C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 731–735

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire

Les graphes (-2)-monohémimorphes

(-2)-monohemimorphic graphs

Badr Boushabi, Abderrahim Boussaïri

Faculté des sciences Aïn-Chock, département de mathématiques et informatique, Km 8 route d'El Jadida, BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 8 mai 2012
Accepté après révision le 14 septembre 2012
Disponible sur Internet le 2 octobre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Nous considérons des graphes finis, simples et non orientés. Le *complément* d'un graphe G est le graphe $\overline{G}$ dont les sommets sont ceux de G et tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ lorsqu'ils ne le sont pas dans G. Un graphe est dit *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complément. Deux graphes G et H sont *hémimorphes* si G est isomorphe à H ou à $\overline{H}$. Un graphe G à n sommets est (-2)-*monohémimorphe* si tous ses sous-graphes induits à $n-2$ sommets sont hémimorphes. Nous montrons que les seuls graphes (-2)-monohémimorphes d'au moins 5 sommets sont les graphes complets, vides et les graphes arête-transitifs et auto-complémentaires.

A B S T R A C T

We consider only finite, simple and undirected graphs. The *complement* of a graph G is the graph $\overline{G}$ having the same vertices as G and such that two vertices are adjacent in $\overline{G}$ when they are not in G. A graph is *self-complementary* if it is isomorphic to its complement. Two graphs G and H are *hemimorphic* if G is isomorphic to H or to $\overline{H}$. A graph G on n vertices is (-2)-*monohemimorphic* if all its induced subgraphs on $n-2$ vertices are hemimorphic. We prove that the only (-2)-monohemimorphic graphs with at least 5 vertices are the complete graphs, the empty graphs and the graphs which are edge-transitive and self-complementary.

Abridged English version

The notion of monomorphy was introduced by R. Fraïssé [4] for relations. In the case of tournaments, the most important problem is the characterization of $(-k)$-monomorphic tournaments. A tournament T on n vertices is $(-k)$-*monomorphic* if all its induced subtournaments on $n-k$ vertices are isomorphic. For example, a total order is always $(-k)$-monomorphic. The problem of the characterization of (-1)-monomorphic tournaments proposed by A. Kotzig (see [3], problem 43, p. 252) is still open. For $k=2$, it is easy to see that a tournament whose automorphism group acts transitively on the set of its arcs is (-2)-monomorphic. Such tournaments are called *arc-transitive* and were characterized by W. Kantor [7] and by J.L. Berggren [1]. Moreover, M. Jean [6] proved that a (-2)-monomorphic tournament is a total order or an *arc-transitive* tournament. A simple proof of this result was found later by M. Pouzet [9] using some elementary combinatorial techniques. Later, Y. Boudabbous [2] proposed a weak notion of monomorphy using the notion of hemimorphy instead of isomorphy. Let T be a tournament, the *converse* of T is the tournament T^* obtained from T by reversing all its arcs. Two tournaments

Adresses e-mail : b.boushabi@gmail.com (B. Boushabi), aboussairi@hotmail.com (A. Boussaïri).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.09.009

T and T' are *hemimorphic* if T is isomorphic to T' or T'^*. A tournament on n vertices is $(-k)$-*monohemimorphic* if all its induced subtournaments on $n-k$ vertices are hemimorphic. Y. Boudabbous [2] proved that a (-2)-monohemimorphic tournament is necessarily (-2)-monomorphic. In this Note, we study a similar problem for finite simple and undirected graphs. A *graph* is an ordered pair $G=(V,E)$ where V is a set and E is a subset of the set $\binom{V}{2}$ of two-element subsets of V; elements of V and E are the *vertices* and *edges* of G; given G the sets V and E are denoted by $V(G)$ and $E(G)$. For example, for a set V, $(V,\binom{V}{2})$ is the *complete graph* on V, whereas $(V,\emptyset)$ is the *empty graph*.

Let G be a graph. Two vertices x and y of G are *adjacent* if $\{x,y\}\in E(G)$. The *complement* of G is the graph $\overline{G}$ such that $V(\overline{G})=V(G)$ and $E(\overline{G})=\binom{V(G)}{2}\setminus E(G)$. For a subset X of $V(G)$, we denote by $G[X]=(X,\binom{X}{2}\cap E(G))$ the *subgraph* of G *induced* by X and by $G-X$ the subgraph of G induced by $V\setminus X$.

