C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 565–570

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe

Estimées L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur des domaines pseudoconvexes dans une variété kählerienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive

On L^2-estimates for $\bar{\partial}$ on pseudoconvex domains in a complete Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature

Séverine Biard

Institut de mathématiques de Jussieu, UPMC Univ. Paris 6, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 17 avril 2012
Accepté après révision le 23 juillet 2012
Disponible sur Internet le 28 juillet 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous étudions des estimées L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur des domaines pseudoconvexes relativement compacts dans une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive. Nous définissons une fonction τ_Ω sur des domaines pseudoconvexes relativement compacts à bord $\mathcal{C}^2$. Sur ces domaines, nous prouvons l'existence d'un voisinage du bord sur lequel $\tau_\Omega < 1$. Une généralisation de cette propriété nous permet, entre autres, de prouver des estimées L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur des domaines pseudoconvexes de fonction définissante plurisousharmonique, à frontière $\mathcal{C}^1$ tel que $\operatorname{reach}(\Omega^c) > 0$.

ABSTRACT

We study L^2-estimates for $\bar{\partial}$ on pseudoconvex domains Ω relatively compact in a complete Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature. We define a function τ_Ω on $\mathcal{C}^2$-smooth pseudoconvex domains. On these domains, we prove that there exists a neighborhood of $\partial\Omega$ on which $\tau_\Omega < 1$. A generalization of this property allows us, among others, to prove L^2-estimates for $\bar{\partial}$ on $\mathcal{C}^1$ pseudoconvex domains Ω with a defining plurisubharmonic function and a positive inner reach.

Abridged English version

Let (X, ω) be a complete Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature and complex dimension n. The associated Kähler form, hermitian metric, hermitian norm and the gradient will respectively be denoted ω, $g(.,.) = \langle .,. \rangle$, $\|.\|$, and ∇_g. We also denote by $\Omega = \{z \in X \mid \rho(z) < 0\} \Subset X$ a relatively compact pseudoconvex domain with boundary $\partial\Omega$ such that $d\rho \neq 0$ on $\partial\Omega$. $\delta_{\partial\Omega}$ is the signed distance to the boundary for the Kähler metric on X.

Adresse e-mail : biard@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.07.010

First, take Ω a pseudoconvex domain with $\mathcal{C}^2$ boundary: $L_n = \frac{\nabla_g \rho}{\|\nabla_g \rho\|}$ is the unit outward normal vector to the level sets $\{\rho = cst\}$ in a small neighborhood U_p of a point $p \in \partial\Omega$. Complete it on U_p by $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ into a local orthonormal frame of TU_p such that $g(\bar{L}_i, L_n) = 0$ for $i = 1, \ldots, n-1$.

We define on this neighborhood,

$$\tau_\Omega(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \frac{|\mathcal{L}_x \delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_i, L_n)|^2 . \delta_{\partial\Omega}(x)}{\mathcal{L}_x \delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_i, L_i) . \gamma(x)},$$

where $\mathcal{L}_x \delta_{\partial\Omega} = i\partial\bar{\partial}_x(-\delta_{\partial\Omega})$ and $\gamma(x) = \|\partial\delta_{\partial\Omega}(x)\|^2 + \mathcal{L}_x \delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_n, L_n).\delta_{\partial\Omega}(x) - C_\Omega . \delta^2_{\partial\Omega}(x)$.

The continuity of this function implies the existence of a neighborhood U of $\partial\Omega$ such that $\tau_\Omega < 1$. From the Takeuchi's Theorem [15], τ_Ω occurs in the estimate of $i\partial\bar{\partial}(-\delta^\alpha_{\partial\Omega})$ for $\alpha > 0$.

We call $t(\partial\Omega)$, the upper bound of the Diederich–Fornaess exponent [6] for the distance function to the boundary of Ω, defined by

$$t(\partial\Omega) = \sup\bigl\{0 < \eta \leqslant 1 \bigm| i\partial\bar{\partial}\bigl(-\delta^\eta_{\partial\Omega}\bigr) > 0 \text{ on } \Omega\bigr\}.$$

We prove that this exponent is bounded from below by the Takeuchi constant. In particular, we can choose an exponent α to be independent of exhaustions by smooth pseudoconvex domains $(\Omega_k)_{k \geqslant 1}$ so that $-\delta^\alpha_{\partial\Omega_k}$ is strictly plurisubharmonic on $U_k \cap \Omega_k$. This result is used in the following theorem:

