C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 433–437

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Logique/Combinatoire

Les paires de tournois $\{-3\}$-hypomorphes

The pairs of $\{-3\}$-hypomorphic tournaments

Mouna Achour [a], Youssef Boudabbous [b,1], Abderrahim Boussaïri [c]

[a] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Sfax, université de Sfax, BP 1171, 3000 Sfax, Tunisie*
[b] *King Saud University, Department of Mathematics, College of Sciences, P.O. Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia*
[c] *Faculté des sciences Aïn-Chock, département de mathématiques et informatique, Km 8 route d'El Jadida, BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 23 mai 2011
Accepté après révision le 27 avril 2012
Disponible sur Internet le 8 mai 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Suite au problème de la $\{-k\}$-reconstruction posé par M. Pouzet, étant donné un tournoi décomposable T sur un ensemble S à $n \geqslant 9$ éléments, nous décrivons les tournois T' sur S tels que pour toute partie X à $n-3$ éléments de S, les sous-tournois $T'[X]$ et $T[X]$ sont isomorphes.

ABSTRACT

Following the problem of the $\{-k\}$-reconstruction proposed by M. Pouzet, given a decomposable tournament T on a set V with $n \geqslant 9$ elements, we describe the tournaments T' on V such that for each subset X with $n-3$ elements of V, the subtournaments $T'[X]$ and $T[X]$ are isomorphic.

Abridged English version

For the basic definitions on the tournaments, we can see [1,4,6]. Let $T=(V,A)$ be a tournament. The *dual* of T is the tournament $T^*=(V,A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(x,y) \in A^*$ if and only if $(y,x) \in A$. The tournament T is *acyclic* (or a *total order*) provided that for any $x, y, z \in V$, if $(x,y) \in A$ and $(y,z) \in A$, then $(x,z) \in A$. An *almost total order* is a tournament obtained from a total order with at least three vertices by reversing the arc formed by its two extremal vertices. A set I of vertices is an *interval* of T if every point outside I has the same behaviour w.r.t. to all points of I. The tournament T is *indecomposable* if $\emptyset$, V and $\{x\}$ (where $x \in V$) are the only intervals of T; otherwise, it is *decomposable*. A partition $\mathcal{P}$ of V is an interval partition of T if all the elements of $\mathcal{P}$ are intervals of T. It ensues that the elements of $\mathcal{P}$ may be considered as the vertices of a new tournament, the *quotient* $T/\mathcal{P}=(\mathcal{P}, A/\mathcal{P})$ of T by $\mathcal{P}$, defined in the following way: for any $X \neq Y \in \mathcal{P}$, $(X,Y) \in A/\mathcal{P}$ if $(x,y) \in A$, for $x \in X$ and $y \in Y$. Given a family $X_1, \dots, X_k$ of pairwise disjoint subsets of V, we denote $Inv(\{X_1, \dots, X_k\}, T)$, the tournament obtained from T by reversing, for each $i \in \{1, \dots, k\}$, all the arcs of the subtournament $T[X_i]$.

A tournament T on a set V is *self dual* if T and T^* are isomorphic, it is *strongly self dual* if for every subset X of V, $T[X]$ and $T^*[X]$ are isomorphic. In [15], K.B. Reid and C. Thomassen showed that a tournament with $n \geqslant 8$ vertices is strongly

Adresses e-mail : mouna_achour@yahoo.fr (M. Achour), yboudabbous@ksu.edu.sa, youssef_boudabbous@yahoo.fr (Y. Boudabbous), aboussairi@hotmail.com (A. Boussaïri).

[1] This author extends his appreciation to the Deanship of Scientific Research at King Saud University for funding the work through the research group project No. RGP-VPP-056.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.04.022

self dual if and only if it is a total order or an almost total order. This result was used in [15] in order to characterize the pairs of hereditarily isomorphic tournaments, that is, the pairs of tournaments T, T' on a set V such that for every subset X of V, the subtournaments $T[X]$ and $T'[X]$ are isomorphic. If T is strongly self dual, then the determination of hereditarily isomorphic tournaments to T is easy. A relaxed version of this notion is the following.

