C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 767–772

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Contrôle optimal/Équations aux dérivées partielles

Synchronisation exacte d'un système couplé d'équations des ondes par des contrôles frontières de Dirichlet

Exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls

Tatsien Li [a,b], Bopeng Rao [c]

[a] *School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*
[b] *Nonlinear Mathematical Modeling and Methods Laboratory; Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics, Shanghai, China*
[c] *Institut de recherche mathématique avancée, université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 29 août 2012
Accepté le 14 septembre 2012
Disponible sur Internet le 2 octobre 2012

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous étudions la synchronisation exacte d'un système couplé d'équations des ondes par des contrôles frontières de Dirichlet et diverses idées connexes sont introduites. En utilisant la nulle contrôlabilité exacte d'un système réduit couplé, et sous certaines conditions de compatibilité, nous avons établi la synchronisation exacte, la synchronisation exacte par groupes, et la nulle contrôlabilité et la synchronisation exacte par groupes, au moyen de contrôles convenables.

ABSTRACT

In this Note, the exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls and some related concepts are introduced. By means of the exact null controllability of a reduced coupled system, under certain conditions of compatibility, the exact synchronization, the exact synchronization by groups, and the exact null controllability and synchronization by groups are all realized by suitable boundary controls.

Abridged English version

Synchronization is a widespread natural phenomenon. In principle, synchronization happens when different individuals possess likeness in nature, that is, they conform essentially to the same governing equations, and meanwhile, the individuals should bear a certain coupled relation. The phenomenon of synchronization was first observed by Huygens in 1665 [3]. The theoretical research on synchronization phenomena dates back to Fujisaka and Yamada's [2] study of synchronization for coupled systems in 1983. The previous studies focussed on systems described by ordinary differential equations.

In this Note, we will consider the synchronization of the following coupled system of wave equations:

Adresses e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T. Li), bopeng.rao@math.unistra.fr (B. Rao).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.09.007

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + AU = 0 & \text{in } \Omega, \\ U = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ U = H & \text{on } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad \dfrac{\partial U}{\partial t} = U_1, \end{cases} \tag{1}$$

where $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T$ is the state variable, $A \in \mathbb{M}^N(\mathbb{R})$ with constant elements a_{ij} $(i, j = 1, \dots, N)$ is the coupling matrix and $H = (h^{(1)}, \dots, h^{(N)})^T$ is the boundary control.

Definition 1. Problem (1) is exactly synchronizable at time $T > 0$, if for any given initial data $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$, there exists a suitable boundary control $H \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^N$ with compact support in $[0, T]$, such that the corresponding solution $U = U(t, x)$ to problem (1) satisfies the following final condition

$$t \geqslant T: \quad u^{(1)} \equiv u^{(2)} \equiv \cdots \equiv u^{(N)} := u. \tag{2}$$

The exact synchronization is linked with the exact null controllability. In fact, let $W = (w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)})^T$ with $w^{(i)} = u^{(i+1)} - u^{(i)}$ $(i = 1, \dots, N-1)$, then under some conditions of compatibility on the coupling matrix A, the new state W satisfies a reduced system of $N-1$ wave equations:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W + \bar{A} W = 0 & \text{in } \Omega, \\ W = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ W = \overline{H} & \text{on } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad W = W_0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial t} = W_1, \end{cases} \tag{3}$$

where the coupling matrix $\bar{A} \in \mathbb{M}^{N-1}(\mathbb{R})$, the boundary control $\overline{H}$ and the new initial data (W_0, W_1) can be explicitly determined from A, H and (U_0, U_1), respectively. Therefore, the exact synchronization of the system (1) of N equations is equivalent to the exact null controllability of the reduced system (3) of $N-1$ wave equations. We first establish the exact null controllability of system (3) via the boundary control $\overline{H}$ of $N-1$ components. We next find some conditions of compatibility on the coupling matrix A that guarantee the reduction of system (1) to system (3).

The following theorem is the main result on the exact synchronization. Various notions such as exact synchronization by groups, exact null controllability and synchronization by groups will be developed in the complete version.