Theorem 1. *Let (X, ω) be a complete Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature and $\Omega \Subset X$, a pseudoconvex domain. Assume that there exists a $\mathcal{C}^\infty$ strictly plurisubharmonic bounded exhaustion $\rho : \Omega \mapsto [-1, 0[$ such that, on a neighborhood of $\partial\Omega$,*

$$-\frac{A}{-\log \delta_{\partial\Omega}} \leqslant \rho \leqslant -\frac{B}{-\log \delta_{\partial\Omega}} \quad \textit{and} \quad i\partial\bar{\partial}\rho \geqslant \frac{C}{-\log \delta_{\partial\Omega}}\omega$$

with A, B and C, positive constants.

Then for all form $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap Ker(\bar{\partial})$ where $0 \leqslant p \leqslant n$ and $1 \leqslant q \leqslant n$, there exist $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ and a constant $C_0 > 0$ such that,

$$\bar{\partial}u = f \quad \textit{and} \quad \|u\|_{L^2} \leqslant C_0 \|f\|_{L^2}.$$

A closed set A in a Riemannian manifold is said to be of positive reach [8] if there exists $r > 0$ so that each point x such that $d_A(x) < r$ has a unique nearest point in A. The greatest such r is reach(A). Here d_A denotes the geodesic distance to A. The regularity of d_A is connected with these sets.

Since for $U \cap \Omega$, $\delta_{\partial\Omega} = d_{\Omega^c}$, reach$(\Omega^c)$ is what we will need, where Ω^c is the complement of Ω in X. We say that Ω has a positive inner reach if reach$(\Omega^c) > 0$ (i.e. $\exists \varepsilon > 0$, reach$(\Omega^c) \geqslant \varepsilon$). To study reach$(\Omega^c)$, we refer to Bangert's works and we generalize τ_Ω as follows:

Let $\Omega = \{z \in X \mid \rho(z) < 0\} \Subset X$ with a defining plurisubharmonic function ρ of class $\mathcal{C}^1$. We suppose that reach$(\Omega^c) > 0$ and $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < \text{reach}(\Omega^c)\}$. Then

$$\forall z \in U \cap \bar{\Omega} \quad \tau_\Omega(z) = \sup_{(\Omega_k)_{k \geqslant 1} \in \mathrm{Exh}(\Omega)} \tau_{\Omega_k}(z),$$

where Exh(Ω) is the set of exhaustions by smoothly pseudoconvex domains $(\Omega_k)_{k \geqslant 1}$ such that $\exists A > 0$, $\forall k \geqslant 1$, $\partial\Omega_k \subset U \cap \Omega$, reach$(\Omega^c_k) \geqslant A$. This definition makes sense thanks to the Riemannian convolution smoothing (cf. [10,5] for more details). In this way, we prove:

Theorem 2. *Let (X, ω) be a complete Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature.*

Let $\Omega \Subset X$ be a domain with positive inner reach, defined by a plurisubharmonic function $\rho \in \mathcal{C}^1(U)$, where $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < a\}$ with $0 < a \leqslant$ reach(Ω^c).

If

$$\exists c > 0,\ \forall z \in U \cap \Omega, \quad \tau_\Omega(z) \leqslant c < 1, \tag{1}$$

then, there exists $\alpha > 0$ such that $-\delta^\alpha_{\partial\Omega}$ is strictly plurisubharmonic on $U \cap \Omega$.

Finally, we obtain our main theorem:

Theorem 3. *Let (X, ω) be a complete Kähler manifold with a positive holomorphic bisectional curvature. Let $\Omega \Subset X$ be a domain with positive inner reach, defined by a plurisubharmonic defining function $\rho \in \mathcal{C}^1(U)$, where $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < \text{reach}(\Omega^c)\}$. If*

$$\exists c > 0,\ \forall z \in U \cap \Omega, \quad \tau_\Omega(z) \leqslant c < 1,$$

then for all form $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap Ker(\bar{\partial})$ where $0 \leqslant p \leqslant n$ and $1 \leqslant q \leqslant n$, there exist $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ and a constant $C_0 > 0$ such that,

$$\bar{\partial}u = f \quad \textit{and} \quad \|u\|_{L^2} \leqslant C_0 \|f\|_{L^2}.$$