Consider two tournaments T and T' on the same vertex set V with n elements and let k be a non-negative integer. The tournaments T and T' are $\{k\}$-*hypomorphic* whenever for every subset X of V with $|X| = k$, the subtournaments $T[X]$ and $T'[X]$ are isomorphic. T and T' are $\{-k\}$-*hypomorphic* whenever either $k > n$ or $k \leqslant n$ and T and T' are $\{n-k\}$-hypomorphic. Notice that T and T' are trivially $\{0\}$-hypomorphic, however T and T' are $\{-0\}$-hypomorphic if and only if they are isomorphic. Let F be a set of integers. The tournaments T and T' are F-*hypomorphic*, if for every $p \in F$, T and T' are $\{p\}$-hypomorphic. The tournament T is F-*reconstructible* if every tournament F-hypomorphic to T is isomorphic to T. The tournament T is F-*self dual* if it is F-hypomorphic to its dual. For example, as each tournament with at most 3 vertices is self dual, then for each subset X with at most 3 elements of V, the subtournament $T[X]$ is $\{-0,-1,-2,-3\}$-self dual; we say simply that X is $\{-0,-1,-2,-3\}$-self dual.

Following the problem of the $\{-1\}$-reconstruction (resp. $\{1,\dots,k\}$-reconstruction) proposed by S.M. Ulam [17] (resp. R. Fraïssé [7]), P.K. Stockmeyer showed that: *the tournaments are not, in general,* $\{-1\}$-*reconstructible* [16] (resp. G. Lopez showed that: *the tournaments are* $\{1,\dots,6\}$-*reconstructible* [9–11]). Then, M. Pouzet [2,13] proposed the $\{-k\}$-reconstruction problem of tournaments. G. Lopez and C. Rauzy showed that: *the tournaments with at least* 10 *vertices are* $\{-4\}$-*reconstructible* [12]. Y. Boudabbous improved this last result by: *two* $\{-4\}$-*hypomorphic tournaments, with at least* 10 *vertices, are hereditarily isomorphic* [5]. Thus, the problem of $\{-k\}$-reconstruction remains open for $k = 2$ or 3. The second case was though to be much easier and a line of attack has been devised twenty years ago. But this case resists. Recently, we have made some progress. There are in part included in [1] and in part in this paper.

In this work, given a decomposable tournament T, we describe the tournaments $\{-3\}$-hypomorphic to T. For this, we consider the class $\mathcal{M}(T)$ of $\{-0,-1,-2,-3\}$-self dual intervals of T which are maximal under inclusion. Our description is given by the following two results:

Theorem 0.1. *Given a decomposable and non-strongly self dual tournament $T = (V, A)$, with $n \geqslant 9$ vertices, and which has no interval X such that $|X| \in \{n-1, n-2\}$ and $T[X]$ is indecomposable, the class $\mathcal{M}(T)$ forms an interval partition of T and for each $X \in \mathcal{M}(T)$, the subtournament $T[X]$ of T is strongly self dual or indecomposable. Moreover, a tournament T' defined on V is $\{-3\}$-hypomorphic to T if and only if the following assertions are satisfied.*

(i) *$\mathcal{M}(T)$ is an interval partition of T'.*
(ii) *$T'/\mathcal{M}(T) = T/\mathcal{M}(T)$.*
(iii) *For every $X \in \mathcal{M}(T)$, if $T[X]$ is strongly self dual, then $T'[X]$ is hereditarily isomorphic to $T[X]$, and if $T[X]$ is indecomposable, then $T'[X] = T[X]$ or $T^*[X]$.*

Proposition 0.1. *Given a tournament T with $n \geqslant 9$ vertices which admits an interval X such that $|X| \in \{n-1, n-2\}$ and $T[X]$ is indecomposable, we have*:

(i) *If $|X| = n-1$ and $T[X]$ is not (resp. is) $\{-2,-3\}$-self dual, then T is (resp. T and Inv$(\{X\}, T)$ are) the only tournament (resp. tournaments) $\{-3\}$-hypomorphic to T.*
(ii) *If $|X| = n-2$, $V - X$ is not an interval of T and $T[X]$ is not (resp. is) $\{-1,-2,-3\}$-self dual, then T is (resp. T and Inv$(\{X\}, T)$ are) the only tournament (resp. tournaments) $\{-3\}$-hypomorphic to T.*
(iii) *If $|X| = n-2$, $V - X$ is an interval of T and $T[X]$ is not (resp. is) $\{-1,-2,-3\}$-self dual, then T and Inv$(\{V - X\}, T)$ are (resp. T, Inv$(\{X\}, T)$, Inv$(\{V - X\}, T)$ and Inv$(\{X, V - X\}, T)$ are) the only tournaments $\{-3\}$-hypomorphic to T.*

1. Introduction et présentation des résultats

Un *tournoi* (*fini*) est un couple $T = (S, A)$ où S est un ensemble fini appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant : pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. À chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T[X] = (X, A \cap (X \times X))$ de T *induit* par X. Le *dual* de T est le tournoi $T^* = (S, A^*)$ où $A^* = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$. Le tournoi T est *acyclique* (ou est un *ordre total*) lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Un *presque ordre total* est un tournoi obtenu à partir d'un ordre total d'au moins 3 sommets, en inversant l'arc formé par ses sommets extrêmes. Un *isomorphisme* de T sur un tournoi $T' = (S', A')$ est une bijection f de S sur S' telle que pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que les tournois T et T' sont *isomorphes* et on note $T' \sim T$.

Considérons un tournoi $T = (S, A)$. Une partie I de S est un *intervalle* de T si pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Le tournoi T est *indécomposable* si $\emptyset$, S et les singletons $\{x\}$ (où $x \in S$) sont les seuls intervalles de T ; il est *décomposable* dans le cas contraire. Une partie $\mathcal{P}$ de l'ensemble des parties de S est une *partition intervallaire* de T lorsque $\mathcal{P}$ est une partition de S dont les éléments sont des intervalles de T. À une telle partition est associé le *tournoi quotient* $T/\mathcal{P} = (\mathcal{P}, A/\mathcal{P})$ de T par $\mathcal{P}$ défini comme suit : pour tous $X, Y \in \mathcal{P}$ avec $X \neq Y$, $(X, Y) \in A/\mathcal{P}$ si pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, $(x, y) \in A$. Étant donnée une famille $X_1, \dots, X_k$ de parties mutuellement disjointes de l'ensemble S, nous notons $Inv(\{X_1, \ldots, X_k\}, T)$, le tournoi obtenu à partir de T en inversant, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, tous les arcs du sous-tournoi $T[X_i]$.

Soit T un tournoi défini sur un ensemble de sommets S. T est *autodual* si T et T^* sont isomorphes, il est *fortement autodual* si pour toute partie X de S, $T[X]$ et $T^*[X]$ sont isomorphes. Dans [15], K.B. Reid et C. Thomassen ont montré qu'un tournoi à $n \geqslant 8$ sommets est fortement autodual si et seulement s'il est un ordre total ou un presque ordre total. Dans [15], ils ont utilisé ce résultat pour caractériser les paires de tournois héréditairement isomorphes. Deux tournois T et T' de même ensemble de sommets S sont *héréditairement isomorphes* si pour toute partie X de S, $T'[X]$ et $T[X]$ sont isomorphes. Si T est fortement autodual, alors la détermination des tournois héréditairement isomorphes à T est facile.