Given two graphs G and H, a bijection f from $V(G)$ onto $V(H)$ is an *isomorphism* from G onto H provided that for any $x,y\in V(G)$, $\{x,y\}\in E(G)$ if and only if $\{f(x),f(y)\}\in E(H)$. Two graphs are then *isomorphic* if there exists an isomorphism from one onto the other. A graph is *self-complementary* if it is isomorphic to its complement. An *automorphism* of a graph G is an isomorphism from G into itself. The set of automorphisms of a graph G is a group, called the *automorphism group* of G and denoted by $Aut(G)$. If the group $Aut(G)$ acts transitively on $V(G)$ (resp. on $E(G)$), then G is called a *vertex-transitive* (resp. *edge-transitive*) graph. A graph which is both vertex-transitive and edge-transitive is called a *symmetric* graph.

A graph G on n vertices is $(-k)$-*monomorphic* if all its induced subgraphs with $n-k$ vertices are isomorphic. It is well known that a graph with at least two vertices is (-1)-monomorphic if and only if it is vertex-transitive, and easy to show that a (-2)-monomorphic graph with at least 4 vertices is a complete graph or an empty graph.

Let G and H be two graphs. An *hemimorphism* from G onto H is an isomorphism from G onto H or onto $\overline{H}$. A graph G on n vertices is $(-k)$-*monohemimorphic* if all its induced subgraphs with $n-k$ vertices are hemimorphic. Clearly, the complete graphs or the empty graphs are (-2)-monohemimorphic Moreover, it is easy to see that a self-complementary edge-transitive graph is (-2)-monohemimorphic. In this Note, we establish the following:

Theorem 1. *A graph with at least* 5 *vertices is* (-2)-*monohemimorphic if and only if it is a complete graph, an empty graph or it is a self-complementary and edge-transitive graph.*

It is not difficult to prove that a graph which is self-complementary and edge-transitive is also vertex-transitive and then a symmetric graph. W. Peisert [8] gives a full description of self-complementary symmetric graphs and their automorphism groups. In particular, he proved that apart the well-known Paley graphs, there is another infinite family of self-complementary symmetric graphs and, in addition, one more graph not belonging to any of these families.

1. Introduction

Un *graphe* (simple, non orienté) G est un couple (V,E) où V est un ensemble et E est une partie de l'ensemble $\binom{V}{2}$ des paires d'éléments de V ; les éléments de V et E sont les *sommets* et les *arêtes* de G ; pour un graphe G, les ensembles V et E sont notés $V(G)$ et $E(G)$. Par exemple, étant donné un ensemble V, le graphe $(V,\binom{V}{2})$ est le graphe *complet* sur V, tandis que le graphe $(V,\emptyset)$ est le graphe *vide*. Le *complément* de G est le graphe $\overline{G}$ tel que $V(\overline{G})=V(G)$ et $E(\overline{G})=\binom{V(G)}{2}\setminus E(G)$. Deux sommets x et y de G sont *adjacents* si $\{x,y\}\in E(G)$. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet x est noté $N_G(x)$; le *degré* de x est $d_G(x)=|N_G(x)|$. Le graphe G est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré. Soit X une partie de $V(G)$; le *sous-graphe* de G *induit* sur X est $G[X]=(X,\binom{X}{2}\cap E(G))$; le sous-graphe induit sur $V\setminus X$ est noté $G-X$. Une *clique* (resp. un *stable*) de G est un ensemble de sommets de G deux à deux adjacents (resp. non adjacents). Une partie W de $V(G)$ est dite *homogène* si W est une clique ou un stable.

