10]) and all the numerical approaches such as MsFEM (see [8]) that, closely or remotely, derive from this theory, provide a good alternative to the direct solution to (1). However, one way or another, these theoretical and numerical approaches all rely on the knowledge of the coefficient  $A_\varepsilon$ . It turns out that there are several contexts where such a knowledge is at best incomplete, and often completely unavailable. From an engineering perspective, there are numerous prototypical situations where the response  $u_\varepsilon$  can be observed and measured for *some* loadings  $f$ , but where  $A_\varepsilon$  is not

<sup>☆</sup> Nous remercions Tony Lelièvre pour de nombreuses discussions à l'origine de ce projet.

Adresses e-mail : lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris), legoll@lami.enpc.fr (F. Legoll), galoispure@gmail.com (K. Li).

completely known. A situation that gives rise to similar difficulties, although it is completely different in nature because very abstract, is the situation where one examines the homogenized limit of (1) for a coefficient  $A_\varepsilon$  that is not the simple rescaling  $A(\cdot/\varepsilon)$  of a simple (periodic, quasi-periodic, random stationary...) function. Or, equivalently, it is the situation when one tries to homogenize more complicated settings, or more complicated equations. Then it might very well be the case that no explicit expression of the homogenized tensor  $A^*$  giving the homogenized equation (2) associated with (1) is available. The question then arises to find another pathway to efficiently approximate the solution to (1). We investigate here how we may define the constant matrix  $\bar{A}$  that best approximates  $u_\varepsilon$  using the solution  $\bar{u}$  to (3), and how this strategy qualitatively and quantitatively compares to homogenization-based approaches.

We formalize the approach in Section 2 of the French version. The notion of a *best constant matrix* approximating (1) is made precise (see (4)). Under appropriate assumptions, it can be proved that, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , this best constant matrix converges toward the homogenized matrix (when the latter exists and is assumed constant, of course), thereby giving an alternative characterization of the homogenized matrix.

We then investigate various practical issues in Section 3. The definition of the best constant matrix relies on the inf-sup problem (4), which might be difficult (or even prohibitively expensive) to solve in practice. We first show that the *sup* in the inner optimization loop may be approximated by a *max* over a finite (small) set of appropriate right-hand sides  $f$ , see (5). We then check that, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the best constant matrix obtained in this manner does converge toward the homogenized matrix and we identify the rate of this convergence (see Fig. 1). Our tests are performed on a simple highly oscillatory periodic problem. Next, we consider a stochastic ergodic case, where it is known that the actual computation of the homogenized matrix using the classical approach can be expensive. We show, in terms of bias and variance, that the alternative approach that we propose performs equally well (see Fig. 2). It is thus expected that, for more difficult cases, this approach could be more than a simple surrogate for the classical approach. Another issue we consider is that of the approximation of the solution  $u_\varepsilon$  to (1) in  $H^1$  norm, that is, in the language of homogenization theory, the reconstruction of the corrector. We investigate a possible manner, among many variants, to recover this information (see Table 1).

The results announced here will be complemented in [11], where more definite conclusions on the validity of the approach will be obtained.

## 1. Introduction

Notre point de départ est une équation tout à fait classique, elliptique sous forme divergence,

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f, \quad (1)$$

posée sur un ouvert borné régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , pour un second membre  $f \in L^2(\Omega)$ , avec, pour fixer les idées, des conditions au bord homogènes de Dirichlet  $u_\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Le coefficient  $A_\varepsilon$  est un champ de matrices, fonction de la variable  $x \in \Omega$ . On suppose que ce champ possède toutes les qualités nécessaires pour que (1) soit bien posée. L'indice  $\varepsilon > 0$  souligne que  $A_\varepsilon$  est potentiellement une fonction hautement oscillante. On pourra, par exemple, penser à  $A_\varepsilon(x) = A_{\text{per}}(x/\varepsilon)$  pour une fonction périodique  $A_{\text{per}}$  fixée.

Pour  $\varepsilon$  petit, mais pas forcément infiniment petit, le problème (1) est coûteux, voire impossible, à résoudre numériquement. La théorie de l'homogénéisation (lire par exemple [1,10]) et ses corollaires numériques, comme par exemple la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM, voir [8]), sont des alternatives tout à fait performantes pour approcher la solution  $u_\varepsilon$  de (1) de manière satisfaisante. Peu ou prou, ces approches reposent sur la résolution d'un problème à l'échelle fine : *problème du correcteur* (aussi appelé *problème de localisation* dans la littérature de mécanique) pour l'homogénéisation, ou *problème sous-maille* pour les méthodes de type MsFEM.

