C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 651–654

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Représentations modulo p d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Modulo p representations of a Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Mathieu Vienney

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 26 mars 2012
Accepté après révision le 19 juillet 2012
Disponible sur Internet le 30 août 2012

Présenté par Jean-Marc Fontaine

RÉSUMÉ

Nous prouvons que si k est un corps fini de caractéristique p, alors une représentation k-linéaire lisse irréductible à caractère central d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est soit de dimension finie, soit isomorphe à l'image d'une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ par le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}(V)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ de Colmez.

ABSTRACT

We prove that every smooth irreducible representation of a Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admitting a central character, with coefficients in a finite field of characteristic p is either finite-dimensional or isomorphic to the image of a Galois representation via Colmez's functor $V \mapsto \mathbf{D}(V)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Suivant la philosophie de la correspondance de Langlands modulo p de Breuil [2], Colmez [3] a construit une bijection entre certaines représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. En particulier, cette bijection repose sur l'équivalence de Fontaine [5] entre représentations p-adiques et (φ, Γ)-modules, ainsi que sur une construction permettant d'associer à un (φ, Γ)-module irréductible une représentation irréductible d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Schneider et Vignéras [6] ont proposé dans un cadre plus général une construction réciproque, permettant d'associer à une représentation irréductible d'un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif p-adique un « (φ, Γ)-module généralisé », ne vérifiant pas nécessairement d'hypothèse de finitude.

Nous montrons ici comment utiliser les travaux d'Emerton [4] afin d'obtenir la condition de finitude manquante dans le cas d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

1. Notations

Soit p un nombre premier et k un corps de caractéristique p. Soit B le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures, $K = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p^\times \end{smallmatrix}\right)$ l'intersection de B et de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, $Z = \mathbf{Q}_p^\times \cdot \mathrm{Id}$ le centre de B et $N_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

On note P^+ le sous-monoïde $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de B, et $P^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p - \{0\} \end{smallmatrix}\right)$.

Adresse e-mail : mathieu.vienney@ens-lyon.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.07.007

2. (φ, Γ)-modules, (ψ, Γ)-modules et représentations de B

Soit $k((\pi))$ le corps des séries de Laurent à une indéterminée à coefficients dans k, et $\varphi : k((\pi)) \to k((\pi))$ le morphisme qui à $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^n$ associe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^{pn}$. Considérons aussi l'action de $\Gamma = \mathbf{Z}_p^\times$ sur $k((\pi))$ donnée par $a\cdot\pi = (1+\pi)^a - 1$. Dans l'esprit des (φ, Γ)-modules de Fontaine, nous définissons alors les (φ, Γ)-modules sur $k((\pi))$:

Définition 2.1. On appelle (φ, Γ)-module sur $k((\pi))$ un espace vectoriel D de dimension finie sur $k((\pi))$, muni d'une application $\varphi : D \to D$ semi-linéaire, telle que $\mathrm{Im}(\varphi)$ contienne une base de D, et d'une action semi-linéaire de Γ commutant à φ.

On construit un inverse à gauche de φ de la manière suivante : tout élément $x \in D$ peut s'écrire de manière unique $\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(x_i)$, avec $x_i \in D$, et on pose alors :

$$\psi_D\left(\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(x_i)\right) = x_0.$$

$D^\natural$ est défini comme étant le plus petit $k[[\pi]]$-réseau de D qui soit stable par ψ_D, et tel que $\psi_D : D^\natural \to D^\natural$ soit surjectif. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.2. On appelle (ψ, Γ)-module un $k[[\pi]]$-module M de type fini, muni d'un opérateur $\psi : M \to M$, k-linéaire, vérifiant $\psi(\lambda(\pi^p)x) = \lambda(\pi)\psi(x)$, pour tous $\lambda \in k[[\pi]]$ et $x \in M$; ainsi que d'une action semi-linéaire de $\Gamma = \mathbf{Z}_p^\times$, commutant à ψ. On dit alors que M est :

– surjectif si $\psi : M \to M$ est surjectif,
– non-dégénéré si $\mathrm{Ker}\,\psi$ ne contient pas de sous-$k[[\pi]]$-module non-nul,
– irréductible si les seuls sous-(ψ, Γ)-modules de M sont M et 0.

