C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 1–4

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire/Théorie des nombres

Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels

Non-zero digits in the expansion of irrational algebraic numbers in an integer base

Boris Adamczewski [a], Colin Faverjon [b]

[a] *CNRS, Université de Lyon, Université Lyon 1, institut Camille-Jordan, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France*
[b] *École normale supérieure de Lyon, 15, parvis René-Descartes, BP 7000, 69342 Lyon cedex 07, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 8 novembre 2011
Accepté après révision le 2 décembre 2011
Disponible sur Internet le 15 décembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous donnons une minoration effective du nombre de chiffres non nuls parmi les N premiers chiffres du développement dans une base entière d'un nombre algébrique irrationnel.

ABSTRACT

We give an effective lower bound for the number of non-zero digits among the first N digits of the expansion of an irrational algebraic number in an integer base.

Une conjecture classique prenant sa source dans les travaux d'Émile Borel [6] stipule que les nombres réels algébriques irrationnels, ainsi que d'autres constantes classiques comme π ou e, devraient être des nombres normaux (voir [1–3,5]). En particulier, si $\mathcal{P}(x, 2, N)$ désigne le nombre d'occurrences du chiffre 1 parmi les N premiers chiffres du développement binaire d'un nombre algébrique irrationnel x, on devrait avoir $\mathcal{P}(x, 2, N) \sim N/2$. À ce jour, minorer la quantité $\mathcal{P}(x, 2, N)$ reste un problème délicat. Les auteurs de [5] ont obtenu un premier résultat dans cette direction.

Théorème BBCP. *Soient x un nombre réel algébrique de degré $d \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$, et $c := ((2+\varepsilon)A_d)^{-1/d}$, où A_d est défini comme ci-après. Pour tout entier N assez grand, on a $\mathcal{P}(x, 2, N) > cN^{1/d}$.*

La preuve proposée dans [5] combine astucieusement des idées provenant de la théorie additive des nombres avec le théorème de Roth. Nous montrons qu'en remplaçant ce dernier par un résultat nettement plus rudimentaire, à savoir l'inégalité de Liouville, on obtient un résultat légèrement plus faible, la constante c étant remplacée par une constante C plus petite. L'intérêt de cette approche est de fournir une preuve totalement élémentaire et un résultat effectif. En effet, une lacune du théorème BBCP est qu'il ne permet pas de déterminer un entier N à partir duquel la minoration obtenue est vraie.

Dans la suite, x désigne un nombre réel algébrique de degré $d \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ un entier et log le logarithme en base b. Notons $(x)_b := x_{-r}x_{-r+1}\cdots x_{0\bullet}x_1x_2\cdots$ le développement de x en base b, de sorte que $x_i \in \{0, \dots, b-1\}$ pour tout i. Nous nous intéressons à la quantité $\mathcal{P}(x, b, N) := \mathrm{Card}\{i,\ 1 \leqslant i \leqslant N \mid x_i \neq 0\}$. Posons $\alpha := x - \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, de sorte que $(\alpha)_b = 1_\bullet x_1x_2\cdots$. Soit $P(X) = A_dX^d + \cdots + A_1X + A_0 \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme minimal de α, $A_d > 0$.

Adresses e-mail : Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr (B. Adamczewski), colin.faverjon@ens-lyon.fr (C. Faverjon).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.12.002

Notons $H := \max\{|A_i| \mid 0 \leqslant i \leqslant d\}$ la hauteur naïve de α. Notre objectif est de donner une preuve élémentaire du résultat suivant.

Théorème 1. *Soient $\varepsilon \in]0, 1/2]$ et $C := (b-1)^{-1}((1-\varepsilon)/(d(A_d+1)))^{1/d}$. Alors, on a $\mathcal{P}(x, b, N) > CN^{1/d}$, pour tout entier N vérifiant*

$$N > \max\left\{d\big(4(b-1)H\big)^{d+1},\ \left(\frac{6d^2}{\varepsilon(b-1)^{d-1}}\log^2\left(\frac{6d^2}{\varepsilon(b-1)^{d-1}}\right)\right)^d\right\}. \tag{1}$$

Remarque 1. Nous nous contentons de donner ici les principales étapes de la démonstration. Le lecteur intéressé est invité à se reporter si nécessaire au texte [4] dans lequel les différents calculs sont détaillés. Notons également que le Théorème 1 permet de donner une mesure de transcendance de certaines séries lacunaires (voir [4]).