Cependant, plaçons-nous dans une perspective pratique où le coefficient  $A_\varepsilon$  n'est pas entièrement connu. On peut, par exemple (mais pas seulement), penser à une situation en mécanique où, pour certains seconds membres  $f$  (les chargements), on peut observer ou mesurer la solution  $u_\varepsilon$ , mais on ne peut pas forcément connaître le matériau de l'éprouvette au point de déterminer entièrement  $A_\varepsilon$ . Il est alors impossible, faute d'information, de mettre en œuvre la théorie de l'homogénéisation. Et il est tout aussi délicat d'aborder une discrétisation MsFEM, puisque ces techniques requièrent des fonctions de base encodant les authentiques oscillations locales du problème, issues de  $A_\varepsilon$ .

Il faut noter, d'ailleurs, que cette obstruction pratique a un analogue théorique avec la question suivante (très abstraite à première vue, et en fait reliée aux travaux [2–4]) : même quand on connaît parfaitement le coefficient  $A_\varepsilon$ , mais que celui-ci n'est pas la remise à l'échelle (fonction « rescalée ») d'une fonction périodique, quasi-périodique, aléatoire stationnaire, etc., aucune formule explicite ne fournit, dans l'état actuel de la théorie, la matrice homogénéisée  $A^*$  du problème homogénéisé associé à (1), à savoir (dans cette situation simple),

$$-\operatorname{div}(A^* \nabla u^*) = f. \quad (2)$$

Il en est de même, et il s'agit encore d'extensions possibles de la problématique débattue ici, lorsque la formule explicite existe, mais ne se prête pas à une approximation numérique efficace (cas stochastiques très corrélés) ou quand, bien pire, le correcteur n'existe pas, comme dans des cas d'équations totalement non linéaires. De manière générale, déterminer  $A^*$  sans avoir préalablement déterminé le correcteur ne semble pas avoir été une voie très explorée.

Les observations ci-dessus sont autant de motivations suffisantes pour considérer le problème sous un autre angle. Remplaçons, pour  $\varepsilon$  fixé, le problème (1) par l'équation :

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f, \quad (3)$$

pour une matrice  $\bar{A}$  à coefficients constants qui est, parmi les matrices à coefficients constants, celle qui permet d'approcher au mieux  $u_\varepsilon$  par  $\bar{u}$  en un sens à préciser. Quel est le choix idéal de cette matrice ? En quoi ce choix est-il, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , relié à la matrice  $A^*$  fournie par la théorie de l'homogénéisation (bien sûr, lorsque le contexte conduit à une matrice homogénéisée constante) ? Comment approcher cette matrice  $\bar{A}$  ? Cette approche peut-elle être, dans certaines situations, compétitive avec les autres approches plus établies, voire supérieure ? L'objet de cette note, et, au-delà, du travail en préparation [11], est d'examiner ces questions dans des cas simples. Des questions similaires dans l'esprit, quoique non identiques, ont été abordées dans [6,7].

## 2. Formalisation du problème

Pour assurer le caractère bien posé de l'équation (1) complétée de conditions au bord homogènes de Dirichlet, nous supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que la famille de matrices  $A_\varepsilon \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$  vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_\varepsilon(x) \xi \geq c \xi^T \xi \quad \text{et} \quad \xi^T (A_\varepsilon(x))^{-1} \xi \geq c \xi^T \xi \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

Alors, la suite de matrices  $A_\varepsilon$   $H$ -converge (à extraction près) vers une matrice homogénéisée  $A^*$  que nous supposons constante (voir une remarque à ce sujet dans la Section 4). Pour simplifier le cadre de travail, nous supposons ici que toute la suite  $A_\varepsilon$   $H$ -converge vers  $A^*$ . Tout ceci n'est nullement nécessaire pour la mise en œuvre pratique de l'approche.