Soient G et H deux graphes. Une *bijection* f de $V(G)$ sur $V(H)$ est un isomorphisme de G sur H si pour tous $x,y\in V(G)$, $\{x,y\}\in E(G)$ si et seulement si $\{f(x),f(y)\}\in E(G)$. *Un anti-isomorphisme* de G sur H est un isomorphisme de G sur $\overline{H}$. Les graphes G et H sont *isomorphes* (resp. *anti-isomorphes*) s'il existe un isomorphisme (resp. un anti-isomorphisme) de l'un sur l'autre. Un *hémimorphisme* de G sur H est un isomorphisme de G sur H ou de G sur $\overline{H}$. Les graphes G et H sont *hémimorphes* s'il existe un hémimorphisme de l'un sur l'autre. Un *automorphisme* d'un graphe G est un isomorphisme de G sur lui même. Les automorphismes d'un graphe G forment un groupe noté $Aut(G)$. Si le groupe $Aut(G)$ agit transitivement sur $V(G)$ (resp. sur $E(G)$), nous disons que G est un graphe *sommet-transitif* (resp. *arête-transitif*). Un graphe est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complément. Par exemple, le graphe C_5 tel que $V(C_5)=\{1,2,3,4,5\}$ et $E(C_5)=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$ est arête-transitif, auto-complémentaire et sommet-transitif.

Un graphe G est $(-k)$-*monomorphe* (resp. $(-k)$-*monohémimorphe*) si les sous-graphes de G induits par les parties de $V(G)$ à $n-k$ éléments sont tous isomorphes (resp. hémimorphes). Il est bien connu qu'un graphe à au moins 2 sommets est (-1)-monomorphe si et seulement si il est sommet-transitif et on peut vérifier aisement qu'un graphe (-2)-monomorphe G avec $|V(G)|\geqslant 4$ est complet ou vide. Par ailleurs, il est facile de voir qu'un graphe arête-transitif et auto-complémentaire est (-2)-monohémimorphe. Dans cette Note, nous établissons le théorème suivant :

Théorème 1. *Un graphe ayant au moins* 5 *sommets est* (-2)-*monohémimorphe si et seulement si il est complet, vide ou un graphe auto-complémentaire et arête-transitif.*

2. Propriétés des graphes (-2)-monohémimorphes

Soit G un graphe et $k \geqslant 1$. Notons $\Delta^{(k)}(G)$ le nombre de parties homogènes de G à k éléments. Pour tous sommets $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de G, notons par $\Delta^{(k)}_{x_1 \ldots x_r}(G)$ le nombre de parties homogènes de G à k éléments contenant $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Dans le cas où G est un graphe (-2)-monohémimorphe à n sommets, le nombre des parties homogènes de G à k éléments contenues dans une partie quelconque X de $V(G)$ à $n-2$ éléments est indépendant de X. Ce nombre sera noté $\Delta^{(k)}_{-2}(G)$.

En adaptant la technique utilisée en [9], on obtient le résultat suivant :

Lemme 2. *Soit G un graphe (-2)-monohémimorphe à n sommets avec $n \geqslant 5$.*

(i) *Pour $x \in V(G)$, on a* $\Delta^{(3)}_x(G) = \frac{3(n-1)}{(n-3)(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$;
(ii) *Pour $x \neq y \in V(G)$, on a* $\Delta^{(3)}_{xy}(G) = \frac{6}{(n-3)(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$.

Démonstration. Soit $x \in V(G)$. On a $\Delta^{(3)}(G - x) = \frac{1}{(n-4)} \sum_{z \neq x} \Delta^{(3)}(G - \{x, z\}) = \frac{(n-1)}{(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$. Il s'ensuit que $\Delta^{(3)}(G) = \frac{1}{n-3} \sum_{x \in V(G)} \Delta^{(3)}(G - x) = \frac{n(n-1)}{(n-3)(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$ et par suite $\Delta^{(3)}_x(G) = \Delta^{(3)}(G) - \Delta^{(3)}(G - x) = \frac{3(n-1)}{(n-3)(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$. Soient $x \neq y \in V(G)$. On a $\Delta^{(3)}_x(G - y) = \Delta^{(3)}(G - y) - \Delta^{(3)}(G - \{x, y\})$. Donc $\Delta^{(3)}_{xy}(G) = \Delta^{(3)}(G) - \Delta^{(3)}_x(G - y) - \Delta^{(3)}_y(G - x) - \Delta^{(3)}(G - \{x, y\}) = \Delta^{(3)}(G) - \Delta^{(3)}(G - x) - \Delta^{(3)}(G - y) + \Delta^{(3)}(G - \{x, y\})$. Par suite, $\Delta^{(3)}_{xy}(G) = \frac{6}{(n-3)(n-4)} \Delta^{(3)}_{-2}(G)$. $\square$