Notons qu'un (ψ, Γ)-module irréductible qui n'est pas de torsion est toujours libre sur $k[[\pi]]$, surjectif et non-dégénéré. De plus, sous certaines conditions, il est possible de retrouver une structure de (φ, Γ)-module, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit M un (ψ, Γ)-module libre de type fini sur $k[[\pi]]$, surjectif et non-dégénéré. Alors il existe une unique structure de (φ, Γ)-module sur $D = M \otimes_{k[[\pi]]} k((\pi))$ telle que $\psi = \psi_D$. De plus, si M est irréductible, alors $M = D^\natural$.*

Si D est un (φ, Γ)-module, alors le réseau $D^\natural$ de D introduit par Colmez est un (ψ, Γ)-module. En particulier, si D est un (φ, Γ)-module irréductible, alors $D^\natural$ est un (ψ, Γ)-module irréductible de rang égal à la dimension de D, de sorte qu'il existe des (ψ, Γ)-modules irréductibles de rang arbitrairement grand.

La construction de Colmez permet d'associer à un caractère lisse χ de $\mathbf{Q}_p^\times$ et un (ψ, Γ)-module irréductible M une représentation de B notée $\Omega_\chi(M)$, lisse irréductible et de caractère central χ. Pour cela, on munit le k-espace vectoriel $\varprojlim_{\psi_D} M$ d'une action continue de B en utilisant la structure de $k[[\pi]]$-module de M, l'action de Γ ainsi que celle de ψ_D.

La représentation $\Omega_\chi(M)$ est alors définie par

$$\Omega_\chi(M) = (\varprojlim_{\psi} M)^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varprojlim_{\psi} M, k).$$

Dans la suite, nous prouvons que toute représentation lisse irréductible de B, à caractère central et de dimension infinie est de cette forme. Pour cela nous prouvons le résultat suivant :

Proposition 2.4. *Soit Π une représentation k-linéaire, lisse, irréductible de* B*, admettant un caractère central χ, et soit M un (ψ, Γ)-module libre tel qu'il existe un morphisme non nul* B*-équivariant $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi} M$. Alors :*

– *soit Π est de dimension finie,*
– *soit il existe un sous-quotient M_0 de M, irréductible en tant que (ψ, Γ)-module tel que $\Pi \simeq \Omega_\chi(M_0)$.*

La difficulté est alors de construire un (ψ, Γ)-module M vérifiant les propriétés de l'énoncé.

3. Dualité de Pontryagin et lemme de Nakayama

Le foncteur qui à un k-espace vectoriel associe son dual, induit une anti-équivalence entre la catégorie des k-espaces vectoriels discrets et celle des k-espaces vectoriels linéairement compacts, c'est-à-dire des k-espaces vectoriels topologiques qui sont limites projectives de k-espaces vectoriels de dimension finie munis de la topologie discrète. Cette dualité s'étend en une dualité entre les représentations k-linéaires lisses d'un groupe localement profini G et les représentations de G sur des k-espaces vectoriels linéairement compacts. De plus, elle préserve les représentations topologiquement irréductibles.

Enfin, on peut prouver que si V est une représentation lisse de B, alors le dual de l'espace V^{N_0} des N_0-invariants est formé des N_0-coinvariants du dual, c'est-à-dire $(V^{N_0})^* = (V^*)_{N_0} := V^*/V^*(N_0)$ où $V^*(N_0)$ est le sous-espace vectoriel de V^* engendré par les $n \cdot f - f$, $n \in N_0$, $f \in V^*$.

Si V est une représentation linéairement compacte ou lisse de N_0, alors on peut la munir de manière canonique d'une structure de module sur son algèbre d'Iwasawa $k[\![N_0]\!]$. Or, $k[\![N_0]\!] \simeq k[\![\pi]\!]$, l'isomorphisme faisant correspondre $(1+\pi)$ à l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Nous disposons alors d'un « lemme de Nakayama » topologique :

Proposition 3.1. *Si V est un $k[\![\pi]\!]$-module topologique, alors V est de type fini si et seulement si $V/\pi V$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

4. Représentations irréductibles du Borel

Soit Π une représentation k-linéaire lisse de B, irréductible, admettant un caractère central. Berger a montré dans [1] qu'il existait deux caractères lisses σ_1, σ_2 de $\mathbf{Q}_p^\times$, que l'on peut choisir de sorte que $\sigma_2(p) = 1$, tels que Π soit un quotient de l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, où $\sigma := \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est le caractère de KZ qui à $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ associe $\sigma_1(a)\sigma_2(d)$. Soit donc R la sous-représentation de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ telle que

$$0 \to R \to \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \to \Pi \to 0.$$

À tout élément $b \in \mathrm{B}$ est associé un élément $[b]$ de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, et ces éléments engendrent $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$. Soit $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ engendré par les $[g]$, $g \in P^+$, $R^+ = (\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \cap R$, et Π^+ l'image dans Π des éléments de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$. Alors Π^+ est stable sous l'action de P^+Z, et en tant que représentation de P^+Z, est isomorphe à $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/R^+$.