1. La fonction τ_Ω

Soit (X,ω) une variété kählérienne complète de dimension complexe n et à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive. La forme de Kähler associée, la métrique hermitienne, la norme et le gradient seront notés, respectivement, ω, $g(.,.)$, $\|.\|$ et ∇_g. Dans cette Note, $\Omega = \{z \in X \mid \rho(z) < 0\} \Subset X$ est un domaine pseudoconvexe relativement compact dans X et de fonction définissante ρ. Son complémentaire dans X est noté Ω^c. La distance signée au bord de Ω, notée $\delta_{\partial\Omega}$, est définie comme suit :

$$\delta_{\partial\Omega}(z) = \begin{cases} d(z,\partial\Omega) & \text{si } z \in \Omega, \\ -d(z,\partial\Omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

où d est la distance géodésique sur X.

Dans ce paragraphe, nous supposons $\Omega \Subset X$ de bord $\mathcal{C}^2$. $L_n = \frac{\nabla_g \rho}{\|\nabla_g \rho\|}$ est le vecteur normal extérieur aux ensembles de niveau $\{\rho = cst\}$ sur un voisinage U_p du point $p \in \partial\Omega$. Notons $\mathcal{T}U_p$ le sous-fibré hermitien de TU_p, defini par :

$$\mathcal{T}U_p = (L_n)^{\perp g} = \{Y \in TU_p \mid g(\bar{Y}, L_n) = 0\}.$$

Définissons-y une forme sesquilinéaire, notée Λ et définie par :

$$\Lambda_x(Y) = i\partial\bar\partial_x(-\delta_{\partial\Omega})(\bar{Y}, L_n),$$

ainsi qu'une métrique hermitienne :

$$h_x(\bar{Y}, X) = \frac{\gamma(x)}{\delta_{\partial\Omega}(x)}.\mathcal{L}_x\delta_{\partial\Omega}(\bar{Y}, X) \quad \forall Y, X \in \mathcal{T}_x U_p$$

où $\mathcal{L}_x\delta_{\partial\Omega} = i\partial\bar\partial_x(-\delta_{\partial\Omega})$ et $\gamma(x) = \|\partial\delta_{\partial\Omega}(x)\|^2 + \mathcal{L}_x\delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_n, L_n).\delta_{\partial\Omega}(x) - C_\Omega.\delta^2_{\partial\Omega}(x)$.

$\Lambda \in \mathcal{C}^0(U_p; \overline{\mathcal{T}^*U_p})$ où $\mathcal{T}^*U_p$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{T}U_p$. On note $\|.\|_{\mathcal{T}^*_x U_p, h_x}$, la norme duale induite sur $\mathcal{T}^*U_p$. Nous définissons alors τ_Ω comme suit :

Définition 1. Soit U un voisinage de $\partial\Omega$. Alors

$$\tau_\Omega(x) = \begin{cases} \|\Lambda_x\|^2_{\mathcal{T}^*_x U, h_x} & \text{si } x \in U \cap \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En complétant L_n par $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ en un repère de TU, nous obtenons : $\tau_\Omega(x) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} \frac{|\mathcal{L}_x\delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_i, L_n)|^2.\delta_{\partial\Omega}(x)}{\mathcal{L}_x\delta_{\partial\Omega}(\bar{L}_i, L_i).\gamma(x)}$.

τ_Ω étant nul sur $\partial\Omega$, sa continuité implique l'existence d'un voisinage U de la frontière sur lequel $\tau_\Omega < 1$. Cette propriété, vraie sur tout domaine Ω de classe $\mathcal{C}^2$, sera déterminante dans l'existence d'une fonction négative höldérienne et strictement plurisousharmonique d'exhaustion sur des domaines moins réguliers.

Soit $\Omega \Subset X$ un domaine pseudoconvexe. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle qu'au sens des courants,

$$i\partial\bar\partial(-\log\delta_{\partial\Omega}) \geqslant C\omega \quad \text{on } \Omega. \tag{2}$$

On nomme $C_\Omega = \sup\{C \mid C \text{ vérifie } (2)\}$, la constante de Takeuchi. Ce résultat, démontré à l'origine, dans $\mathbb{CP}^n$ par A. Takeuchi [15], fut généralisé à une variété X comme considérée dans cette Note, par G. Elencwajg [7], O. Suzuki [14] ainsi que par R.E. Greene et H. Wu [9].