Dans toute la suite, nous utilisons les notations suivantes. Si G est un graphe (-2)-monohémimorphe à au moins 5 sommets, on note $\Delta^{(3)}_1(G)$ le nombre de parties homogènes de G à 3 éléments contenant un élément arbitraire de $V(G)$, et $\Delta^{(3)}_2(G)$ le nombre de parties homogènes de G à 3 éléments contenant deux éléments distincts et arbitraires de $V(G)$. Par ailleurs, pour $x \neq y \in V(G)$, on pose $A_{xy} = N_G(x) \cap N_G(y)$, $B_{xy} = N_G(x) \cap N_{\overline{G}}(y)$, $C_{xy} = N_{\overline{G}}(x) \cap N_G(y)$, $D_{xy} = N_{\overline{G}}(x) \cap N_{\overline{G}}(y)$.

Lemme 3. *Soit G un graphe (-2)-monohémimorphe à au moins 5 sommets, x, y, z, t des sommets de G et f un hémimorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$. Alors $\Delta^{(3)}_{uxy}(G) = \Delta^{(3)}_{f(u)zt}(G)$ pour tout sommet u distinct de x et de y. Il s'ensuit que*

(i) *Si $\{x, y\}, \{z, t\} \in E(G)$ alors $f(A_{xy}) = A_{zt}$.*
(ii) *Si $\{x, y\}, \{z, t\} \notin E(G)$ alors $f(D_{xy}) = D_{zt}$.*
(iii) *Si $\{x, y\} \in E(G)$ et $\{z, t\} \notin E(G)$ alors $f(A_{xy}) = D_{zt}$.*
(iv) *Si $\{x, y\} \notin E(G)$ et $\{z, t\} \in E(G)$ alors $f(D_{xy}) = A_{zt}$.*

Démonstration. Pour $u \in V(G) - \{x, y\}$, on a $\Delta^{(3)}_{uxy}(G) = \Delta^{(3)}_u(G - \{x, y\}) + \Delta^{(3)}_{ux}(G) + \Delta^{(3)}_{uy}(G) - \Delta^{(3)}_u(G) = \Delta^{(3)}_u(G - \{x, y\}) + 2\Delta^{(3)}_2(G) - \Delta^{(3)}_1(G)$. De même, $\Delta^{(3)}_{f(u)zt}(G) = \Delta^{(3)}_{f(u)}(G - \{z, t\}) + 2\Delta^{(3)}_2(G) - \Delta^{(3)}_1(G)$. Or f est un hémimorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$, donc, $\Delta^{(3)}_u(G - \{x, y\}) = \Delta^{(3)}_{f(u)}(G - \{z, t\})$ et par suite $\Delta^{(3)}_{uxy}(G) = \Delta^{(3)}_{f(u)zt}(G)$. $\square$

Remarque 1. Soit G un graphe à 5 sommets. Si $\Delta^{(3)}(G) = 0$ alors G est isomorphe au cycle C_5. Si $\Delta^{(3)}(G) \geqslant 1$ et si G est (-2)-monohémimorphe alors toute partie de $V(G)$ à 3 éléments est une partie homogène de G et par suite G est le graphe complet ou le graphe vide.

Lemme 4. *Soit G un graphe (-2)-monohémimorphe à n sommets avec $n \geqslant 5$. Pour tous sommets $x \neq y$, $z \neq t$, les graphes $G - \{x, y\}$ et $G - \{z, t\}$ sont isomorphes si et seulement si $\{x, y\}, \{z, t\} \in E(G)$ ou si $\{x, y\}, \{z, t\} \notin E(G)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $G - \{x, y\}$ et $G - \{z, t\}$ sont isomorphes si $\{x, y\}, \{z, t\} \in E(G)$ ou si $\{x, y\}$, $\{z, t\}$. En effet, si la réciproque est fausse, c'est-à-dire s'il existe des sommets $x_0 \neq y_0$, $z_0 \neq t_0$ avec $G - \{x_0, y_0\}$ et $G - \{z_0, t_0\}$ isomorphes, mais par exemple, $\{x_0, y_0\} \in E(G)$ et $\{z_0, t_0\} \notin E(G)$. Le graphe G serait alors (-2)-monomorphe G et par suite c'est le graphe complet ou le graphe vide, contradiction.