Dans toute la suite, ε désigne un nombre réel appartenant à $]0, 1/2]$ et N un entier fixé vérifiant (1). Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{P}(\alpha, b, N) = \mathcal{P}(x, b, N) \leqslant CN^{1/d}$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\alpha_{1,n} := x_n$ et $\alpha_{1,0} := 1$, de sorte que $(\alpha)_b = \alpha_{1,0\bullet}\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\cdots$. Pour k et $n \geqslant 0$, notons $\alpha_{k,n} := \sum_{0\leqslant r\leqslant n}\alpha_{k-1,r}\alpha_{1,n-r}$. Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant d$, et tout entier $R \geqslant 1$, posons $T_k(\alpha, R) := \sum_{m\geqslant 1}\alpha_{k,R+m}/b^m$. Posons également $T(\alpha, R) := \sum_{1\leqslant k\leqslant d} A_k T_k(\alpha, R)$. Une remarque importante est que $T(\alpha, R) \in \mathbb{Z}$ (voir [5, p. 500]). Soit $K := \lfloor 2d\log N\rfloor$. Afin d'obtenir une contradiction, nous allons majorer puis minorer la quantité

$$S(\alpha, N) := \sum_{1\leqslant R\leqslant N-K}\big|T(\alpha, R)\big|. \tag{2}$$

Nous montrons tout d'abord une version effective de la majoration de $S(\alpha, N)$ obtenue dans [5, p. 503].

Proposition 2. *Si $\mathcal{P}(\alpha, b, N) \leqslant CN^{1/d}$, on a $S(\alpha, N) \leqslant C^d(A_d+1)(b-1)^d N$.*

Nous avons besoin du résultat suivant. Il s'agit d'une adaptation directe du Lemme 6.1 de [5] obtenue en reprenant les preuves du Théorème 2.1 et du Lemme 6.1 de [5].

Lemme 3. *Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant d$, on a $\sum_{1\leqslant R\leqslant N-K} T_k(\alpha, R) \leqslant (b-1)^k(\mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + b)$.*

Démonstration de la Proposition 2. D'après (2), le Lemme 3 implique $S(\alpha, N) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant d}|A_k|(b-1)^k(\mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + b)$. Puisque par hypothèse $\mathcal{P}(\alpha, b, N) \leqslant CN^{1/d}$, il vient :

$$S(\alpha, N) \leqslant A_d\big(C^d N + b\big)(b-1)^d + H\sum_{1\leqslant k\leqslant d-1}\big(\big(CN^{1/d}\big)^k + b\big)(b-1)^k$$

et donc

$$S(\alpha, N) \leqslant A_d\big(C^d N + b\big)(b-1)^d + HCN^{1/d}(b-1)\cdot\frac{C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1} - 1}{CN^{1/d}(b-1) - 1} + Hb\sum_{k=1}^{d-1}(b-1)^k. \tag{3}$$

Supposons que $b \geqslant 3$. Puisque (1) assure que $N \geqslant C^{-d}$, on a $CN^{1/d}(b-1) \geqslant 2$ et donc

$$\frac{C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1} - 1}{CN^{1/d}(b-1) - 1} \leqslant \frac{2C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1}}{CN^{1/d}(b-1)}.$$

De même, puisque $b \geqslant 3$, on a $\sum_{1\leqslant k\leqslant d-1}(b-1)^k \leqslant 2(b-1)^{d-1}$ et (3) implique alors

$$S(\alpha, N) \leqslant C^d N(b-1)^d\big(A_d + bA_d/\big(C^d N\big) + 2H/\big(CN^{1/d}\big) + 2Hb/\big(C^d N\big)\big).$$