Considérons deux tournois T et T' de même ensemble de sommets S à n éléments et soit k un entier naturel. T et T' sont $\{k\}$-*hypomorphes* si pour toute partie X de S telle que $|X| = k$, $T'[X]$ et $T[X]$ sont isomorphes. T et T' sont $\{-k\}$-hypomorphes si ou bien $k > n$ ou bien $k \leqslant n$ et T et T' sont $\{n-k\}$-hypomorphes. Notons que T et T' sont trivialement $\{0\}$-hypomorphes, alors que T et T' sont $\{-0\}$-hypomorphes si et seulement s'ils sont isomorphes. Soit F un ensemble d'entiers. Les tournois T et T' sont F-hypomorphes si pour tout $p \in F$, T et T' sont $\{p\}$-hypomorphes. Le tournoi T est F-reconstructible si tout tournoi F-hypomorphe à T lui est isomorphe. Le tournoi T est F-autodual s'il est F-hypomorphe à son dual. Par exemple, comme tout tournoi d'au plus 3 sommets est autodual, alors pour toute partie X d'au plus 3 éléments de S, le sous-tournoi $T[X]$ est $\{-0, -1, -2, -3\}$-autodual ; on dit simplement que X est $\{-0, -1, -2, -3\}$-autodual. Suite au problème de la $\{-1\}$-reconstruction (resp. $\{1, \ldots, k\}$-reconstruction) posé par S.M. Ulam [17] (resp. R. Fraïssé [7]), P.K. Stockmeyer a montré que : les tournois ne sont pas, en général, $\{-1\}$-reconstructibles [16] (resp. G. Lopez a montré que : *les tournois sont* $\{1, \ldots, 6\}$-*reconstructibles* [9–11]). Ensuite, suite au problème de la $\{-k\}$-reconstruction posé par M. Pouzet [2,13], G. Lopez et C. Rauzy ont montré que : *les tournois d'au moins* 10 *sommets sont* $\{-4\}$-*reconstructibles* [12]. Y. Boudabbous a amélioré ce dernier résultat par : *deux tournois* $\{-4\}$-*hypomorphes, d'au moins* 10 *sommets, sont héréditairement isomorphes* [5]. Ainsi, le problème de la $\{-k\}$-reconstruction des tournois reste encore ouvert pour $k = 2$ ou 3. Le second cas, bien qu'il est considéré plus facile que le premier, résiste depuis vingt ans. Récemment, nous avons fait quelques progrès. Ils sont en partie inclus dans [1] et en partie dans la présente Note.

Dans cette Note, étant donné un tournoi décomposable T, nous décrivons les tournois $\{-3\}$-hypomorphes à T. Pour cela, nous considérons la classe $\mathcal{M}(T)$ des intervalles $\{-0, -1, -2, -3\}$-autoduaux de T qui sont maximaux pour l'inclusion. Notre description est donnée par les deux résultats suivants :

Théorème 1.1. *Étant donné un tournoi décomposable non fortement autodual $T = (S, A)$ à $n \geqslant 9$ sommets et ne possèdant aucun intervalle X tel que $|X| \in \{n-1, n-2\}$ et $T[X]$ est indécomposable, la classe $\mathcal{M}(T)$ forme une partition intervallaire de T et pour tout $X \in \mathcal{M}(T)$, le sous-tournoi $T[X]$ est fortement autodual ou indécomposable. De plus, un tournoi T' sur S est $\{-3\}$-hypomorphe à T si et seulement si les assertions suivantes sont satisfaites* :

(i) *$\mathcal{M}(T)$ est une partition intervallaire de T'.*
(ii) *$T'/\mathcal{M}(T) = T/\mathcal{M}(T)$.*
(iii) *Pour tout $X \in \mathcal{M}(T)$, si $T[X]$ est fortement autodual, alors $T'[X]$ est héréditairement isomorphe à $T[X]$ et si $T[X]$ est indécomposable, alors $T'[X] = T[X]$ ou $T^*[X]$.*