Par ailleurs, quitte à remplacer G par $\overline{G}$, il suffit de prouver le résultat lorsque $\{x, y\}, \{z, t\} \in E(G)$. Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe un anti-isomorphisme f de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$. Nous allons obtenir une contradiction en distinguant deux cas.

Cas 1. $\Delta^{(3)}_2(G) \geqslant 2$. Dans ce cas, on a $|A_{xy}| \geqslant 2$. Soit alors $a \neq a' \in A_{xy}$. D'après le lemme 3, on a $f(a), f(a') \in A_{zt}$. Si $\{a, a'\} \in E(G)$ alors $\Delta^{(3)}_{aa'}(G - \{x, y\}) = \Delta^{(3)}_2(G) - 2$. De plus, $\{f(a), f(a')\} \notin E(G)$ car f est un anti-isomorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$, donc $\Delta^{(3)}_{f(a)f(a')}(G - \{z, t\}) = \Delta^{(3)}_2(G)$. Il s'ensuit que $\Delta^{(3)}_{aa'}(G - \{x, y\}) \neq \Delta^{(3)}_{f(a)f(a')}(G - \{z, t\})$ et ceci contredit le fait que f est un hémimorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$.

Cas 2. $\Delta_2^{(3)}(G) \leqslant 1$. Si $n = 5$, on conclut par la remarque 1. Si $n \geqslant 6$ alors $\Delta^{(3)}(G) \geqslant 1$ (c'est la première instance du théorème de Ramsey). Il s'ensuit que $\Delta_2^{(3)}(G) = 1$ et donc la famille $\mathcal{F}$ des parties homogènes à trois éléments de $V(G)$ est un système de Steiner. Il en résulte que $|\mathcal{F}| = \frac{1}{6}n(n-1)$ et que n est congru à 1 ou à 3 modulo 6. Par ailleurs, d'après la minoration du nombre des parties homogènes à trois éléments d'un graphe arbitraire, obtenue par A.W. Goodman [5], on a $|\mathcal{F}| \geqslant \frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$ et par suite $n \leqslant 9$. Il nous reste donc à exclure les cas $n = 7$ et $n = 9$. Nous procédons comme suit.

Fait 1. D_{uv} est une clique d'au plus deux éléments pour toute paire $\{u, v\} \in E(G)$. En effet, si d_1 et d_2 sont deux éléments distincts de D_{uv} et si la paire $\{d_1, d_2\}$ n'est pas une arête de G alors $\{d_1, d_2, u\}$ et $\{d_1, d_2, v\}$ sont deux parties homogènes de G ayant une paire en commun, ce qui contredit $\Delta_2^{(3)}(G) = 1$. Ainsi D_{uv} est une clique.

Supposons que D_{uv} contienne trois éléments distincts d_1, d_2, d_3. Soit w un élément de D_{ud_1}. Comme $\{d_1, d_2, d_3\}$ est une clique de G, cet élément est distinct de d_2 et d_3. Or $\Delta_{wu}^{(3)}(G) = 1$, donc $\{d_2, w\} \in E(G)$ et $\{d_3, w\} \in E(G)$. Mais alors $\{d_1, d_2, d_3\}$ et $\{d_1, d_2, w\}$ sont deux parties homogènes de G ayant une paire en commun. Contradiction.

Fait 2. $|f(D_{xy}) \cap D_{zt}| \leqslant 1$. En effet, si D_{xy} contient deux éléments distincts d, d' tels que $f(d), f(d') \in D_{zt}$, on a $\{d, d'\} \in E(G)$ car D_{xy} est une clique. Par ailleurs, f est un anti-isomorphisme donc $\{f(d), f(d')\} \notin E(G)$, ceci contredit le fait que D_{zt} est une clique.

