C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 549–552

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire

Construction d'opérades ensemblistes à partir de monoïdes

Constructing set-operads from monoids

Samuele Giraudo

Institut Gaspard-Monge, université Paris-Est Marne-la-Vallée, 5, boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 23 mars 2012
Accepté après révision le 8 juin 2012
Disponible sur Internet le 23 juin 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous étudions une construction fonctorielle de la catégorie des monoïdes vers la catégorie des opérades ensemblistes et donnons des exemples combinatoires d'applications.

ABSTRACT

We study a functorial construction from the category of monoids to the category of set-operads and we give some combinatorial examples of applications.

1. Introduction

Les *opérades* sont des structures algébriques qui formalisent la notion de composition d'opérateurs et les relations qu'ils vérifient. Plus précisément, une opérade contient des opérateurs munis de $n \geqslant 1$ entrées et d'une unique sortie. Deux opérateurs x et y peuvent être composés en i^{e} position en greffant la sortie de y sur la i^{e} entrée de x. Le nouvel opérateur ainsi obtenu est noté $x \circ_i y$. Il est de plus possible dans une opérade de permuter les entrées d'un opérateur x en faisant agir une permutation σ. Le nouvel opérateur ainsi obtenu est noté $x \cdot \sigma$. L'un des principaux points forts de cette théorie est qu'elle offre un cadre et un formalisme général pour étudier de manière unifiée différents types d'algèbres, comme les algèbres associatives et les algèbres de Lie. Dans cette article, nous considérons exclusivement les *opérades ensemblistes* qui sont des ensembles de la forme $\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où les $\mathcal{P}(n)$ sont des ensembles d'éléments d'*arité* n, munis d'*applications de greffe*

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1), \quad n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1}$$

et d'une *action du groupe symétrique*

$$\cdot : \mathcal{P}(n) \times \mathfrak{S}_n \to \mathcal{P}(n), \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

qui vérifient des axiomes naturels.

Nous proposons dans ce travail une construction fonctorielle T qui permet d'obtenir des opérades $\mathsf{T}M$ à partir de monoïdes M. Les éléments de $\mathsf{T}M$ d'arité n sont les mots de longueur n sur M vu comme un alphabet, et l'expression de la greffe dans cette opérade s'obtient directement par l'expression du produit de M.

Dans des travaux antérieurs, Berger et Moerdijk [1] proposèrent une construction T qui permet d'obtenir, à partir d'une bigèbre commutative $\mathcal{B}$, une coopérade $T\mathcal{B}$. Notre construction T et la construction T de ces deux auteurs sont différentes

Adresse e-mail : samuele.giraudo@univ-mlv.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.06.002

mais coïncident dans de nombreux cas. Par exemple, lorsque $(M, \bullet)$ est un monoïde tel que pour tout $x \in M$, l'ensemble des couples $(y, z) \in M^2$ qui vérifient $y \bullet z = x$ est fini, alors l'opérade $\mathsf{T}M$ est la duale de la coopérade $T\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est la bigèbre duale de la bigèbre $\mathbb{K}[M]$ munie du coproduit diagonal ($\mathbb{K}$ est un corps). En revanche, il existe des opérades que l'on peut obtenir par la construction T mais pas par la construction T – et réciproquement. Par exemple, l'opérade $\mathsf{T}\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}$ est le monoïde additif des entiers relatifs ne peut être obtenue comme duale d'une coopérade constructible par la construction de Berger et Moerdijk.

En outre, notre construction est définie dans la catégorie des ensembles et les calculs y sont explicites. Il est donc possible, à partir d'un monoïde M quelconque de calculer simplement, si nécessaire à l'aide de l'ordinateur, dans l'opérade $\mathsf{T}M$.

Dans cet article, nous étudions plusieurs applications de la construction T et mettons l'accent sur son caractère combinatoire. Plus précisément, nous définissons, à partir de monoïdes usuels – comme le monoïde additif des entiers naturels ou les monoïdes cycliques – diverses opérades qui mettent en jeu plusieurs objets combinatoires connus. Nous construisons ainsi des opérades sur des objets qui n'étaient pas pourvus d'une telle structure : arbres d'arité fixée, chemins de Motzkin, compositions d'entiers, animaux dirigés et compositions d'entiers segmentées. Nous obtenons aussi de nouvelles opérades sur des objets déjà pourvus d'une telle structure : fonctions de parking, mots tassés, arbres plans enracinés et arbres de Schröder. Notre construction permet également de retrouver des opérades déjà connues par ailleurs, comme l'opérade magmatique, l'opérade commutative associative et l'opérade diassociative [3].