Proposition 4.1. *Si Π est un quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, sans quotient isomorphe à σ, alors $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Comme Π^+ est muni d'une action de N_0, c'est naturellement un $k[\![\pi]\!]$-module. Suivant Emerton [4], si on note $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$ l'anneau des polynômes non commutatifs en ϕ, Π^+ est même un $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module, l'action de ϕ correspondant à celle de $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. La proposition 3.5 de [4] prouve que l'ensemble $(\Pi^+)^{\pi=0}$ des éléments de Π^+ annulés par π forme un k-espace vectoriel de dimension finie si et seulement si $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est lui-même un k-espace vectoriel de dimension finie. De la suite exacte courte de $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-modules

$$0 \to R^+ \to \left(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma\right)^+ \to \Pi^+ \to 0$$

on déduit la suite exacte de $k[\phi]$-modules

$$R/\pi R^+ \to \left(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma\right)^+/\pi\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma\right)^+ \to \Pi^+/\pi\Pi^+ \to 0,$$

où l'on peut prouver par un calcul explicite que $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ est isomorphe à $k[\phi]$. Un autre calcul permet de prouver que si Π n'a pas de quotient isomorphe à σ, alors l'image de πR^+ par la projection canonique n'est pas incluse dans $\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$, et donc que $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est un quotient strict de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ = k[\phi]$, et donc de dimension finie sur k. □

Puisque l'action de $(1+\pi)$ correspond à celle de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $(\Pi^+)^{\pi=0}$ est formé des éléments stables sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et donc est l'ensemble $(\Pi^+)^{N_0}$ des N_0-invariants.

Le dual de Π^+ est alors muni d'une action de $(P^+Z)^{-1} = P^-Z$. Puisque $(\Pi^+)^{N_0}$ est de dimension finie sur k, il en est de même de son dual $((\Pi^+)^*)_{N_0}$. Or, ces coinvariants sont exactement le quotient $(\Pi^+)^*/\pi(\Pi^+)^*$, en tant que $k[\![\pi]\!]$-module. Par le lemme de Nakayama topologique, on en déduit que $(\Pi^+)^*$ est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini.

De plus, l'action de P^- permet de définir une structure de (ψ, Γ)-module sur $(\Pi^+)^*$ en posant

$$\psi(v) = \begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix} \cdot v \quad \text{et} \quad a \cdot v = \begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix} \cdot v \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^\times.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une structure de (ψ, Γ)-module.

Par construction, on dispose d'un morphisme B-équivariant non nul $V^* \to \varprojlim_{\psi}(\Pi^+)^*$.

Il est alors possible d'utiliser la proposition 2.4 en prenant Π^+ comme (ψ, Γ)-module, puis en utilisant la proposition 2.3, d'en déduire un (φ, Γ)-module, et donc d'en déduire le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit Π une représentation k-linéaire, lisse, irréductible de* B*, admettant un caractère central χ. Alors* :

- *soit Π est de dimension finie,*
- *soit il existe un (φ, Γ)-module irréductible D, unique à isomorphisme près, tel que*

$$\Pi \simeq \Omega_\chi\left(D^\natural\right).$$

Remarque 4.3. Dans le cas où k est fini, on peut, si Π est de dimension infinie, lui associer la représentation k-linéaire de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ attachée à D par l'équivalence de catégories de Fontaine [5] entre (φ, Γ)-modules étales et représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Laurent Berger. Les résultats exposés ici sont une partie de ma thèse menée sous sa direction.

Références

[1] L. Berger, On some modular representations of the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Compos. Math. 146 (1) (2010) 58–80.
[2] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{Q}_p)$. II, J. Inst. Math. Jussieu 2 (1) (2003) 23–58 (in French, with French summary).
[3] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010) 61–153.
[4] M. Emerton, On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ in characteristic p, 2008, Prépublication.
[5] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in : The Grothendieck Festschrift, vol. II, in : Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309 (in French).
[6] P. Schneider, M.-F. Vignéras, A functor from smooth $\mathfrak{o}$-torsion representations to (φ, Γ)-modules, 2008, Prépublication.