Rappelons que l'exposant de Diederich et Fornaess [6] est un nombre $\eta \in (0,1]$ pour lequel il existe une fonction définissante lisse s tel que $-(-s)^\eta$ soit strictement plurisousharmonique sur le domaine. En particulier, K. Diederich et J.E. Fornaess [6] montrèrent qu'un tel exposant existe sur tout pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^2$ et relativement compact dans une variété de Stein. T. Ohsawa et N. Sibony [13] généralisèrent leur résultat : ils montrèrent qu'il existe un exposant $\eta > 0$ tel que $-\delta^\eta_{\partial\Omega}$ est strictement plurisousharmonique sur un pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^2$ relativement compact dans une variété X, citée plus haut. Nous nommons $t(\partial\Omega)$, le plus grand exposant de Diederich et Fornaess pour la fonction distance au bord :

$$t(\partial\Omega) = \sup\{0 < \eta \leqslant 1 \mid i\partial\bar\partial(-\delta^\eta_{\partial\Omega}) > 0 \text{ sur } \Omega\}.$$

Théorème 4. *Soit (X,ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive et $\Omega \Subset X$ un domaine pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^2$. Alors,*

$$t(\partial\Omega) \geqslant \min(C_\Omega, 1).$$

Afin de montrer ce résultat, nous avons besoin d'une version quantitative de la preuve d'Ohsawa et Sibony [13] :

Proposition 1. *Sous les notations précédentes, soit*

$$Q_x(v) = \delta^2_{\partial\Omega}(x).\langle i\partial\bar\partial(-\log\delta_{\partial\Omega}(x)), v \wedge \bar{v}\rangle - C_\Omega\delta^2_{\partial\Omega}(x)|v_n|^2, \quad x \in U \cap \Omega,\ v = \sum_{i=1}^n v_i L_i \in T^{(1,0)}U.$$

Alors,

$$Q_x(v) \geqslant \big(1 - \tau_\Omega^{\frac{1}{2}}(x)\big).\min\big(C_\Omega, \gamma(x)\big)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{\partial\Omega}^2(x)|v_i|^2 + |v_n|^2\right).$$

L'idée de la preuve du Théorème 4 est d'utiliser la proposition ci-dessus grâce à laquelle on obtient, pour $\alpha > 0$ et $v \in T^{(1,0)}U$:

$$\big\langle i\partial\bar\partial\big(-\delta_{\partial\Omega}^\alpha\big), v \wedge \bar v\big\rangle \geqslant c(x)\alpha\delta_{\partial\Omega}^\alpha \|v\|^2 \tag{3}$$

où $c(x) = (1 - \tau_\Omega^{\frac{1}{2}}(x)).\min(C_\Omega, \gamma(x))$. On en déduit alors le résultat grâce à la propriété de τ_Ω. On a également :

Corollaire 1. *Soit (X,ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive et $\Omega \Subset X$, un domaine pseudoconvexe. Soit $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ une exhaustion de Ω par des pseudoconvexes lisses. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un voisinage U_k de $\partial\Omega_k$ tel que $-\delta_{\partial\Omega_k}^\alpha$ soit strictement plurisousharmonique sur $U_k \cap \Omega_k$.*

2. Estimées L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ sur un domaine hyperconvexe à estimées logarithmiques

J.-P. Demailly [5] a montré, non seulement qu'un domaine pseudoconvexe à bord Lipschitz, relativement compact dans une variété de Stein, est hyperconvexe, mais aussi qu'il existe une fonction plurisousharmonique d'exhaustion bornée vérifiant les estimées logarithmiques (4). L'existence de telles estimées nous permet de prouver des estimées L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ sur tout domaine pseudoconvexe $\Omega \Subset X$.

Théorème 5. *Soit (X,ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe positive et $\Omega \Subset X$ un domaine pseudoconvexe. Supposons qu'il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ strictement plurisousharmonique $\rho : \Omega \mapsto [-1, 0[$ d'exhaustion telle que, sur un voisinage de $\partial\Omega$,*

$$-\frac{A}{-\log\delta_{\partial\Omega}} \leqslant \rho \leqslant -\frac{B}{-\log\delta_{\partial\Omega}} \quad \text{et} \quad i\partial\bar\partial\rho \geqslant \frac{C}{-\log\delta_{\partial\Omega}}\omega \tag{4}$$

avec A, B et C des constantes strictement positives.