On note  $u(\bar{A}, f)$  la solution de (3) (pour une matrice constante  $\bar{A}$  coercive),  $u_\varepsilon(f)$  la solution de (1), et on introduit le problème :

$$I_\varepsilon = \inf_{\text{matrice constante } \bar{A} > 0} \sup_{f \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(f) - u(\bar{A}, f)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4)$$

où  $\bar{A} > 0$  signifie que la matrice  $\bar{A}$  est coercive : il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , on a  $\xi^T \bar{A} \xi \geq c \xi^T \xi$ . On introduit aussi :

$$J_\varepsilon(\bar{A}) = \sup_{f \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(f) - u(\bar{A}, f)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous avons alors le résultat suivant, qui donne une autre caractérisation, dans ce cadre simple, de la matrice homogénéisée  $A^*$  : sous les hypothèses ci-dessus,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$ . De plus, pour toute matrice  $\bar{A}_\varepsilon$  quasi-minimiseur de (4), i.e. vérifiant  $I_\varepsilon \leq J_\varepsilon(\bar{A}_\varepsilon) \leq I_\varepsilon + \varepsilon$  (et c'est en particulier vrai pour le minimiseur quand il existe), on a :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{A}_\varepsilon = A^*$ .

Cette caractérisation alternative de la matrice homogénéisée ne semble pas présente dans la littérature. Nous n'avons en tout cas pas été capables de l'y déceler. La preuve de cette proposition est simple, et son détail sera donné dans [11]. Elle repose sur le fait que l'injection  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  est compacte, que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(A^*) = 0$ , et sur le fait qu'il existe  $d^2$  seconds membres  $f_i$  tels que la connaissance de  $f_i$  et de  $u_i^*$ , solution de (2) avec second membre  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq d^2$ , suffit pour reconstruire de manière univoque la matrice  $A^* \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Le problème inf-sup (4), bien qu'utile théoriquement, n'est pas aisément soluble en pratique. Nous serons donc amenés à lui substituer le problème inf-max suivant :

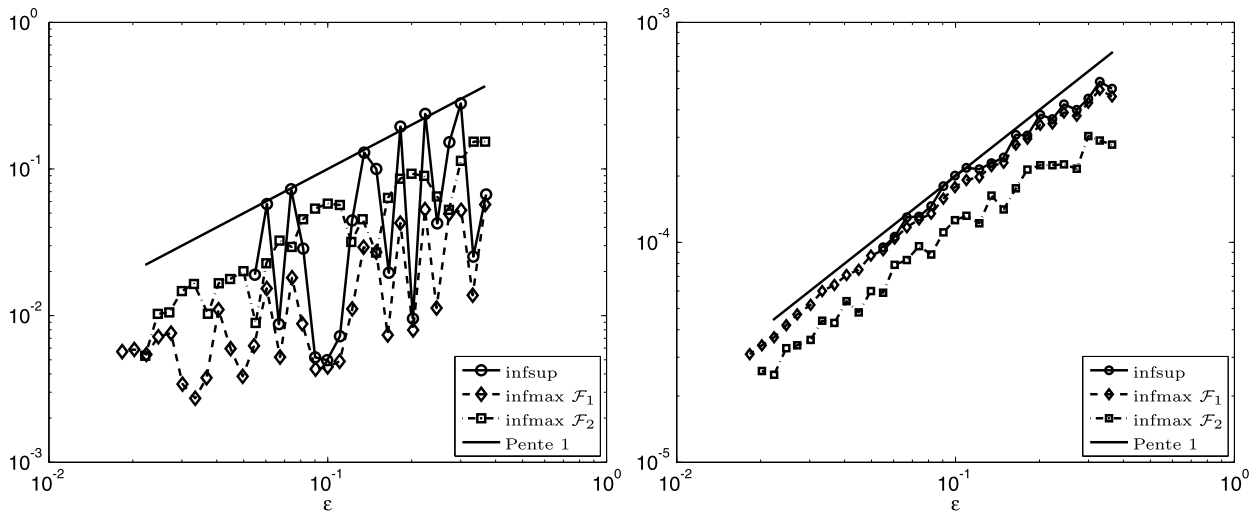
$$\inf_{\text{matrice constante } \bar{A} > 0} \max_{f \in \mathcal{F}} \|u_\varepsilon(f) - u(\bar{A}, f)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5)$$

où  $\mathcal{F}$  est un ensemble fini de fonctions (de norme  $L^2$  égale à 1) bien choisies. On se rapproche en cela de la démarche expérimentale de l'ingénieur, déterminant le comportement d'une éprouvette pour une sélection de charges. L'influence du choix de  $\mathcal{F}$  est discutée dans la Section 3. On peut, en fait, montrer (voir [11]) qu'il existe un ensemble  $\mathcal{F}$  de cardinal  $d^2$  tel que le résultat énoncé ci-dessus pour (4) reste vrai pour le problème (5). À ce sujet, on peut remarquer qu'il suffit de  $d$  correcteurs (ce qui est à comparer à  $d^2$  chargements) pour calculer  $A^*$  par l'approche classique. Cette remarque sera approfondie dans [11].