Theorem 1. *Assume that problem* (1) *is exactly synchronizable, but not exactly null controllable. Then the coupling matrix $A = (a_{ij})$ should satisfy the following conditions of compatibility*:

$$\sum_{p=1}^{N} a_{kp} = a, \quad k = 1, \dots, N, \tag{4}$$

where a is a constant independent of k. Inversely, assume that the conditions of compatibility (4) *hold. Then problem* (1) *is exactly synchronizable by means of some boundary control H with compact support in* $[0, T]$ *and* $h^{(1)} \equiv 0$.

1. Introduction et résultats principaux

La synchronisation est un phénomène largement répandu dans la nature. Des milliers de lucioles peuvent scintiller en même temps ; le public dans un théatre peut applaudir de façon rythmique ; les cellules cardiaques fonctionnent simultanément ; des grillons dans un champ peuvent grésiller en même temps. Ce sont tous là des phénomènes de synchronisation.

En principe, la synchronisation se produit si le comportement des individus obéit à une même équation d'une part, et d'autre part les individus interfèrent entre eux via un certain couplage. Le phénomène de la synchronisation a été d'abord observé par Huygens en 1665 [3], tandis que la recherche théorique remonte à l'étude de Fujisaka et Yamada en 1983 [2] sur la synchronisation de sysèmes couplés. Les résultats précédents portent tous sur les équations différentielles ordinaires.

Dans cette Note, nous étudions la synchronisation de systèmes couplés distribués par l'action de contrôles frontières. Considérons le système couplé d'équations des ondes suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + AU = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ U = H & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad \dfrac{\partial U}{\partial t} = U_1 \end{cases} \tag{1}$$

où $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T$ est la variable d'état du système, $H = (h^{(1)}, \dots, h^{(N)})^T$ est un contrôle frontière et $A \in \mathbb{M}^N(\mathbb{R})$ avec les coefficients constants a_{ij} $(i, j = 1, \dots, N)$ est une matrice du couplage. D'après Li et Rao [4], il n'est pas possible en général de réaliser la contrôlabilité exacte d'un système de N équations des ondes à l'aide de $N-1$ contrôles. Néanmoins, divers résultats plus faibles sur la controlabilité exacte avec moins de contrôles ont été obtenus dans la dernière décennie. Par exemple, pour des données initiales régulières, la controlabilité exacte de deux équations des ondes peut être réalisée par un seul contrôle (voir Alabau [1], Liu et Rao [7]). Dans Li et Rao [5], nous avons introduit la notion de controlabilité asymptotique et nous avons établi l'équivalence entre la controlabilité asymptotique du problème primaire et l'observabilité faible du problème dual. De plus, par une approche de base de Riesz, Loreti et Rao [8] ont établi le meilleur taux de décroissance de l'énergie d'un système de deux équations d'évolution avec un seul terme d'amortissement.

L'objectif de cette Note est d'affaiblir la notion de controlablité exacte dans un autre sens. Si on ne peut pas ramener toutes les composantes de la variable d'état à zéro, alors on cherchera à les ramener à la même valeur qui est *a priori* inconnue : c'est la synchronisation.

Définition 1. Le problème (1) est exactememt synchronisable au temps $T > 0$ si, pour toute donnée initiale $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$, il existe un contrôle frontière $H \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^N$ ayant un support compact dans $[0, T]$, tel que la solution correspondante $U = U(t, x)$ du problème (1) satisfait la condition finale

$$t \geqslant T: \quad u^{(1)} \equiv u^{(2)} \equiv \cdots \equiv u^{(N)} := u, \tag{2}$$

où $u = u(t, x)$ est appelée *l'état synchronisable*.

Dans cette définition, nous exigeons que la synchronisation soit maintenue sans aucune action de contrôle pour $t \geqslant T$. Ceci est une généralisation naturelle de la nulle controlabilité exacte. Comme la nulle controlabilité exacte implique la synchronisation exacte, afin d'exclure ce cas trivial et d'assurer la non nulle controlabilité exacte, nous supposons que l'une des composantes de H s'annule, par exemple, $h^{(1)} \equiv 0$.