Fait 3. $|B_{xy} \cup C_{xy}| \leqslant 2$. En vertu du fait 1, il suffit de montrer que $f(B_{xy} \cup C_{xy}) \subseteq D_{zt}$. Comme $\Delta_2^{(3)}(G) = 1$, on a $|A_{xy}| = 1$, $|A_{zt}| = 1$. Soient a, a' tels que $A_{xy} = \{a\}$ et $A_{zt} = \{a'\}$. D'après le lemme 3(i), on a $f(a) = a'$. Soit $u \in B_{xy} \cup C_{xy}$. Le sommet a n'est pas adjacent à u car $\Delta_{xa}^{(3)}(G) = \Delta_{ya}^{(3)}(G) = 1$. Par ailleurs, f est un anti-isomorphisme donc $f(a) = a'$ est adjacent à $f(u)$, et par suite $f(u) \notin B_{zt} \cup C_{zt}$ car $\Delta_{za'}^{(3)}(G) = \Delta_{ta'}^{(3)}(G) = 1$. Donc $f(u) \in D_{zt}$. Il en résulte que $f(B_{xy} \cup C_{xy}) \subseteq D_{zt}$ et par suite $|B_{xy} \cup C_{xy}| \leqslant |D_{zt}| \leqslant 2$.

D'après les faits 1, 2 et 3, on a $n = |A_{xy}| + |B_{xy} \cup C_{xy}| + |D_{xy}| + 2 \leqslant 7$. Donc $n = 7$, $|D_{xy}| = |D_{zt}| = 2$ et $|B_{xy} \cup C_{xy}| = |B_{zt} \cup C_{zt}| = 2$. Par suite $|E(G - \{x, y\})| = |E(G - \{z, t\})| = |E(G)| - 5$. Or $G - \{x, y\}$ est isomorphe à $\overline{G} - \{z, t\}$ et $|E(G - \{z, t\})| + |E(\overline{G} - \{z, t\})| = \binom{5}{2} = 10$, donc $|E(G - \{z, t\})| = |E(\overline{G} - \{z, t\})| = 5$. Il s'ensuit que pour tous $v \neq w \in V(G)$, $|E(G - \{v, w\})| = 5$ car G est (-2)-monohémimorphe. Soit $\alpha \in V(G)$. On a alors, $|E(G - \alpha)| = \frac{1}{n-3} \sum_{x \in V(G-\alpha)} |E(G - \{\alpha, x\})| = \frac{30}{4}$. D'où la contradiction. □

Notons qu'en vertu du lemme 4 si f est isomorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$ alors soit $\{x, y\}, \{z, t\} \in E(G)$ soit $\{x, y\}, \{z, t\} \notin E(G)$.

Corollaire 5. *Un graphe (-2)-monohémimorphe G à au moins 5 sommets est régulier.*

Démonstration. Si $|V(G)| = 5$, on conclut par la remarque 1. Supposons que $|V(G)| \geqslant 6$. Notons que si u et v sont deux sommets distincts d'un graphe quelconque G, on a $d_G(u) + d_G(v) = |E(G)| - |E(G - \{u, v\})| + G(uv)$ (notation dans laquelle $G(uv) = 1$ si $\{u, v\} \in E(G)$ et $G(uv) = 0$ sinon). Soit alors $x \neq y \in V(G)$. Comme $|V(G)| \geqslant 6$, on a $\Delta_2^{(3)}(G) \geqslant 1$ et par suite il existe $z \in V(G) - \{x, y\}$ tel que $\{x, y, z\}$ est une partie homogène de G. D'après le lemme 4, les graphes $G - \{x, y\}$, $G - \{x, z\}$ et $G - \{y, z\}$ ont le même nombre d'arêtes. Il s'ensuit que $d_G(y) + d_G(z) = d_G(x) + d_G(y) = d_G(x) + d_G(z)$. Par suite $d_G(x) = d_G(y)$. □

3. Preuve du théorème principal

Nous allons, à présent, démontrer le théorème principal de cette Note.

Démonstration. Les graphes complets et vides sont trivialement (-2)-monohémimorphes. Par ailleurs, il est facile de montrer que les graphes auto-complémentaires et arête-transitifs sont (-2)-monohémimorphes.