L'approche décrite ci-dessus peut bien évidemment être facilement mise en pratique en une dimension, où les problèmes (4) et (5) peuvent être résolus numériquement pour un coût faible. Nous préférons, dans la suite, nous concentrer sur le cas de la dimension deux.

## 3. Tests numériques

Nos tests numériques (tous effectués en utilisant le logiciel FreeFEM [9]) ont pour but d'examiner les questions suivantes :



**Fig. 1.** Cas test périodique :  $\|\bar{A}_\varepsilon - A^*\| := \sum_{i,j=1}^2 \|[\bar{A}_\varepsilon]_{ij} - [A^*]_{ij}\|$  (à gauche) et  $I_\varepsilon$  (à droite) en fonction de  $\varepsilon$ , pour le problème inf-sup et le problème inf-max (avec deux ensembles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  différents dans (5)).

- sur le cas simple d'un problème périodique (où on ne peut pas espérer « battre » les approches classiques, qui sont très performantes d'un point de vue pratique, et où on laisse donc les questions de coût calcul de côté),
  - (i) d'un point de vue pratique, peut-on remplacer le problème théorique correct, mais « abstrait » inf-sup (4) par le problème inf-max (5), qui est, quant à lui, traitable efficacement numériquement ?
  - (ii) la meilleure matrice constante converge-t-elle, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers la matrice homogénéisée ? On sait que la réponse théorique est affirmative (au vu du résultat énoncé ci-dessus), mais on a remplacé (4) par (5) et on souhaite, de plus, estimer la qualité et la vitesse de la convergence ;
- sur le cas d'un problème stochastique stationnaire, réputé plus difficile pour la pratique numérique, l'approche est-elle opérationnelle et éventuellement compétitive avec les approches plus établies ?

Une autre question d'intérêt pratique est l'approximation de la solution  $u_\varepsilon$  de (1) en norme  $H^1$  ou, autrement dit dans le langage de l'homogénéisation, la question de la reconstruction du correcteur, lequel, délibérément, avait été soigneusement évité. Nous montrons une méthode, parmi d'autres, pour reconstituer cette information et bien approcher  $\nabla u_\varepsilon$ .

**3.1.** On se place pour commencer dans un cadre périodique, en dimension  $d = 2$ , sur  $\Omega = (0, 1)^2$ . La matrice  $A_\varepsilon$  dans (1) s'écrit  $A_\varepsilon(x, y) = A_{\text{per}}(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$  avec :

$$A_{\text{per}}(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{12}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix},$$

et  $a_{12}(x, y) = \frac{1}{2\pi} [\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)]$ ,  $a_{11}(x, y) = 2 + a_{12}(x, y)$  et  $a_{22}(x, y) = 1 + a_{12}(x, y)$ . Les coefficients de la matrice homogénéisée sont  $A_{11}^* \approx 1,98$ ,  $A_{12}^* = A_{21}^* \approx -0,0193$  et  $A_{22}^* \approx 0,981$ . Pour résoudre (1) et (3), on utilise un maillage fin de taille  $h = \varepsilon/10$ .

Le problème inf-sup (4) est résolu par l'algorithme de Uzawa ( $\bar{A}$  est cherché dans l'ensemble des matrices symétriques). La Fig. 1 montre les résultats obtenus en fonction de  $\varepsilon$  : on vérifie bien que  $I_\varepsilon$  converge vers 0 et que  $\bar{A}_\varepsilon$  converge vers  $A^*$ , à la vitesse  $\varepsilon$ .

