C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 129–131

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre homologique

Erratum à la Note « f-catégories, tours et motifs de Tate » [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1137–1342], avec un appendice de Q. Liu et de J. Vitória

Corrigendum to the Note "f-categories, towers, and Tate motives" [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1137–1342], with an appendix by Q. Liu and J. Vitória ☆

Jörg Wildeshaus [1]

LAGA, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 2 décembre 2011
Accepté le 17 janvier 2012
Disponible sur Internet le 31 janvier 2012

RÉSUMÉ

Le but de cette Note est de corriger l'hypothèse du Théorème 1.1 (c), (d) de J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1337–1342. Comme le montre un contre-exemple trouvé par Q. Liu et J. Vitória, et dont la construction est exposée dans l'Appendice, l'hypothèse originale n'est effectivement pas suffisante pour obtenir les conclusions de J. Wildeshaus (2009).

ABSTRACT

The aim of this Note is to correct the hypothesis of Theorem 1.1 (c), (d) of J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1337–1342. As shown by a counterexample found by Q. Liu and J. Vitória, whose construction is given in the Appendix, the original hypothesis is indeed insufficient to obtain the conclusions of J. Wildeshaus (2009).

On fixe une paire $(\mathcal{C}, t)$ qui consiste en une catégorie triangulée $\mathcal{C}$, et d'une t-structure sur $\mathcal{C}$ [1, Déf. 1.3.1]. Son coeur sera noté $\mathcal{C}^0$. Dans Wildeshaus [5], nous avons établi le résultat suivant [5, Thm. 1.1 (a), (b)] :

Théorème 1. *Supposons que $\mathcal{C}$ peut s'immerger en tant que sous-catégorie pleine triangulée dans $D(\mathcal{A})$, la catégorie dérivée de complexes (non bornés) sur une catégorie exacte $\mathcal{A}$. On fixe une telle immersion.*

(a) *Il existe un foncteur exact real : $D^b(\mathcal{C}^0) \to \mathcal{C}$ de la catégorie dérivée de complexes bornés sur $\mathcal{C}^0$ vers $\mathcal{C}$, et qui induit l'identité sur $\mathcal{C}^0$, vue comme sous-catégorie pleine de la source et de la cible. Le foncteur real est t-exact. Sa composition avec le foncteur de cohomologie $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$ associé à t coïncide avec le foncteur de cohomologie canonique sur $D^b(\mathcal{C}^0)$.*

DOI of original article: 10.1016/j.crma.2009.10.016.
☆ Supported by DFG – SPP Darstellungstheorie 1388.
Adresse e-mail : wildesh@math.univ-paris13.fr.
[1] Membre du projet no. ANR-07-BLAN-0142 « Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et Géométrie d'Arakelov » de l'Agence nationale de la recherche.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2012.01.011

(b) *Le foncteur real dépend fonctoriellement de la paire $(\mathcal{C}, t)$ satisfaisant l'hypothèse d'immergeabilité dans la catégorie dérivée d'une catégorie exacte. Plus précisément, étant donné une deuxième catégorie triangulée $\mathcal{D}$ munie d'une t-structure, un foncteur t-exact $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant un foncteur exact $\alpha^0 : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}^0$ entre les coeurs, une deuxième catégorie exacte $\mathcal{B}$, munie d'un foncteur exact $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & D(\mathcal{A}) \arrow[d, "D(\beta)"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, hook] & D(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

de catégories triangulées, alors les foncteurs associés real forment un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{C}^0) \arrow[r, "real"] \arrow[d, "D^b(\alpha^0)"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\alpha"] \\ D^b(\mathcal{D}^0) \arrow[r, "real"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Dans la situation du Théorème 1, se pose la question de savoir plus sur le foncteur *real*. Les énoncés suivants corrigent ceux de Wildeshaus [5, Thm. 1.1 (c), (d)] :

Théorème 2. *On fixe les données précédentes.*

(a) *Supposons que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[p]) = 0$*, pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$, et pour tout entier $p \geqslant 2$. La catégorie $\mathcal{C}^0$ est alors de dimension cohomologique au plus égale à un, et le foncteur real est pleinement fidèle.*
(b) *Supposons que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[p]) = 0$*, pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$, et pour tout entier $p \geqslant 2$. Alors le foncteur real est une équivalence si et seulement si $\mathcal{C}^0$ engendre $\mathcal{C}$ (en tant que catégorie triangulée).*