Alors pour toute forme $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap Ker(\bar\partial)$ où $0 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$, il existe $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ et une constante $C_0 > 0$ tel que,

$$\bar\partial u = f \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} \leqslant C_0\|f\|_{L^2}.$$

Dans la preuve, on considére $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$, une exhaustion par des pseudoconvexes lisses de Ω. En utilisant le Corollaire 1, nous construisons à l'aide de ρ, une fonction négative strictement plurisousharmonique sur Ω_k. Le résultat se déduit de la méthode de Berndtsson et Charpentier [2].

3. Estimées L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ sur un domaine pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^1$ de fonction définissante plurisousharmonique et tel que reach$(\Omega^c) > 0$

La régularité de $\delta_{\partial\Omega}$ dépend du rayon d'injectivité normal au bord $\partial\Omega$. Ainsi, $\delta_{\partial\Omega}$ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ est équivalent à ce que $\partial\Omega$ soit $\mathcal{C}^{1,1}$ [12,1,4]. Ce résultat a permis à J. Cao et M.-C. Shaw [3] d'améliorer le résultat d'Ohsawa et Sibony à des domaines pseudoconvexes relativement compacts à bord $\mathcal{C}^{1,1}$.

Définition 2. Un ensemble fermé A est dit à rayon d'injectivité normal positif si il existe $r > 0$ de sorte que chaque point x tel que $d_A(x) < r$ admette une unique projection y sur A telle que $d_A(x) = d(x,y)$.

Cette notion a été introduite par H. Federer [8] dans les espaces euclidiens sous le nom de reach(A) (correspondant au plus grand de tels rayons $r > 0$), dénomination qu'on gardera. Nous nous référons aux travaux de V. Bangert [1] pour son étude, notamment sa définition en terme de sous-ensembles de fonctions semiconvexes.

On rappelle le procédé de régularisation par convolution avec un noyau "symétrique" par rapport à la métrique kählérienne [10] : soit $\chi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,1]$ tel que $\int_\xi \chi_k(\|\xi\|^2)\,\mathrm{d}\lambda(\xi)$ où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Soit ρ une fonction continue réélle, alors pour k assez grand, on a

$$\rho_k(x) = (\rho * \chi_k)(x) = C_k \int_{\xi\in T_xX} \rho\big(\exp_x(\xi)\big)\chi_k\big(\|\xi\|^2\big)\,\mathrm{d}\lambda(\xi),$$

où $\exp_x : T_xX \to X$ est la carte exponentielle et C_k une constante strictement positive.

Soit Ω un domaine à frontière $\mathcal{C}^1$, relativement compact dans une variété riemannienne et $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ une exhaustion de Ω construite par le procédé précédent. Si $\text{reach}(\Omega^c) > 0$ (i.e. $\exists \varepsilon > 0$, $\text{reach}(\Omega^c) \geqslant \varepsilon$) alors il existe $A > 0$, tel que pour k assez grand, $\text{reach}(\Omega_k^c) \geqslant A > 0$. Ceci donne alors un sens à la généralisation suivante de τ_Ω :

Définition 3. Soit (X, ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive. Soit $\Omega = \{z \in X \mid \rho(z) < 0\} \Subset X$ où ρ est une fonction définissante plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que $\text{reach}(\Omega^c) > 0$. Soit $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < \text{reach}(\Omega^c)\}$. Alors nous définissons τ_Ω sur $U \cap \bar{\Omega}$ par :

$$\forall z \in U \cap \bar{\Omega} \quad \tau_\Omega(z) = \sup_{(\Omega_k)_{k\geqslant 1} \in \text{Exh}(\Omega)} \tau_{\Omega_k}(z),$$

où $\text{Exh}(\Omega)$ est l'ensemble des exhaustions de Ω par des domaines pseudoconvexes lisses $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ tels qu'il existe $A > 0$, pour tout k vérifiant $\partial\Omega_k \subset U$, $\text{reach}(\Omega_k^c) \geqslant A$.

Dans la suite, nous notons $\Omega_k = \{\rho_k = \rho * \chi_k < 0\}$ l'exhaustion de $\Omega = \{\rho < 0\} \Subset X$, construite par la convolution précédente.

Théorème 6. *Soit (X, ω) une variété kählerienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive. Soit $\Omega \Subset X$ un domaine tel que $\text{reach}(\Omega^c) > 0$ et de fonction définissante plurisousharmonique $\rho \in \mathcal{C}^1(U)$ où $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < a\}$ avec $0 < a \leqslant \text{reach}(\Omega^c)$.*

Si

$$\exists c > 0,\ \forall z \in U \cap \Omega, \quad \tau_\Omega(z) \leqslant c < 1, \tag{5}$$

alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $-\delta_{\partial\Omega}^\alpha$ soit strictement plurisousharmonique sur $U \cap \Omega$.

