C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 813–816

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbres de Lie/Géométrie algébrique

La fonctorialité d'Arthur–Langlands locale géométrique et la correspondance de Howe au niveau Iwahori

Geometric local Arthur–Langlands functoriality and Howe correspondence at the Iwahori level

Banafsheh Farang-Hariri

Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines (UVSQ), bâtiment Fermat, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 18 septembre 2012
Accepté le 27 septembre 2012
Disponible sur Internet le 22 octobre 2012

Présenté par Gérard Laumon

RÉSUMÉ

On énonce une conjecture sur la fonctorialité d'Arthur–Langlands géométrique locale au niveau Iwahori. Étant donné un morphisme $\check{G} \times \mathrm{SL}_2 \to \check{H}$ de groupes Langlands duaux sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on construit un bimodule sur les algèbres de Hecke affines étendues de G et H et on conjecture qu'il réalise la fonctorialité de Langlands géométrique locale au niveau Iwahori. On énonce ensuite une seconde conjecture reliant ce bimodule au bimodule réalisant la correspondance de Howe géométrique au niveau Iwahori. Cette conjecture est vérifiée pour les paires duales réductives $(G = \mathbf{GL}_1, H = \mathbf{GL}_m)$.

ABSTRACT

We state a conjecture on the geometric local Arthur–Langlands functoriality at the Iwahori level. Given a morphism $\check{G} \times \mathrm{SL}_2 \to \check{H}$ of Langlands dual groups over $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, we construct a bimodule over the affine extended Hecke algebras of G and H which should realize the geometric local Langlands functoriality at the Iwahori level. We state a second conjecture relating this bimodule and the bimodule arising in the geometric Howe correspondence at the Iwahori level. This conjecture is verified for all dual reductive pairs $(G = \mathbf{GL}_1, H = \mathbf{GL}_m)$.

1. Introduction

L'un des buts majeurs du programme de Langlands est d'établir le principe de fonctorialité reliant les représentations automorphes de groupes différents. Ce principe a été le sujet de nombreuses recherches récentes, et la fonctorialité de Langlands a été démontrée dans de nombreux cas particuliers. Les travaux récents par exemple dans [4,7,8,13,15], sur la formule des traces, le lemme fondamental et la géométrisation de ceux-ci ont été des avancées considérables vers la résolution de la conjecture de fonctorialité générale.

Dans cette Note on énonce une conjecture selon laquelle la fonctorialité d'Arthur–Langlands locale géométrique au niveau Iwahori associée à certains morphismes $\check{G} \times \mathrm{SL}_2 \to \check{H}$ devrait être donnée par un noyau explicite, à savoir le K_0 cohérent d'un champ algébrique $\mathcal{X}$ construit à partir des résolutions de Springer des cônes nilpotents de $\check{H}$ et $\check{G}$.

Adresse e-mail : banafsheh.farang-hariri@uvsq.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.09.021

La correspondance de Howe classique ou géométrique est connue pour réaliser la fonctorialité de Langlands dans des cas particuliers (cf. [2,9,11,14]). En suivant ce principe, on relie le noyau explicite construit auparavant et le noyau décrivant la correspondance de Howe.

1.1. L'énoncé de la conjecture sur la fonctorialité d'Arthur–Langlands locale au niveau Iwahori

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p et ℓ un nombre premier différent de p. Notons F le corps $k((t))$ des séries de Laurent à coefficients dans k. Soient G, H deux groupes réductifs connexes sur k et $\check{G}$, $\check{H}$ leurs duaux de Langlands sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Supposons de plus que $[\check{G},\check{G}]$ et $[\check{H},\check{H}]$ sont simplement connexes. Soit $\check{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\check{G}$, $\mathcal{B}_{\check{G}}$ la variété des sous algèbres de Borel et $\mathcal{N}_{\check{G}}$ le cône nilpotent dans $\check{\mathfrak{g}}$. La résolution de Springer $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}$ de $\mathcal{N}_{\check{G}}$ est donnée par

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} = \{(x,\mathfrak{b}) \in \mathcal{N}_{\check{G}} \times \mathcal{B}_{\check{G}} \mid x \in \mathfrak{b}\}.$$

On note $\mu : \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} \to \mathcal{N}_{\check{G}}$ le morphisme de Springer. Soit s la coordonnée standard du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On fait agir $\mathbb{G}_m$ sur $\check{\mathfrak{g}}$ exigeant que s envoie un élément x de $\check{\mathfrak{g}}$ sur $s^{-2}x$. De même on définit une action de $\check{G} \times \mathbb{G}_m$ sur $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}$ par la formule suivante :

$$(g,s).(x,\mathfrak{b}) = (s^{-2}gxg^{-1}, g\mathfrak{b}g^{-1}).$$

Le morphisme μ devient alors $\check{G} \times \mathbb{G}_m$-équivariant. La variété de Steinberg est définie par

$$Z_{\check{G}} = \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} \times_{\mathcal{N}_{\check{G}}} \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} = \{(x,\mathfrak{b},\mathfrak{b}') \mid x \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'\}.$$