On s'intéresse ensuite au problème inf-max (5), avec deux ensembles  $\mathcal{F}$  différents (on utilise une méthode de gradient pour minimiser en  $\bar{A}$ ) :

$$\mathcal{F}_1 = \{f_m(x, y) = k_m \sin(m\pi x) \sin(\pi y), m = 1, 2, 3\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{f_m(x, y) = k_m (s_{m,1} x^2/2 + s_{m,2} xy + s_{m,3} y^2/2), m = 1, 2, 3\},$$

où  $k_m$  est une constante telle que  $\|f_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , et  $s_1 = (0, 0, 1)$ ,  $s_2 \approx (0, 0,864, -0,00291)$  et  $s_3 \approx (0,415, 0,0297, -0,0242)$ . On a choisi pour  $\mathcal{F}_1$  des vecteurs propres du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ . Le choix de  $\mathcal{F}_2$  (et des valeurs de  $s_m$ ) est guidé par la preuve du résultat de convergence énoncé dans la Section 2 (cf. [11]). Les résultats obtenus sont aussi montrés sur la Fig. 1. On constate à nouveau que  $I_\varepsilon$  converge vers 0 et que  $\bar{A}_\varepsilon$  converge vers  $A^*$  à la vitesse  $\varepsilon$ . Plus important, la convergence est qualitativement identique pour le problème inf-sup (4) et pour le problème inf-max (5) avec les ensembles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  de fonctions tests.

**3.2.** On s'intéresse maintenant au cas du damier aléatoire. Dans (1), on prend  $A_\varepsilon(x, y, \omega) = a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \omega) \text{Id}_2$ , où  $a(x, y, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} 1_{Q+k}(x, y) X_k(\omega)$ ,  $Q = (0, 1)^2$ , et où les variables aléatoires  $X_k$  sont i.i.d. et telles que  $\mathbb{P}(X_k = \alpha) = \mathbb{P}(X_k = \beta) = 1/2$ ,

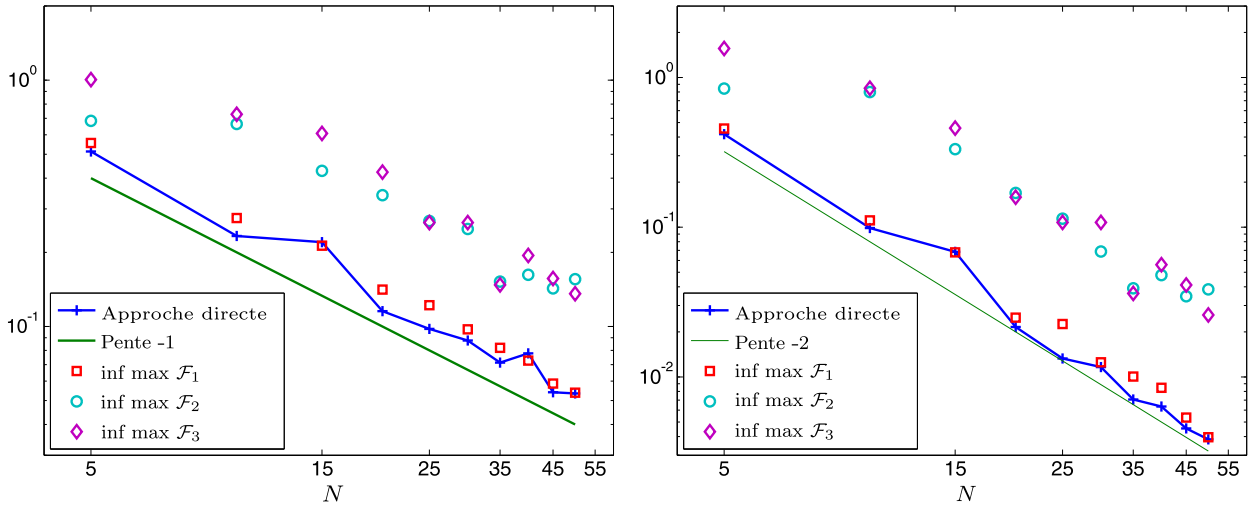


Fig. 2. *Cast test* aléatoire : comparaison de l’approche directe avec le problème inf-max (6), pour plusieurs choix de  $\mathcal{F}$ . Biais (à gauche) et variances (à droite) en fonction de  $N = 1/(2\varepsilon)$  ( $M = 40$  réalisations).

avec ici  $\alpha = 4$  et  $\beta = 16$ . On procède dans la suite comme si on ne connaissait pas la valeur analytique de  $A^*$ . Le problème (5) s’écrit :

$$I_\varepsilon(\omega) = \inf_{\text{matrice constante } \bar{A} > 0} \max_{f \in \mathcal{F}} \|u_\varepsilon(\omega, f) - u(\bar{A}, f)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6}$$

avec  $\Omega = (0, 1)^2$  et on considère trois choix pour  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}_1 = \{1, k_2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), k_3 \sin(2\pi x) \sin(\pi y)\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{1, k_2 \sin(\pi x), k_3 \sin(\pi y)\}$  et  $\mathcal{F}_3 = \{1, k_2 \sin(\pi x) \cos(\pi y), k_3 xy\}$ , où  $k_2$  et  $k_3$  sont des constantes de normalisation. On note  $\bar{A}_\varepsilon(\omega)$  la solution de (6).