La synchronisation est bien liée à la nulle controlabilité exacte. En effet, en définissant la variable auxiliaire $W = (w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)})^T$ avec $w^{(i)} = u^{(i+1)} - u^{(i)}$ $(i = 1, \dots, N-1)$, et en supposant certaines conditions de compatibilité sur la matrice du couplage A, la nouvelle variable d'état W satisfait un système réduit de $N-1$ équations des ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W + \bar{A} W = 0 & \text{dans } \Omega, \\ W = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ W = \overline{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad W = W_0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial t} = W_1, \end{cases} \tag{3}$$

où $\bar{A}$ est une matrice d'order $N-1$ construite à partir de la matrice A. Ainsi, sous certaines conditions de compatibilité, la synchronisation exacte du problème (1) de N équations découle de la nulle controlabilité exacte du système réduit (3) de $N-1$ équations. Basée sur cette idée, notre étude se développe dans deux directions : nous établissons la nulle controlabilité exacte du système réduit (3) d'une part, et d'autre part nous cherchons des conditions de compatibilité qui permettent de transformer le problème d'origine (1) en le système réduit (3).

Dans toute la suite $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ désigne un domaine borné de frontière Γ de classe C^2 telle que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ avec $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$. Nous supposons de plus que Γ_0 et Γ_1 satisfont la condition géométrique du contrôle. Nous posons

$$\mathcal{V} = \left(H_0^1(\Omega)\right)^M, \qquad \mathcal{H} = \left(L^2(\Omega)\right)^M.$$

Théorème 1. *Il existe une constante positive $T > 0$ dépendant seulement de Ω et de $\bar{A}$, telle que pour toute donnée initiale $(W_0, W_1) \in (L^2(\Omega))^M \times (H^{-1}(\Omega))^M$, le problème* (3) *de M équations soit exactement nul controlable au temps T au moyen d'un contrôle frontière $\overline{H} \in (L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)))^M$.*

Notons qu'aucune hypothèse n'est nécessaire sur la matrice du couplage $\bar{A}$.

Théorème 2. *Supposons que le problème* (1) *est exactement synchronisable, mais non exactement nul controlable. Alors la matrice du couplage $A = (a_{ij})$ satisfait les conditions de compatibilité suivantes :*

$$\sum_{p=1}^{N} a_{kp} = a, \quad k = 1, \dots, N, \tag{4}$$

où a est une constante indépendante de k. Réciproquement, supposons que les conditions de compatibilité (4) *soient satisfaites, alors le problème* (1) *est exactement synchronisable au moyen d'un contrôle frontière H ayant un support compact dans* $[0, T]$ *et $h^{(1)} \equiv 0$.*

Remarque. Nous pouvons montrer, sous les conditions de compatibilité (4), que l'ensemble des valeurs de (u, u_t) au temps $t = T$ de l'état synchronisable u remplit l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ lorsque la donnée initiale (U_0, U_1) varie dans l'espace $(L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$. En revanche, étant donnée une valeur initiale (U_0, U_1), l'état synchronisable u sera gouverné par l'équation des ondes suivante :

$$t \geqslant T: \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + au = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ainsi, l'évolution de u sera déterminée entièrement par la valeur de (u, u_t) en $t = T$. Or cette valeur dépend de la donnée initiale (U_0, U_1) et du contrôle H, donc elle n'est pas connue *a priori*. Dans un exemple de deux équations des ondes en dimension un, nous pouvons montrer par la méthode de Fourier que les hautes fréquences de l'état synchronisable u s'approche de celles de la moyenne de données initiales du problème d'origine.

En regroupant les composantes de U en p groupes, nous cherchons un contrôle frontière H dont au moins p composantes sont identiquement nulles, tel que les p groupes soient synchronisés indépendamment. Pour simplifier l'exposé, nous considérons seulement le cas de deux groupes ; par exemple, nous arrangeons les composantes de U comme $(u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ et $(u^{(m+1)}, \dots, u^{(N)})$.

Définition 2. Le problème (1) est exactement synchronisable par 2-groupes au temps $T > 0$ si, pour toute donnée initiale $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$, il existe un contrôle frontière $H \in (L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)))^N$ ayant un support compact dans $[0, T]$, tel que la solution $U = U(t, x)$ du problème (1) satisfait la condition finale

$$t \geqslant T: \quad u^{(1)} \equiv \cdots \equiv u^{(m)} := u, \qquad u^{(m+1)} \equiv \cdots \equiv u^{(N)} := v, \tag{5}$$

et le couple (u, v) est appelé *l'état synchronisable par 2-groupes*.