2. Un foncteur des monoïdes vers les opérades ensemblistes

Soit $(M, \bullet)$ un monoïde. Définissons $\mathsf{T}M$ comme l'ensemble $\mathsf{T}M := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathsf{T}M(n)$, où pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathsf{T}M(n) := \big\{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_i \in M \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\big\}. \tag{3}$$

Les éléments de $\mathsf{T}M(n)$ sont ainsi les mots sur l'alphabet M de longueur n. Munissons maintenant l'ensemble $\mathsf{T}M$ d'applications de greffe

$$\circ_i : \mathsf{T}M(n) \times \mathsf{T}M(m) \to \mathsf{T}M(n + m - 1), \quad n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4}$$

définies pour tous $x \in \mathsf{T}M(n)$, $y \in \mathsf{T}M(m)$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ par

$$x \circ_i y := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \ldots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Par exemple, si M est le monoïde additif des entiers naturels, nous avons dans $\mathsf{T}M$, $2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$. Munissons également chaque ensemble $\mathsf{T}M(n)$ d'une action à droite du groupe symétrique

$$\cdot : \mathsf{T}M(n) \times \mathfrak{S}_n \to \mathsf{T}M(n), \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

définie pour tous $x \in \mathsf{T}M(n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par

$$x \cdot \sigma := (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}). \tag{7}$$

Par exemple, si $\mathtt{bbcba}$ est un élément de $\mathsf{T}M$ et σ est la permutation 23514, nous avons $\mathtt{bbcba} \cdot \sigma = \mathtt{bcabb}$.

Si M et N sont deux monoïdes et $\theta : M \to N$ un morphisme de monoïdes, notons $\mathsf{T}\theta$ l'application

$$\mathsf{T}\theta : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}N, \tag{8}$$

définie pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{T}M(n)$ par

$$\mathsf{T}\theta(x_1, \ldots, x_n) := \big(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_n)\big). \tag{9}$$

Théorème 2.1. *La construction* T *est un foncteur de la catégorie des monoïdes avec morphismes de monoïdes vers la catégorie des opérades ensemblistes avec morphismes d'opérades ensemblistes. De plus,* T *respecte les injections et les surjections.*

3. Quelques opérades obtenues par le foncteur T

Pour illustrer la richesse combinatoire de la construction T, nous construisons à présent des sous-opérades symétriques ou non de l'opérade obtenue à partir du monoïde additif des entiers naturels $\mathbb{N}$ et énonçons quelques-unes de leurs propriétés. Dans ce qui suit, $\mathbb{N}_2$ (resp. $\mathbb{N}_3$) désigne le monoïde des entiers naturels modulo 2 (resp. 3). La Fig. 1 répertorie les relations entre ces opérades.

Un mot u est une endofonction (resp. fonction de parking, mot tassé) *tordue* si le mot $(u_1 + 1, u_2 + 1, \ldots, u_{|u|} + 1)$ est une endofonction (resp. fonction de parking, mot tassé). Notons End (resp. FP, MT) l'ensemble des endofonctions (resp. fonctions de parking, mots tassés).

Proposition 3.1. *Les ensembles* End, FP *et* MT *forment des sous-opérades symétriques de* $\mathsf{T}\mathbb{N}$. *De plus,* MT *est engendrée, en tant qu'opérade symétrique, par* 00 *et* 01.

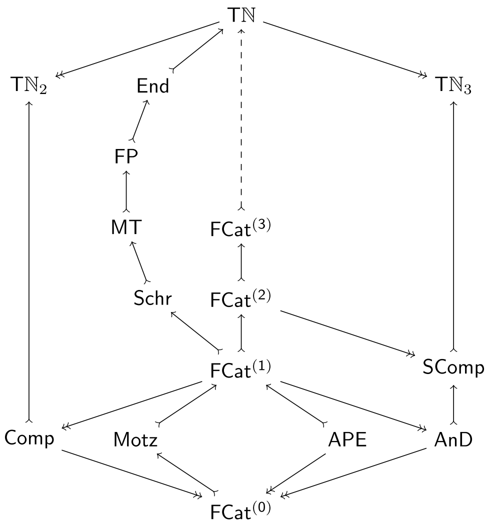

Fig. 1. Le diagramme des sous-opérades et quotients non-symétriques de l'opérade $\mathsf{T}\mathbb{N}$. Les flèches $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$) sont des morphismes injectifs (resp. surjectifs) d'opérades non-symétriques.

Théorème 3.2. *Soit* APE *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}$ *engendrée par* 01. *Alors, les éléments de* APE *d'arité n sont exactement les mots x sur l'alphabet* $\mathbb{N}$ *qui vérifient* $x_1 = 0$ *et* $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *De plus, les éléments de* APE *d'arité n sont en bijection avec les arbres plans enracinés à n nœuds. Enfin,* APE *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre sur un générateur d'arité deux.*