Afin de comparer l’approche (6) avec l’approche classique consistant à résoudre le problème du correcteur sur  $Q_{N_\varepsilon} = (-N_\varepsilon, N_\varepsilon)^2$ , on choisit  $N_\varepsilon = 1/(2\varepsilon)$  et un maillage de  $Q_{N_\varepsilon}$  de taille  $h = 1/10$ , afin que les deux approches aient le même coût calcul. On note  $A_N^*(\omega)$  l’approximation obtenue par l’approche directe en travaillant sur  $Q_N$ .

La Fig. 2 montre les résultats obtenus, en terme de biais et de variance, sur le terme  $[A^*]_{11}$ . On définit la valeur de référence  $A_{\text{ref}}^*$  comme la moyenne sur 200 réalisations de  $A_N^*(\omega)$  pour  $N = 50$ . À coût calcul identique, on constate que l’approche (6) fournit des résultats aussi précis (que ce soit en terme de biais ou de variance) que l’approche directe.

**3.3.** On s’intéresse maintenant à la reconstruction d’une bonne approximation de  $\nabla u_\varepsilon$ . On revient pour cela au cadre périodique. Par le développement à deux échelles en théorie de l’homogénéisation, on sait que, à l’ordre dominant,

$$\begin{aligned} \partial_x u_\varepsilon(f) &= \left(1 + \partial_x w_{e_1} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right) \partial_x u^*(f) + \partial_x w_{e_2} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \partial_y u^*(f), \\ \partial_x u_\varepsilon(g) &= \left(1 + \partial_x w_{e_1} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right) \partial_x u^*(g) + \partial_x w_{e_2} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \partial_y u^*(g), \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont deux seconds membres pour (1), et où  $w_{e_i}$  est le correcteur périodique dans la direction  $e_i$ . L’inversion formelle de ce système fournit une expression (simple, mais fastidieuse à écrire, voir [11]) de  $\partial_x w_{e_i}$  ( $i = 1, 2$ ) en fonction de  $\partial_x u_\varepsilon(f)$ ,  $\partial_x u_\varepsilon(g)$ ,  $\nabla u^*(f)$  et  $\nabla u^*(g)$ . On procède de même pour  $\partial_y w_{e_i}$  ( $i = 1, 2$ ). L’approximation que nous adoptons est alors de remplacer dans cette expression  $\nabla u^*(f)$  par  $\nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)$  et similairement en  $g$  (où  $\bar{A}_\varepsilon$  est la solution de (5)), et de moyenniser cette expression sur plusieurs seconds membres  $f$  appartenant à un ensemble  $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ . Ceci fournit une approximation  $C_\varepsilon(\tilde{\mathcal{F}}) \nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)$  de  $\nabla u_\varepsilon(f)$ , qu’on espère valable pour d’autres  $f$  que ceux de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Nous testons maintenant cette méthode d’approximation en calculant  $I(\tilde{\mathcal{F}}) = \max_{f \in \mathcal{F}} \frac{\|\nabla u_\varepsilon(f) - C_\varepsilon(\tilde{\mathcal{F}}) \nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)\|_{L^2(\Omega)}}$ . Les résultats sont donnés dans la Table 1.

On observe que  $I(\tilde{\mathcal{F}})$  converge vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (même lorsque  $\tilde{\mathcal{F}}$  est strictement inclus dans  $\mathcal{F}$ ) de manière qualitativement identique à  $I_{\text{per}} = \max_{f \in \mathcal{F}} \frac{\|\nabla u_\varepsilon(f) - C_\varepsilon^{\text{per}} \nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u(\bar{A}_\varepsilon, f)\|_{L^2(\Omega)}}$ , où  $C_\varepsilon^{\text{per}}$  est la matrice des correcteurs périodiques exacts.