Réciproquement, soit G un graphe (-2)-monohémimorphe à au moins 5 sommets. Si $|V(G)| = 5$, on conclut par la remarque 1. Supposons, dans toute la suite, que $|V(G)| \geqslant 6$. Soit $\{x, y\} \in E(G)$ et $z \neq t \in V(G)$ et f un hémimorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$.

Fait 1. $f(B_{xy} \cup C_{xy}) = B_{zt} \cup C_{zt}$. En effet, d'après le corollaire 5, G est régulier, donc il existe $k \geqslant 1$ tel que $d_G(u) = k$ pour tout u de $V(G)$.

Cas 1. $\{z, t\} \in E(G)$. D'après le lemme 4, f un isomorphisme de $G - \{x, y\}$ sur $G - \{z, t\}$. On a alors pour tout $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$, $d_{G-\{x,y\}}(z) = d_{G-\{z,t\}}(f(z))$. Il s'ensuit que pour tout u de $V(G) \setminus \{x, y\}$, on a

$$d_{G-\{x,y\}}(u) = \begin{cases} k-2 & \text{si } u \in A_{xy} \\ k-1 & \text{si } u \in B_{xy} \cup C_{xy} \\ k & \text{si } u \in D_{xy} \end{cases} \quad \text{et} \quad d_{G-\{z,t\}}\big(f(u)\big) = \begin{cases} k-2 & \text{si } f(u) \in A_{zt} \\ k-1 & \text{si } f(u) \in B_{zt} \cup C_{zt} \\ k & \text{si } f(u) \in D_{zt} \end{cases}$$

Donc $f(A_{xy}) = A_{zt}$, $f(D_{xy}) = D_{zt}$ et $f(B_{xy} \cup C_{xy}) = B_{zt} \cup C_{zt}$.

Cas 2. $\{z,t\} \notin E(G)$. D'après le lemme 3, on a $f(A_{xy}) = D_{zt}$. Soit $a \in A_{xy}$. On a alors $d_{G-\{x,y\}}(a) = k-2$ et $d_{G-\{z,t\}}(f(a)) = k$ car $f(a) \in D_{zt}$. Donc f est forcément un anti-isomorphisme. Il s'ensuit que $d_{G-\{x,y\}}(a) = |V(G)| - 3 - d_{G-\{z,t\}}(f(a))$ et par conséquent, $|V(G)| = 2k+1$. Soit $d \in D_{xy}$. On a $d_{G-\{x,y\}}(d) = k = |V(G)| - 3 - d_{G-\{z,t\}}(f(d))$. Si $f(d) \in B_{zt} \cup C_{zt}$ alors $d_{G-\{z,t\}}(f(d)) = k-1$ et par suite $|V(G)| = 2k+2$, contradiction. Il en résulte que $f(d) \in A_{zt}$. Donc $f(D_{xy}) \subseteq A_{zt}$. Soit $q \in B_{xy} \cup C_{xy}$. On a $d_{G-\{x,y\}}(q) = k-1 = |V(G)| - 3 - d_{G-\{z,t\}}(f(q))$. Si $f(q) \in A_{zt}$ alors $d_{G-\{z,t\}}(f(q)) = k-2$ et par suite $|V(G)| = 2k$, contradiction. Il en résulte que $f(q) \in B_{zt} \cup C_{zt}$. Donc $f(B_{xy} \cup C_{xy}) \subseteq B_{zt} \cup C_{zt}$. Comme f est bijective, on aura $f(D_{xy}) = A_{zt}$ et $f(B_{xy} \cup C_{xy}) = B_{zt} \cup C_{zt}$.

Fait 2. $f(B_{xy}) = B_{zt}$ ou $f(B_{xy}) = C_{zt}$. En effet, supposons qu'il existe $b \neq b' \in B_{xy}$ tels que $f(b) \in B_{zt}$ et $f(b') \in C_{zt}$. On a alors $\Delta^{(3)}_{bb'}(G - \{x,y\}) = \Delta^{(3)}_2(G) - 1$ et $\Delta^{(3)}_{f(b)f(b')}(G - \{z,t\}) = \Delta^{(3)}_2(G)$ et ceci contredit le fait que f est un hémimorphisme de $G - \{x,y\}$ sur $G - \{z,t\}$. Donc $f(B_{xy}) \subseteq B_{zt}$ ou $f(B_{xy}) \subseteq C_{zt}$. Par ailleurs, on a $d_G(x) = |A_{xy}| + |B_{xy}| + 1$, $d_G(y) = |A_{xy}| + |C_{xy}| + 1$. Comme G est régulier, on a $|B_{xy}| = |C_{xy}|$.