L'algèbre de Hecke affine étendue $\mathbb{H}_G$ est un $\mathbb{Z}[s,s^{-1}]$-module et on dispose de l'isomorphisme de Kazhdan–Lusztig [5, Théorème 7.2.5] de $\mathbb{Z}[s,s^{-1}]$-modules entre l'algèbre de Hecke affine étendue $\mathbb{H}_G$ et la K-théorie $\check{G} \times \mathbb{G}_m$-équivariante $K^{\check{G}\times\mathbb{G}_m}(Z_{\check{G}})$ de la variété de Steinberg $Z_{\check{G}}$.

Étant donné un morphisme de groupes $\check{G} \times \mathrm{SL}_2 \to \check{H}$, notons η (resp. ξ) sa première (resp. seconde) composante. Soit $\alpha : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}_2$ le tore maximal standard de SL_2 envoyant un élément x sur $\mathrm{diag}(x,x^{-1})$. Notons $\sigma : \check{G} \times \mathbb{G}_m \to \check{H}$ la restriction du morphisme $\check{G} \times \mathrm{SL}_2 \to \check{H}$ par $\mathrm{id} \times \alpha$. Par abus de notation l'image d'un élément g de $\check{G}$ par le morphisme η sera encore notée g, il en sera de même pour l'application induite au niveau des algèbres de Lie. Soit $\overline{\sigma} : \check{G} \times \mathbb{G}_m \to \check{H} \times \mathbb{G}_m$ le morphisme dont la première composante est σ et la seconde est la projection $\mathrm{pr}_2 : \check{G} \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$. é par $\mathrm{R}(\check{G} \times \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\mathrm{R}(\check{G})[s,s^{-1}]$. Soit e l'élément nilpotent usuel dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ de SL_2, $d\xi : \mathfrak{sl}_2 \to \check{\mathfrak{h}}$ le morphisme linéarisé associé à ξ entre les algèbres Lie correspondantes et $x = d\xi(e)$.

Considérons le morphisme $f : \mathcal{N}_{\check{G}} \to \mathcal{N}_{\check{H}}$ envoyant un élément z dans $\mathcal{N}_{\check{G}}$ sur $x + z$ (qui est bien un élément de $\mathcal{N}_{\check{H}}$). L'égalité $ses^{-1} = s^2e$ entraîne que le morphisme f est $\overline{\sigma}$-équivariant et induit un morphisme de champs quotients :

$$\overline{f} : \mathcal{N}_{\check{G}}/(\check{G} \times \mathbb{G}_m) \to \mathcal{N}_{\check{H}}/(\check{H} \times \mathbb{G}_m).$$

De plus, la résolution de Springer $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{H}} \to \mathcal{N}_{\check{H}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} \to \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}$) est $(\check{H} \times \mathbb{G}_m)$-équivariante (resp. $\check{G} \times \mathbb{G}_m$-équivariante). Ceci nous permet de définir le produit fibré de champs quotients suivant :

$$\mathcal{X} = (\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}/(\check{G} \times \mathbb{G}_m)) \times_{\mathcal{N}_{\check{H}/(\check{H}\times\mathbb{G}_m)}} (\tilde{\mathcal{N}}_{\check{H}}/(\check{H} \times \mathbb{G}_m)).$$

La K-théorie de ce champ $\mathcal{X}$ est naturellement un module sous l'action des deux algèbres associatives $K^{\check{H}\times\mathbb{G}_m}(Z_{\check{H}})$ et $K^{\check{G}\times\mathbb{G}_m}(Z_{\check{G}})$, l'action étant définie par convolution au niveau de la K-théorie. D'après l'isomorphisme de Kazhdan–Lusztig énoncé précédemment, ces deux algèbres sont isomorphes aux algèbres de Hecke affines étendues $\mathbb{H}_H$ et $\mathbb{H}_G$ de H et G respectivement. Par conséquent $K(\mathcal{X})$ est naturellement un bimodule sous l'action de $\mathbb{H}_H$ et $\mathbb{H}_G$.