Théorème 3. *Supposons que le problème* (1) *est exactement synchronisable par* 2*-groupes au temps* $T > 0$. *Supposons de plus qu'il existe au moins une donnée initiale* (U_0, U_1) *telle que les deux composantes* u *et* v *de l'état synchronisable soient linéairement indépendantes, alors la matrice du couplage* $A = (a_{ij})$ *satisfait les conditions de compatibilité suivantes* :

$$\sum_{p=1}^{m} a_{kp} = \sum_{p=1}^{m} a_{lp}, \quad k, l = 1, \dots, m; \qquad \sum_{p=m+1}^{N} a_{kp} = \sum_{p=m+1}^{N} a_{lp}, \quad k, l = m+1, \dots, N. \tag{6}$$

Réciproquement, supposons que les conditions de compatibilité (6) *soient satisfaites. Alors le problème* (1) *est exactement synchronisable par* 2*-groupes au moyen d'un contrôle frontière* H *ayant un support compact dans* $[0, T]$ *et* $h^{(1)} \equiv h^{(m+1)} \equiv 0$.

Nous gardons l'arrangement de U en deux groupes. Mais cette fois-ci, nous cherchons un contrôle qui ramène les composantes du premier groupe à zéro et celles du deuxième groupe à la même valeur. C'est un problème mixte de controlabilité et synchronisation partielle.

Définition 3. Le problème (1) est exactement nul controllable et synchronisable par 2-groupes au temps $T > 0$ si, pour toute donnée initiale $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$, il existe un contrôle frontière $H \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^N$ ayant un support compact dans $[0, T]$, tel que la solution $U = U(t, x)$ du problème (1) satisfait la condition finale

$$t \geqslant T: \quad u^{(1)} \equiv \cdots \equiv u^{(m)} \equiv 0, \qquad u^{(m+1)} \equiv \cdots \equiv u^{(N)} := u, \tag{7}$$

et $u = u(t, x)$ est appelé *l'état partiellement synchronisable*.

Théorème 4. *Supposons que le problème* (1) *est exactement nul controlable et synchronisable par* 2*-groupes, mais non exactement nul controlable. Alors la matrice du couplage* $A = (a_{ij})$ *satisait les conditions de compatibilité suivantes* :

$$\sum_{p=m+1}^{N} a_{kp} = 0, \quad k = 1, \dots, m; \qquad \sum_{p=m+1}^{N} a_{kp} = \sum_{p=m+1}^{N} a_{lp}, \quad k, l = m+1, \dots, N. \tag{8}$$

Réciproquement, supposons que les conditions de compatibilité (8) *soient satisfaites, alors le problème* (1) *est exactement nul controllable et synchronisable par* 2*-groupes au moyen d'un contrôle frontière* H *ayant un support compact dans* $[0, T]$ *et tel que* $h^{(m+1)} \equiv 0$.

2. Démonstrations des résultats principaux

Démonstration du Théorème 1. Soit $\Phi = (\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(M)})^T$. Considérons le problème adjoint suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi + \bar{A}^T \Phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \Phi = \Phi_0, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_1. \end{cases} \tag{9}$$

Par la méthode HUM de J.-L. Lions [6], il suffit d'établir les inégalités d'observabilité suivantes :

$$c \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 \mathrm{d}\Gamma \, \mathrm{d}t \leqslant \|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}} + \|\Phi_1\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 \mathrm{d}\Gamma \, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

Ecrivons (9) sous la forme d'une équation d'évolution du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{A}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix} + \mathcal{B} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix}.$$

D'après un résultat de perturbation de Mehrenberger [9], pour établir les inégalités (10), il suffit de montrer qu'elles sont vraies pour le système découplé (cas $\bar{A} = 0$) ; ensuite, le système des vecteurs propres généralisés de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ forme une base de Riesz au sens des sous-espaces dans $\mathcal{V} \times \mathcal{H}$; enfin, le problème

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\Phi, \Psi) = \lambda(\Phi, \Psi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

n'admet que la solution triviale. □

Démonstration du Théorème 2. La condition finale (2) implique qu'il existe une fonction scalaire u telle que

$$t \geqslant T: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left(\sum_{p=1}^N a_{kp} \right) u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

En particulier, on a

$$t \geqslant T: \quad \left(\sum_{p=1}^N a_{kp} \right) u = \left(\sum_{p=1}^N a_{lp} \right) u \quad \text{dans } \Omega, \quad k, l = 1, \dots, N.$$