Proposition 1.2. *Étant donné un tournoi T à $n \geqslant 9$ sommets et possèdant un intervalle X tel que $|X| \in \{n-1, n-2\}$ et $T[X]$ est indécomposable, nous avons* :

(i) *Si $|X| = n-1$ et $T[X]$ n'est pas (resp. est) $\{-2, -3\}$-autodual, alors T est (resp. T et $Inv(\{X\}, T)$ sont) le seul tournoi (resp. les seuls tournois) $\{-3\}$-hypomorphe (resp. $\{-3\}$-hypomorphes) à T.*
(ii) *Si $|X| = n-2$, $S - X$ n'est pas un intervalle de T et $T[X]$ n'est pas (resp. est) $\{-1, -2, -3\}$-autodual, alors T est (resp. T et $Inv(\{X\}, T)$ sont) le seul tournoi (resp. les seuls tournois) $\{-3\}$-hypomorphe (resp. $\{-3\}$-hypomorphes) à T.*
(iii) *Si $|X| = n-2$, $S - X$ est un intervalle de T et $T[X]$ n'est pas (resp. est) $\{-1, -2, -3\}$-autodual, alors T et $Inv(\{S - X\}, T)$ sont (resp. T, $Inv(\{X\}, T)$, $Inv(\{S - X\}, T)$ et $Inv(\{X, S - X\}, T)$ sont) les seuls tournois $\{-3\}$-hypomorphes à T.*

2. Décomposition de Gallai et {3}-hypomorphie

Un tournoi T est dit *non fortement connexe* s'il admet une partition intervallaire ayant exactement deux éléments ; sinon T est dit *fortement connexe*.

Soit $T = (S, A)$ un tournoi. Une partie X de S est un *intervalle fort* de T si X est un intervalle de T et si pour tout intervalle Y de T, si $X \cap Y \neq \emptyset$, alors $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Lorsque $|S| \geqslant 2$, la famille $\mathcal{P}(T)$ des intervalles forts de T distincts de S et maximaux pour l'inclusion est une partition intervallaire de T, dite *partition de Gallai* de T. Le théorème de décomposition de Gallai pour les tournois s'énonce comme suit.

Théorème 2.1. *(Voir [8].) Soit T un tournoi d'au moins deux sommets.*

(i) *Si T est fortement connexe, alors $|\mathcal{P}(T)| \geqslant 3$ et $T/\mathcal{P}(T)$ est indécomposable.*
(ii) *Si T est non fortement connexe, alors $T/\mathcal{P}(T)$ est un ordre total.*

Soit T un tournoi d'au moins 2 sommets. Nous associons à T la partition intervallaire $\widetilde{\mathcal{P}}(T)$ définie comme suit [4] : si T est fortement connexe, on prend $\widetilde{\mathcal{P}}(T) = \mathcal{P}(T)$ et si T est non fortement connexe, ($X \in \widetilde{\mathcal{P}}(T)$) si et seulement si ($X \in \mathcal{P}(T)$ et $|X| > 1$) ou (X est une réunion maximale de sommets consécutifs de l'ordre total $T/\mathcal{P}(T)$ qui sont des singletons).

L'étude de la $\{3\}$-hypomorphie a été faite dans [6]. Les auteurs obtiennent en particulier le résultat suivant qui est très utile dans notre étude :

Théorème 2.2. *(Voir [6].) Soient T et T' deux tournois $\{3\}$-hypomorphes d'au moins 3 sommets.*

(i) $\mathcal{P}(T') = \mathcal{P}(T)$.
(ii) *T est fortement connexe si et seulement si T' est fortement connexe.*
(iii) *Si T est indécomposable, alors $T' = T$ ou $T' = T^*$.*

Notons que les assertions (i), (ii) et (iii) sont respectivement données par « Corollary 2 », « Lemma 2 » et « Corollary 1 » de [6].