Conjecture 1.1. *(Voir [6].) Le bimodule sous l'action des algèbres de Hecke affines étendues $\mathbb{H}_G$ et $\mathbb{H}_H$ réalisant la fonctorialité d'Arthur–Langlands géométrique locale au niveau Iwahori pour le morphisme $\sigma : \check{G} \times \mathbb{G}_m \to \check{H}$ s'identifie avec $K(\mathcal{X})$.*

Si $G = H$ alors le morphisme ξ est trivial, le champ $\mathcal{X}$ s'identifie avec $Z_{\check{G}}$ et $K(\mathcal{X})$ s'identifie avec l'algèbre de Hecke affine étendue de H. Dans ce cas $K(\mathcal{X})$ est un module libre de rang un sous l'action des deux algèbres de Hecke affines étendues.

1.2. La relation entre la fonctorialité et la correspondance de Howe géométrique au niveau Iwahori

Dans cette section on propose un lien conjectural entre le bimodule $K(\mathcal{X})$ construit dans la section précédente et le bimodule réalisant la correspondance de Howe locale géométrique au niveau Iwahori. De plus, cette conjecture devient un théorème dans le cas des groupes linéaires $\mathbf{GL}_1$ et $\mathbf{GL}_m$.

Supposons que la caractéristique du corps k soit différente de 2. Considérons une paire duale réductive (G, H) sur k dans un certain groupe symplectique et supposons de plus que le revêtement métaplectique soit scindé au dessus de $G(F)$ et $H(F)$ (pour plus de détails voir [12]). Dans [10], les auteurs ont introduit une catégorie de Weil notée $\mathcal{W}$ munie d'une action de $G(F)$ et $H(F)$. Cette catégorie est une version géométrique de la restriction de la représentation de Weil à $G(F) \times H(F)$. On peut considérer le groupe de Grothendieck de l'espace des invariants $\mathcal{W}^{I_G \times I_H}$ sous l'action des deux sous groupes d'Iwahori I_G de $G(F)$ et I_H de $H(F)$. Le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$ est naturellement un bimodule sous l'action des deux algèbres de Hecke–Iwahori $\mathcal{H}_{I_H}$ et $\mathcal{H}_{I_G}$. D'autre part, l'algèbre de Hecke–Iwahori $\mathcal{H}_{I_H}$ s'identifie avec $\mathbb{H}_H \otimes_{\mathbb{Z}[s,s^{-1}]} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ via le morphisme $\mathbb{Z}[s, s^{-1}] \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ envoyant s sur $q^{1/2}$ où q est le cardinal du corps résiduel de F. On peut alors formuler la conjecture suivante :

Conjecture 1.2. *(Voir [6].) Le bimodule $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$ sous l'action des deux algèbres de Hecke affines étendues $\mathbb{H}_H$ et $\mathbb{H}_G$ réalisant la correspondance de Howe au niveau Iwahori est isomorphe à $K(\mathcal{X})$.*

On peut espérer qu'un tel isomorphisme K-théorique se généralise au niveau des catégories $\mathcal{W}^{I_G \times I_H}$ et $\mathcal{X}$ elles-mêmes dans l'esprit des travaux récents dans [1] et [3]. Si on se limite au cas des paires duales réductives de type II, *i.e.* groupes linéaires $G = \mathbf{GL}_n$ et $H = \mathbf{GL}_m$ avec $n \leqslant m$, l'étude des deux bimodules $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$ et $K(\mathcal{X})$ est plus accessible.

Théorème 1.3. *(Voir [6].) La conjecture 1.2 est vraie pour les paire duales $(\mathbf{GL}_1, \mathbf{GL}_m)$, pour tout entier m.*