**4. Remarques, conclusions, extensions**

Nous rappelons que l’approche présentée ici se veut, dans les cas pratiques, moins ambitieuse que les approches de type homogénéisation. Elle est destinée à se substituer à de telles approches lorsque celles-ci sont impossibles à mettre en œuvre, soit pour des raisons théoriques (non existence d’un objet ou absence de caractérisation explicite), soit pour

**Tableau 1**

Cas test périodique : approximation de  $\nabla u_\varepsilon$ , avec  $\mathcal{F}_1 = \{1, y, x^2, \sin \pi x, \sin 2\pi y, \sin \pi x \sin \pi y, \sin 2\pi x \sin \pi y\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{x, y^2, xy, \sin(\pi y), \sin(2\pi x), \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \sin(\pi x) \sin(2\pi y)\}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ .

$\varepsilon$	$(I_{\text{per}})^2$	$(I(\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}))^2$	$(I(\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1))^2$	$(I(\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_2))^2$
0,4	0,28965	0,13607	0,21173	0,10770
0,2	0,18386	0,11476	0,18963	0,10842
0,1	0,104254	0,059061	0,079980	0,079846

des raisons pratiques (coût calcul prohibitif). L'objectif de cette note est de démontrer la  *faisabilité*  de l'approche, et sa consistance avec les approches traditionnelles quand celles-ci sont possibles. L'utilisation de l'approche dans des cas encore non explorés, ou connus comme difficilement accessibles par l'approche classique, est encore à effectuer. Ceci fera l'objet de travaux ultérieurs. Dans cette direction, on souhaite citer les contributions préliminaires en homogénéisation fractale effectuées dans le cadre de la thèse de A. Blasselle [5] par cette dernière et Y. Maday.

Nous soulignons que, comme toujours pour les problèmes multiéchelles, l'approche n'est rentable que si on doit résoudre (1) pour beaucoup de seconds membres. Ici, le coût est dimensionné par le nombre de problèmes (1) nécessaire au calcul d'une bonne approximation de  $A^*$ .

Dans les cas simples de la théorie de l'homogénéisation, on obtient la valeur explicite de la matrice homogénéisée  $A^*$  par résolution du problème du correcteur, lequel problème fournit aussi, simultanément, l'approximation du gradient  $\nabla u_\varepsilon$  de la solution de l'équation oscillante. La lecture pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de l'approche présentée ici donne une stratégie orientée *d'abord* vers l'obtention de la matrice équivalente (homogénéisée), sans connaissance préalable du correcteur. Celui-ci est éventuellement approché, dans une seconde phase ou simultanément, mais les deux aspects sont dissociés. On pourra objecter que, dans beaucoup de situations pratiques, on est en fait intéressé à obtenir  $\nabla u_\varepsilon$  (penser à l'interprétation en termes de courant électrique, gradient de concentration, etc.) et pas forcément  $u_\varepsilon$ . Pour autant, il existe aussi beaucoup de situations pratiques où l'intérêt se porte sur  $A^*$  et  $u_\varepsilon$  lui-même. En mécanique, la détermination du module d'Young et du coefficient de Poisson d'un matériau en est un exemple. Le correcteur est seulement ensuite récupéré par une reconstruction locale.

Concluons en mentionnant que le cas de l'approximation par la « meilleure » matrice constante examiné ici est bien sûr un cas simple. On peut imaginer une stratégie similaire en utilisant, si nécessaire, une matrice « basse fréquence ».

## Références

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, 1978.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, A definition of the ground state energy for systems composed of infinitely many particles, *Commun. Partial Differ. Equ.* 28 (1–2) (2003) 439–475.
- [3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, *J. Math. Pures Appl.* 88 (2007) 34–63.
- [4] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects, *Milan J. Math.* 80 (2012) 351–367.
- [5] A. Blasselle, *Modélisation mathématique de la peau*, Thèse de l'Université Paris-6, 2011.
- [6] A. Bourgeat, M. Quintard, S. Whitaker, Eléments de comparaison entre la moyenne d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II* 306 (1988) 463–466.
- [7] L.J. Durlofsky, Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media, *Water Resour. Res.* 27 (1991) 699–708.
- [8] Y. Efendiev, T. Hou, *Multiscale Finite Element Method, Theory and Applications*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, vol. 4, Springer, New York, 2009.
- [9] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuke, *FreeFem++ (manual)*, <http://www.freefem.org>, 2007.
- [10] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [11] C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, en préparation.