3. Quelques résultats pour la preuve du Théorème 1.1

Notons $\mathcal{E}$ la classe des tournois T ayant $n \geqslant 9$ sommets et admettant un intervalle X vérifiant $|X| \in \{n-1, n-2\}$ et $T[X]$ est indécomposable. Le résultat suivant découle de notre théorème principal de [1] :

Théorème 3.1. *(Voir [1].) Considérons un tournoi décomposable non fortement autodual T ayant $n \geqslant 9$ sommets et soit T' un tournoi $\{-3\}$-hypomorphe à T. Alors :*

(i) $\widetilde{\mathcal{P}}(T') = \widetilde{\mathcal{P}}(T)$ *et* $T/\widetilde{\mathcal{P}}(T) = T'/\widetilde{\mathcal{P}}(T)$.
(ii) *Si $T \notin \mathcal{E}$, alors pour tout $X \in \widetilde{\mathcal{P}}(T)$, $T'[X] \sim T[X]$ et en particulier, $T' \sim T$.*

La preuve du Théorème 1.1 se base sur la proposition suivante

Proposition 3.2. *Soit T un tournoi, ayant $n \geqslant 9$ sommets, décomposable, non fortement autodual et qui n'est pas un élément de $\mathcal{E}$ et soit T' un tournoi $\{-3\}$-hypomorphe à T. Alors :*
$\widetilde{\mathcal{P}}(T') = \widetilde{\mathcal{P}}(T)$, $T'/\widetilde{\mathcal{P}}(T) = T/\widetilde{\mathcal{P}}(T)$ *et pour tout élément X de $\widetilde{\mathcal{P}}(T)$, $T'[X]$ et $T[X]$ sont $\{-0, -1, -2, -3\}$-hypomorphes.*

La preuve de la Proposition 3.2 se base sur le Théorème 3.1, un lemme combinatoire de Pouzet [14] et les lemmes suivants :

Lemme 3.3. *(Voir [3].) Soient $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$ deux tournois isomorphes, f un isomorphisme de T sur T', $i \in S$ et R_i (resp. R'_i) un tournoi défini sur un ensemble I_i (resp. I'_i) disjoint de S (resp. S'). Soit R (resp. R') le tournoi obtenu à partir de T (resp. T') en dilatant le sommet i (resp. $f(i)$) par R_i (resp. R'_i). Alors R et R' sont isomorphes si et seulement si R_i et R'_i sont isomorphes.*

Lemme 3.4. *Soient T et T' deux tournois non fortement connexes définis sur le même ensemble de sommets et $\mathcal{Q}$ une partition intervallaire commune de T et T' telle que $T'/\mathcal{Q}$ et $T/\mathcal{Q}$ sont deux ordres totaux égaux. Si f est un isomorphisme de T sur T', alors pour tout $X \in \mathcal{Q}$, $f(X) = X$.*

Lemme 3.5. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi décomposable d'au moins 6 sommets. Si un tournoi $T' = (S, A')$ est $\{3, 5\}$-hypomorphe à T, alors T' est $\{4\}$-hypomorphe à T.*

Comme conséquence de la Proposition 3.2, nous obtenons.

Corollaire 3.6. *Étant donné un tournoi décomposable $T = (S, A)$, ayant $n \geqslant 9$ sommets, et qui n'est pas un élément de $\mathcal{E}$, un tournoi T' défini sur S est $\{-3\}$-hypomorphe à T si et seulement si T et T' sont $\{-0, -1, -2, -3\}$-hypomorphes.*