Sa preuve nécessite l'utilisation de (3) sur l'exhaustion $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$. Grâce à l'hypothèse (5) et à la régularité du bord, l'exposant α peut alors être choisi indépendamment de k et une convergence au sens des courants nous permet de conclure. On peut formuler également une réciproque partielle à ce théorème :

Théorème 7. *Soit (X, ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe positive. Soit $\Omega \Subset X$ un domaine tel que $\text{reach}(\Omega^c) > 0$, et de fonction définissante $\rho \in \mathcal{C}^1(U)$ plurisousharmonique où $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < \text{reach}(\Omega^c)\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $c > 0$ tel que $\limsup_{k\to\infty}(\sup_{U\cap\Omega_k} \tau_{\Omega_k}) = c < 1$.*
2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour k assez grand, $-\delta_{\partial\Omega_k}^\alpha$ est strictement plurisousharmonique sur $U \cap \Omega_k$.*

En utilisant, comme dans [11], la méthode de Berndtsson et Charpentier [2], le Théorème 6 nous permet d'obtenir des estimées L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ sur un pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^1$:

Théorème 8. *Soit (X, ω) une variété kählérienne complète à courbure bisectionnelle holomorphe strictement positive. Soit $\Omega \Subset X$ un domaine tel que $\text{reach}(\Omega^c) > 0$ et de fonction définissante plurisousharmonique $\rho \in \mathcal{C}^1(U)$ où $U = \{z \in X \mid |\delta_{\partial\Omega}(z)| < \text{reach}(\Omega^c)\}$. Si*

$$\exists c > 0,\ \forall z \in U \cap \Omega, \quad \tau_\Omega(z) \leqslant c < 1,$$

alors pour toute forme $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap Ker(\bar\partial)$ où $0 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$, il existe $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ et une constante $C_0 > 0$ telle que,

$$\bar\partial u = f \quad et \quad \|u\|_{L^2} \leqslant C_0 \|f\|_{L^2}.$$

Références

[1] V. Bangert, Sets with positive reach, Arch. Math 38 (1982) 54–57.
[2] B. Berndtsson, P. Charpentier, A Sobolev mapping property of the Bergman kernel, Math. Z. 235 (2000) 1–10.
[3] J. Cao, M.-C. Shaw, The $\bar\partial$-Cauchy problem and nonexistence of Lipschitz Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{CP}^n$ with $n \geqslant 3$, Math. Z. 256 (2007) 175–192.
[4] M.C. Delfour, J.-P. Zolesio, Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization, 2nd edition, SIAM, 2011.
[5] J.P. Demailly, Mesures de Monge–Ampère et mesures plurisousharmoniques, Math. Z. 194 (1987) 519–564.
[6] K. Diederich, J.E. Fornaess, Pseudoconvex domains: Bounded strictly plurisubharmonic functions, Invent. Math. 39 (1977) 129–141.
[7] G. Elencwajg, Pseudo-convéxité locale dans les variétés kählériennes, Ann. Inst. Fourier 25 (1975) 295–314.
[8] H. Federer, Curvatures measures, Amer. Math. Soc. 93 (1959) 418–491.
[9] R.E. Greene, H. Wu, On Kähler manifolds of positive bisectional curvature and a theorem of Hartogs, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 47 (1978) 171–185.
[10] R.E. Greene, H. Wu, $\mathcal{C}^\infty$ approximations of convex, subharmonic and plurisubharmonic function, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 12 (1) (1979) 47–84.
[11] G.M. Henkin, A. Iordan, Regularity of $\bar\partial$ on pseudoconcave compacts and applications, Asian J. Math. 4 (4) (2000) 855–884.

[12] K. Lucas, Submanifolds of dimension $n-1$ in $\mathcal{E}^n$ with normals satisfying a Lipschitz condition, Studies in eigenvalue problems, Technical report, Department of Mathematics, University of Kansas, 1957.
[13] T. Ohsawa, N. Sibony, Bounded P.S.H functions and pseudoconvexity in Kähler manifold, Nagoya Math. J. 149 (1998) 1–8.
[14] O. Suzuki, Pseudoconvex domains on Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 12 (1976/1977) 191–214.
[15] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan 16 (1964) 159–181.