Démonstration. On note d'abord que *real* est pleinement fidèle si et seulement si pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$, et tout entier $p \geqslant 0$, le morphisme $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}^0}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[p])$ ($\mathrm{Ext}^p =$ groupe des p-extensions à la Yoneda) induit par *real* est un isomorphisme. Ceci est évidemment le cas pour $p = 0$. On rappelle que les groupes de Yoneda forment un δ-foncteur universel [2, Prop. 4.1, Prop. 4.3]. Donc, le morphisme ci-dessus coïncide avec la valeur sur M de la p-ème composante de la transformation naturelle de foncteurs $\tau^p : \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}^0}(\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, N[p])$ correspondant à cette propriété universelle. Le critère de [2, Prop. 4.2] montre de manière abstraite (voir par exemple [3, p. 3]) que τ^p est un isomorphisme pour $p = 1$, et injectif pour $p = 2$. Notre hypothèse sur la trivialité de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, N[2])$ implique donc que τ^2 est un isomorphisme. Elle implique également que la source de τ^p est zéro, pour tout $p \geqslant 3$. Par hypothèse, la cible de τ^p, pour tout $p \geqslant 3$, l'est également. □

L'hypothèse originale de Wildeshaus [5, Thm. 1.1 (c), (d)] concernait seulement l'annulation de la cible de τ^2. Comme m'ont fait remarquer Q. Liu et J. Vitória, l'annulation de la cible des τ^p, $p \geqslant 2$, n'en est point une conséquence formelle (*cf.* le contre-exemple construit dans leur Appendice). Remarquons toutefois que l'application à la *catégorie triangulée des motifs de Tate* $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$ sur un corps k algébrique sur $\mathbb{Q}$ [5, Thm. 1.3] reste valable. En effet, grâce au lien, rappelé dans [5], entre morphismes dans $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$ d'une part, et la K-théorie de k, tensorisée par $\mathbb{Q}$ d'autre part, les hypothèses renforcées du Théorème 2 sont satisfaites.

L'auteur tient à remercier Q. Liu et J. Vitória d'avoir soulevé l'erreur dans Wildeshaus [5, Thm. 1.1 (c), (d)], et à présenter ses plus sincères excuses aux lecteurs.

Appendix. Q. Liu, J. Vitória, A note on the realisation functor – a correction of a result in "*f-catégories, tours et motifs de Tate*"

In this appendix we construct an example of a t-structure satisfying the conditions enunciated in Wildeshaus [5, Thm. 1.1 (c), (d)], but whose corresponding realisation functor *real* is not fully faithful, thus providing a counterexample to Wildeshaus [5].

It works as follows. Let A_2 denote the path algebra over a field $\mathbb{K}$ of the quiver

$$1 \longrightarrow 2$$

and let $D^b(A_2)$ denote the bounded derived category of finite dimensional right modules over A_2. Note that any aisle on $D^b(A_2)$ is determined by its indecomposable objects – and we will use this to describe our example. See [4, Prop. 5.2] for a classification of aisles in $D^b(A_2)$. Recall that the indecomposable objects of $D^b(A_2)$ are the triangulated shifts of the indecomposable right A_2-modules, which we will denote by P_1 for the simple projective right module (of paths ending in vertex 1), P_2 the other projective right module (of paths ending in vertex 2) and S_2 the simple non-projective right module (the cokernel of the natural map from P_1 to P_2). Consider the t-structure $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ in $D^b(A_2)$ such that the indecomposable objects in $D^{\leqslant 0}$ are as follows:

$$\operatorname{ind} D^{\leqslant 0} = \{P_1[n], P_2[k], S_2[k]\colon\ n \geqslant -2,\ k \geqslant 0\}.$$

We can easily check that the heart of such t-structure is $\mathcal{C}^0 = \operatorname{add}(P_1[-2], S_2)$, which is semisimple of rank two (hence equivalent to $\operatorname{mod}(\mathbb{K} \times \mathbb{K})$), and thus not derived equivalent to A_2. Note that $\operatorname{Hom}_{D^b(A_2)}(M, N[2]) = 0$ for all M, N in $\mathcal{C}^0$, but $\operatorname{Hom}_{D^b(A_2)}(S_2, P_1[-2][3]) \neq 0$. Therefore this example satisfies the hypothesis of Wildeshaus [5, Thm. 1.1 (c), (d)], however, the realisation functor *real* is not fully faithful because $\operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{C}^0)}(S_2, P_1[-2][3]) = 0$.

Références

[1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, in : B. Teissier, J.L. Verdier (Eds.), Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I), Astérisque 100 (1982).

[2] A. Buchsbaum, Satellites and exact functors, Ann. of Math. 71 (1960) 199–209.

[3] P. Deligne, A.B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. ENS 38 (2005) 1–56.

[4] Q. Liu, J. Vitória, t-structures via recollements for piecewise hereditary algebras, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012) 837–849.

[5] J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1337–1342.