Cas 1. $\{z,t\} \in E(G)$. Dans ce cas $d_G(z) = |A_{zt}| + |B_{zt}| + 1$, $d_G(t) = |A_{zt}| + |C_{zt}| + 1$.

Cas 2. $\{z,t\} \notin E(G)$. Alors $d_G(z) = |A_{zt}| + |B_{zt}|$, $d_G(t) = |A_{zt}| + |C_{zt}|$.

Comme G est régulier, dans les deux cas on a $|B_{zt}| = |C_{zt}|$. Or $|B_{xy}| = |C_{xy}|$ et d'après le fait 1, $|B_{xy} \cup C_{xy}| = |B_{zt} \cup C_{zt}|$, donc $|B_{xy}| = |C_{xy}| = |B_{zt}| = |C_{zt}|$. Il s'ensuit que $f(B_{xy}) = B_{zt}$ ou $f(B_{xy}) = C_{zt}$.

Avec le fait 2, on procède comme suit.

(a) Supposons que $\{z,t\} \in E(G)$ et $f(B_{xy}) = B_{zt}$ (resp. $f(B_{xy}) = C_{zt}$). On a alors $f(C_{xy}) = C_{zt}$ (resp. $f(C_{xy}) = B_{zt}$) car $f(B_{xy} \cup C_{xy}) = B_{zt} \cup C_{zt}$. Dans ce cas la permutation $\overline{f}$ de $V(G)$ qui coïncide avec f sur $V(G) - \{x,y\}$ et telle que $\overline{f}(x) = z$ et $\overline{f}(y) = t$ (resp. $\overline{f}(x) = t$ et $\overline{f}(y) = z$) est un automorphisme de G et on a $\overline{f}(\{x,y\}) = \{z,t\}$.

(b) Supposons que $\{z,t\} \notin E(G)$ et $f(B_{xy}) = B_{zt}$ (resp. $f(B_{xy}) = C_{zt}$). On a alors $f(C_{xy}) = C_{zt}$ (resp. $f(C_{xy}) = B_{zt}$) car $f(B_{xy} \cup C_{xy}) = B_{zt} \cup C_{zt}$. Dans ce cas, la permutation $\overline{f}$ de $V(G)$ qui coïncide avec f sur $V(G) - \{x,y\}$ et telle que $\overline{f}(x) = t$ et $\overline{f}(y) = z$ (resp. $\overline{f}(x) = z$ et $\overline{f}(y) = t$) est un isomorphisme de G sur $\overline{G}$.

D'après (b), les graphes G et $\overline{G}$ sont isomorphes et par suite G est auto-complémentaire. □

Remerciements

Nos sincères remerciements au rapporteur pour ses remarques et suggestions.

Références

[1] J.L. Berggren, An algebraic characterization of finite symmetric tournaments, Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972) 53–59.
[2] Y. Boudabbous, Reconstructible and half-reconstructible tournaments: application to their groups of hemimorphisms, MLQ Math. Log. Q. 45 (3) (1999) 421–431.
[3] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976, x+264 pp.
[4] R. Fraïssé, Theory of Relations, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1986.
[5] A.W. Goodman, On sets of acquaintances and strangers at any party, Amer. Math. Monthly 66 (1959) 778–783.
[6] M. Jean, Line-symmetric tournaments, in: Recent Progress in Combinatorics, Academic Press, New York, 1969, pp. 265–271.
[7] W.M. Kantor, Automorphism groups of designs, Math. Z. 109 (1969) 246–252.
[8] W. Peisert, All self-complementary symmeric graphs, J. Algebra 240 (2001) 209–229.
[9] M. Pouzet, Sur certains tournois reconstructibles. Applications à leurs groupes d'automorphismes, Discrete Math. 24 (1978) 225–229.