Théorème 3.3. *Soit* $k \geqslant 0$ *et* $\mathsf{FCat}^{(k)}$ *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}$ *engendrée par* $00, 01, \ldots, 0k$. *Alors, les éléments de* $\mathsf{FCat}^{(k)}$ *d'arité n sont exactement les mots x sur l'alphabet* $\mathbb{N}$ *qui vérifient* $x_1 = 0$ *et* $0 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + k$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *De plus, les éléments de* $\mathsf{FCat}^{(k)}$ *d'arité n sont en bijection avec les arbres plans enracinés d'arité* $k+1$ *et de taille n. Enfin,* $\mathsf{FCat}^{(2)}$ *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre engendrée par deux générateurs* $\mathtt{a}$ *et* $\mathtt{b}$ *d'arité deux, sujets aux trois relations*

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{10}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{11}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}. \tag{12}$$

Théorème 3.4. *Soit* Schr *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}$ *engendrée par* 00, 01 *et* 10. *Alors, les éléments de* Schr *sont exactement les mots x sur l'alphabet* $\mathbb{N}$ *qui ont au moins une occurrence de* 0 *et tels que pour toute lettre* $b \geqslant 1$ *de x, il existe une lettre* $a = b - 1$ *telle que x possède un facteur aub ou bua où u est un mot composé de lettres c vérifiant* $c \geqslant b$. *De plus, les éléments de* Schr *d'arité n sont en bijection avec les arbres de Schröder* [2] *à n feuilles. Enfin,* Schr *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre engendrée par trois générateurs* $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$ *et* $\mathtt{c}$ *d'arité deux, sujets aux sept relations*

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{13}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{14}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{c} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{15}$$

$$\mathtt{c} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{c}, \tag{16}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{17}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{c} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{18}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{c}. \tag{19}$$

Théorème 3.5. *Soit* Motz *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}$ *engendrée par* 00 *et* 010. *Alors, les éléments de* Motz *d'arité n sont exactement les mots sur l'alphabet* $\mathbb{N}$ *qui commencent et se terminent par* 0 *et tels que* $|x_i - x_{i+1}| \leqslant 1$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *De plus, les éléments de* Motz *d'arité n sont en bijection avec les chemins de Motzkin* [2] *à n pas. Enfin,* Motz *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre engendrée par un générateur* $\mathtt{a}$ *d'arité deux et un générateur* $\mathtt{b}$ *d'arité trois, sujets aux quatre relations*

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{20}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_3 \mathtt{a}, \tag{21}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{22}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_3 \mathtt{b}. \tag{23}$$

Théorème 3.6. *Soit* Comp *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}_2$ *engendrée par* 00 *et* 01*. Alors, les éléments de* Comp *sont exactement les mots sur l'alphabet* $\{0, 1\}$ *qui commencent par* 0*. De plus, les éléments de* Comp *d'arité n sont en bijection avec les compositions de l'entier n. Enfin,* Comp *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre engendrée par deux générateurs* $\mathtt{a}$ *et* $\mathtt{b}$ *d'arité deux, sujets aux quatre relations*

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{24}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{25}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{26}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}. \tag{27}$$

Proposition 3.7. *Soit* AnD *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}_3$ *engendrée par* 00 *et* 01*. Alors, les éléments de* AnD *d'arité n sont en bijection avec les animaux dirigés* [2] *de taille n. De plus,* AnD *n'admet pas de présentation quadratique.*

Théorème 3.8. *Soit* SComp *la sous-opérade non-symétrique de* $\mathsf{T}\mathbb{N}_3$ *engendrée par* 00, 01 *et* 02*. Alors, les éléments de* SComp *sont exactement les mots sur l'alphabet* $\{0, 1, 2\}$ *qui commencent par* 0*. De plus, les éléments de* SComp *d'arité n sont en bijection avec les compositions segmentées* [2] *de l'entier n. Enfin,* SComp *est isomorphe à l'opérade non-symétrique libre engendrée par trois générateurs* $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$ *et* $\mathtt{c}$ *d'arité deux, sujets aux neuf relations*

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{28}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{29}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{30}$$

$$\mathtt{c} \circ_1 \mathtt{a} = \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{c}, \tag{31}$$

$$\mathtt{c} \circ_1 \mathtt{c} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{a}, \tag{32}$$

$$\mathtt{b} \circ_1 \mathtt{c} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{c}, \tag{33}$$

$$\mathtt{c} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}, \tag{34}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} = \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{c}, \tag{35}$$

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{c} = \mathtt{c} \circ_2 \mathtt{b}. \tag{36}$$

Proposition 3.9. *Soit le monoïde* $M := \{0, 1\}$ *muni de la multiplication des entiers comme produit. Soit* D *la sous-opérade de* $\mathsf{T}M$ *engendrée par* 01 *et* 10*. Alors, les éléments de* D *sont exactement les mots qui contiennent exactement une occurrence de* 1*. De plus,* D *est isomorphe à l'opérade diassociative* [3].

Références

[1] C. Berger, I. Moerdijk, Axiomatic homotopy theory for operads, Comment. Math. Helv. 78 (4) (2003) 805–831.
[2] P. Flajolet, R. Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge University Press, 2009.
[3] J.-L. Loday, Dialgebras, in: Lecture Notes in Math., vol. 1763, 2001, pp. 7–66.