4. Preuve du Théorème 1.1

Soit T un tournoi décomposable non fortement autodual, ayant $n \geqslant 9$ sommets, et qui n'est pas un élément de $\mathcal{E}$. D'après la Proposition 3.2, $\widetilde{P}(T)$ est une partition intervallaire de T vérifiant : pour tout tournoi T' $\{-3\}$-hypomorphe à T, $\widetilde{P}(T)$ est une partition intervallaire de T', $T'/\widetilde{P}(T) = T/\widetilde{P}(T)$ et pour tout élément X de $\widetilde{P}(T)$, $T'[X]$ et $T[X]$ sont $\{-0, -1, -2, -3\}$-hypomorphes. Considérons alors une partition intervallaire $\mathcal{P}$ de T telle que pour tout tournoi T' $\{-3\}$-hypomorphe à T, $\mathcal{P}$ est une partition intervallaire de T', $T'/\mathcal{P} = T/\mathcal{P}$ et pour tout élément X de $\mathcal{P}$, $T'[X]$ et $T[X]$ sont

$\{-0, -1, -2, -3\}$-hypomorphes, qui est de taille maximum parmi toutes telles partitions intervallaires de T. Nous montrons en fait que $\mathcal{P} = \mathcal{M}(T)$. Pour ce faire, en nous basant sur le Théorème 2.2, le Théorème 3.1, la Proposition 3.2 et le Lemme 3.5, nous montrons l'inclusion : $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}(T)$. Pour l'inclusion inverse, considérons un élément I de la classe $\mathcal{M}(T)$. Le tournoi $Inv(\{I\}, T)$ est clairement $\{-3\}$-hypomorphe à T. Il s'ensuit que I est contenu dans un certain $X \in \mathcal{P}$. Comme en plus, $I, X \in \mathcal{M}(T)$, alors $I = X$.

Pour conclure, en utilisant le Lemme 3.5 et le résultat suivant, nous vérifions que pour tout $X \in \mathcal{M}(T)$, le sous-tournoi $T[X]$ est fortement autodual ou indécomposable :

Théorème 4.1. *(Voir [1].) Un tournoi décomposable T ayant $n \geqslant 9$ sommets est $\{-3\}$-autodual si et seulement si T est fortement autodual.*

Remerciements

Nous remercions vivement le rapporteur pour ses remarques et suggestions.

Références

[1] M. Achour, Y. Boudabbous, A. Boussaïri, The $\{-3\}$-reconstruction and the $\{-3\}$-self duality of tournaments, à paraître dans Ars Combinatoria; voir aussi: arXiv:1204.2513v1 [math.CO] 11 Apr 2012.
[2] J.A. Bondy, R.L. Hemminger, Graph reconstruction, a survey, J. Graph Theory 1 (1977) 227–268.
[3] M. Bouaziz, Y. Boudabbous, La demi-isomorphie et les tournois fortement connexes finis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 105–110.
[4] M. Bouaziz, Y. Boudabbous, N. El Amri, Hereditary hemimorphy of $\{-k\}$-hemimorphic tournaments for $k \geqslant 5$, J. Korean Math. Soc. 48 (3) (2001) 599–626.
[5] Y. Boudabbous, Isomorphie héréditaire et $\{-4\}$-hypomorphie pour les tournois, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 841–844.
[6] A. Boussaïri, P. Ille, G. Lopez, S. Thomassé, The C_3-structure of tournaments, Discrete Math. 277 (2004) 29–43.
[7] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialemnt entre chaînes, Symposi. Math. Instituto Nazionale di Alta Mathematica 5 (1970) 203–251.
[8] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[9] G. Lopez, Deux résultats concernant la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 274 (1972) 1525–1528.
[10] G. Lopez, Sur la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 275 (1972) 951–953.
[11] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.
[12] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$, II, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 157–168.
[13] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Z. 150 (1976) 117–134.
[14] M. Pouzet, Relations non reconstructibles par leurs restrictions, J. Combin. Theory Ser. B 26 (1) (1979) 22–34.
[15] K.B. Reid, C. Thomassen, Strongly self-complementary and hereditarily isomorphic tournaments, Monatsh. Math. 81 (1976) 291–304.
[16] P.K. Stockmeyer, The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments, J. Graph Theory 1 (1977) 19–25.
[17] S.M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Intersciences Publishers, New York, 1960.