On présente ici une idée de la preuve du théorème 1.3. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F, $L_0 = k^n$, $U_0 = k^m$ $(n \leqslant m)$, $\Pi_0 = L_0 \otimes U_0$ et $\Pi = \Pi_0(\mathcal{O})$. Notons $G = \mathbf{GL}(L_0)$ et $H = \mathbf{GL}(U_0)$. La version géométrique de l'espace des invariants sous l'action de $I_G \times I_H$ de la restriction de la représentation de Weil à $G(F) \times H(F)$ est réalisée par la catégorie des faisceaux ℓ-adiques pervers $I_G \times I_H$-équivariants $P_{I_G \times I_H}(\Pi(F))$ sur $\Pi(F)$. L'action par convolution des algèbres de Hecke–Iwahori au niveau classique de la théorie des représentations se géométrise en des foncteurs de Hecke définissant une action de la catégorie des faisceaux pervers I_G-équivariants (resp. I_H-équivariants) $P_{I_G}(\mathcal{F}l_G)$ (resp. $P_{I_H}(\mathcal{F}l_H)$) sur la variété de drapeaux affine $\mathcal{F}l_G$ (resp. $\mathcal{F}l_H$) sur la catégorie $P_{I_G \times I_H}(\Pi(F))$. Quand on se limite au cas $n = 1$, ces foncteurs de Hecke sont calculables explicitement et on peut décrire complètement la structure de module de $K(P_{I_G \times I_H}(\Pi(F)))$ sous l'action de $K(P_{I_G}(\mathcal{F}l_G)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $K(P_{I_H}(\mathcal{F}l_H)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, ces deux algèbres étant isomorphes respectivement à $\mathcal{H}_{I_G}$ et $\mathcal{H}_{I_H}$. D'après Iwahori et Matsumoto, l'algèbre de Hecke–Iwahori $\mathcal{H}_{I_G}$ s'identifie avec $\mathbb{H}_G \otimes_{\mathbb{Z}[s,s^{-1}]} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et on est ainsi ramené à démontrer qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{H}_H$-modules entre le bimodule $K(\mathcal{X})$ apparaissant dans la conjecture 1.1 et le bimodule réalisant la correspondance de Howe géométrique $K(DP_{I_G \times I_H}(\Pi(F)))$, où DP est une version graduée de la catégorie des faisceaux pervers P qui tient compte de l'action de $\mathbb{G}_m$. Quand $n = 1$, le groupe $K(\mathcal{X})$ s'identifie avec la K-théorie $\check{G} \times \mathbb{G}_m$-équivariante $K^{\check{G} \times \mathbb{G}_m}(\mathcal{B}_{\check{H},x})$ de la fibre de Springer $\mathcal{B}_{\check{H},x}$ au dessus d'un élément sous-régulier nilpotent x. On construit alors une base adaptée de $K^{\check{G} \times \mathbb{G}_m}(\mathcal{B}_{\check{H},x})$ à l'aide des fibrés en droites $\check{G} \times \mathbb{G}_m$-équivariants qui est différente de la base construit par Lusztig. On calcule explicitement l'action de $\mathbb{H}_H$ sur cette base adaptée. On construit un isomorphisme explicite de $\mathbb{H}_H$-modules entre $K^{\check{G} \times \mathbb{G}_m}(\mathcal{B}_{\check{H},x})$ et $K(DP_{I_G \times I_H}(\Pi(F)))$. Pour terminer la preuve, on démontre que l'anneau des représentations $\mathrm{R}(\check{H})$ de $\check{H}$ agit via le morphisme de restriction géométrique $\mathrm{Res}^\sigma : \mathrm{R}(\check{H}) \to \mathrm{R}(\check{G} \times \mathbb{G}_m)$ provenant du morphisme σ.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce texte ont été réalisés pendant la préparation de la thèse de l'auteur sous la direction de S. Lysenko et ont été rédigés pendant un séjour à l'Institut Mathématiques de Versailles.

Références

[1] S. Arkhipov, R. Bezrukavnikov, Perverse sheaves on affine flags and Langlands dual group, with an appendix by Bezrukavrikov and Ivan Mirković, Israel J. Math. 170 (2009) 135–183.
[2] J. Arthur, The principle of functoriality, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 40 (1) (2003) 39–53.
[3] R. Bezrukavnikov, On two geometric realizations of an affine Hecke algebra, http://arxiv.org/abs/1209.0403, pp. 1–45.
[4] P.-H. Chaudouard, G. Laumon, Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques, Compos. Math. 146 (2010) 1416–1506.
[5] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation Theory and Complex Geometry, Modern Birkhäuser Classics, reprint of the 1997 edition, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010, x+495 pp.
[6] B. Farang-Hariri, La correspondance de Howe géométrique modérément ramifiée pour les paires duales de type II dans le cadre du programme de Langlands géométrique, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 2012, 126 pp.
[7] E. Frenkel, R. Langlands, B. Ngô, Formule des traces et fonctorialité : le début d'un programme, Ann. Sci. Math. Québec 34 (2) (2010) 199–243.
[8] E. Frenkel, B. Ngô, Geometrization of trace formulas, Bull. Math. Sci. 1 (1) (2011) 129–199.
[9] S. Kudla, On the local theta-correspondence, Invent. Math. 83 (1986) 229–255.
[10] V. Lafforgue, S. Lysenko, Geometric Weil representation: local field case, Compos. Math. 145 (2009) 56–88.
[11] S. Lysenko, Geometric theta-lifting for the dual pair $\mathbb{SO}_{2m}, \mathbb{S}\mathrm{p}_{2n}$, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 44 (2011) 427–493.
[12] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, J.-L. Waldspurger, Correspondances de Howe sur un corps p-adique, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1987, viii+163 pp.

[13] B. Ngô, Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 111 (2010) 1–169.
[14] S. Rallis, Langlands' functoriality and the Weil representation, Amer. J. Math. 104 (1982) 469–515.
[15] J.-L. Waldspurger, À propos du lemme fondamental pondéré tordu, Math. Ann. 343 (2009) 103–174.