Le problème (1) n'étant pas exactememt nul controlable, il existe au moins une donnée initiale (U_0, U_1) pour laquelle la fonction correspondante u ne s'annule pas identiquement ; ceci implique les conditions (4). Réciproquement, en posant $w^{(i)} = u^{(i+1)} - u^{(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$ et sous les conditions (4), on trouve que $W = (w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)})^T$ est la solution du problème (3) où la matrice du couplage réduite $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ est donnée par

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{p=j+1}^N (a_{i+1,p} - a_{ip}) = \sum_{p=1}^j (a_{ip} - a_{i+1,p}), \quad i, j = 1, \dots, N-1, \tag{11}$$

et les nouvelles données initiales sont déterminées par

$$w_0^{(i)} = u_0^{(i+1)} - u_0^{(i)}, \qquad w_1^{(i)} = u_1^{(i+1)} - u_1^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{12}$$

D'après le Théorème 1 (avec $M = N-1$), il existe un contrôle frontière $\overline{H} = (\bar{h}^{(1)}, \dots, \bar{h}^{(N-1)})^T$ tel que le problème (3) soit exactement nul controlable au moment T. Une fois que $\overline{H}$ est trouvé, on définit le contrôle H par

$$h^{(1)} \equiv 0, \qquad h^{(i+1)} = \bar{h}^{(i)} + h^{(i)} = \sum_{j=1}^i \bar{h}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{13}$$

On vérifie facilement que la solution correspondante du problème (1) satisfait la condition de la synchronisation exacte (2). □

Démonstration du Théorème 4. Par (7), il existe une fonction scalaire u telle que

$$t \geqslant T: \quad \begin{cases} \left(\sum_{p=m+1}^{N} a_{kp}\right) u = 0 & \text{dans } \Omega,\ k = 1, \dots, m, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left(\sum_{p=m+1}^{N} a_{kp}\right) u = 0 & \text{dans } \Omega,\ k = m+1, \dots, N. \end{cases} \tag{14}$$

Comme le problème (1) n'est pas exactement nul controlable, les équations (14) impliquent les conditions (8). Réciproquement, on pose

$$w^{(j)} = u^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m; \qquad w^{(j)} = u^{(j+1)} - u^{(j)}, \quad j = m+1, \dots, N-1. \tag{15}$$

Alors sous les conditions (8), la nouvelle variable $W = (w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)})$ est la solution du système réduit (3) où la matrice du couplage réduite $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ est donnée par

$$\bar{a}_{ip} = \begin{cases} (a_{i+1,p} - a_{ip}), & m+1 \leqslant i \leqslant N-1,\ 1 \leqslant p \leqslant m, \\ \sum_{s=p+1}^{N} (a_{i+1,s} - a_{is}), & m+1 \leqslant i \leqslant N-1,\ m+1 \leqslant p \leqslant N-1, \end{cases} \tag{16}$$

et les nouvelles données initiales sont déterminées par

$$\begin{cases} w_0^{(i)} = u_0^{(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \qquad u_0^{(i+1)} - u_0^{(i)}, \quad m+1 \leqslant i \leqslant N-1, \\ w_1^{(i)} = u_1^{(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad u_1^{(i+1)} - u_1^{(i)}, \quad m+1 \leqslant i \leqslant N-1. \end{cases} \tag{17}$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du Théorème 2. □

Références

[1] F. Alabau-Boussouira, A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim. 42 (2003) 871–906.
[2] H. Fujisaka, T. Yamada, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, Progress of Theoretical Physics 69 (1983) 32–47.
[3] Ch. Huygens, Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, Apud F. Muguet, Paris, 1673.
[4] T.-T. Li, B. Rao, Strong (weak) exact controllability and strong (weak) exact observability for quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math. Ser. B 31 (2010) 723–742.
[5] T.-T. Li, B. Rao, Asymptotic controllability for linear hyperbolic systems, Asymptotic Analysis 72 (2011) 169–187.
[6] J.-L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, vol. 1, Masson, Paris, 1988.
[7] Z. Liu, B. Rao, A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 23 (2009) 399–414.
[8] P. Loreti, B. Rao, Optimal energy decay rate for partially damped systems by spectral compensation, SIAM J. Control Optim. 45 (2006) 1612–1632.
[9] M. Mehrenberger, Observability of coupled systems, Acta Math. Hungar. 103 (2004) 321–348.