En outre, un rapide calcul à partir de l'inégalité (1) montre que $2H/(CN^{1/d}) \leqslant 1/2$ et $3bH/(C^d N) \leqslant 1/2$. On en déduit comme voulu que $S(\alpha, N) \leqslant C^d N(A_d+1)(b-1)^d$. Supposons à présent que $b = 2$. On note que l'inégalité (1) implique que $N \geqslant (2/C)^d$. On obtient ainsi

$$S(\alpha, N) \leqslant A_d\big(C^d N + 2\big) + 2HC^{d-1}N^{1-1/d} + 2dH,$$

ou encore

$$S(\alpha, N) \leqslant C^d N\big(A_d + 2H/\big(C^d N\big) + 2H/\big(CN^{1/d}\big) + 2dH/\big(C^d N\big)\big).$$

D'autre part, (1) garantit que $N \geqslant (4H/C)^d$ et un rapide calcul donne alors $S(\alpha, N) \leqslant C^d N(A_d+1)$. $\square$

Nous allons à présent montrer la minoration suivante :

Proposition 4. *Si $\mathcal{P}(\alpha,b,N)\leqslant CN^{1/d}$, on a $S(\alpha,N)>(1-\varepsilon)N/d$.*

Comme par hypothèse $\mathcal{P}(\alpha,b,N)\leqslant CN^{1/d}$, nous pouvons majorer le nombre d'entiers n inférieurs à N pour lesquels $\alpha_{d-1,n}$ n'est pas nul. On obtient (voir [5, p. 501]) :

$$Q:=\operatorname{Card}\{0\leqslant n\leqslant N \mid \alpha_{d-1,n}\neq 0\}\leqslant C^{d-1}N^{1-1/d}. \tag{4}$$

Soient $0=R_1<\cdots<R_Q$ ces entiers, $R_{Q+1}:=N$ et $I_\varepsilon:=\{1\leqslant i\leqslant Q \mid R_{i+1}-R_i\geqslant \varepsilon C^{1-d}N^{1/d}/2\}$.

Lemme 5. *Soit i un entier appartenant à I_ε. Alors, il existe un entier R tel que $T(\alpha,R-1)\neq 0$ dans l'intervalle $[R_i+\frac{R_{i+1}-R_i-K-\log(4^dH(b-1))}{d}, R_{i+1}-K]$.*

La preuve du Lemme 5 repose sur l'inégalité de Liouville (voir [7, Corollary A.2]) : si ξ est algébrique de degré $d\geqslant 2$ et de hauteur H, alors pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, $q\neq 0$, on a $|\xi-p/q|>2^{-d+1}H^{-1}\max(|p|,|q|)^{-d}$.

Démonstration du Lemme 5. Montrons dans un premier temps que

$$R_{i+1}-R_i-K-\log\bigl(4^dH(b-1)\bigr)\geqslant 0. \tag{5}$$

Puisque $i\in I_\varepsilon$, on a $R_{i+1}-R_i\geqslant(\varepsilon/2)C^{1-d}N^{1/d}$. Comme $K\leqslant 2d\log N$, il suffit de montrer que $(\varepsilon/2)C^{1-d}N^{1/d}\geqslant 2d\log N+\log(4^dH(b-1))$, c'est-à-dire que

$$\frac{N^{1/d}}{\log N}\geqslant\frac{2C^{d-1}}{\varepsilon}\left(2d+\frac{\log(4^dH(b-1))}{\log N}\right).$$

L'inégalité (1) donne $N>((6C^{d-1}d^2/\varepsilon)\log^2(6C^{d-1}d^2/\varepsilon))^d$ puisque $C\leqslant 1/(b-1)$. On en déduit que

$$N^{1/d}/\log N>6C^{d-1}d/\varepsilon. \tag{6}$$

D'autre part, (1) implique que $\log(4^dH(b-1))/\log N\leqslant d$, ce qui démontre l'inégalité (5).

Notons $0=p_0<p_1<p_2<\cdots$ les entiers r tels que $\alpha_{1,r}\neq 0$. Il existe un entier $A\leqslant 2b^{p_{k-1}}$ tel que

$$\alpha-\sum_{0\leqslant i\leqslant k-1}\alpha_{1,p_i}b^{-p_i}=\alpha-A/b^{p_{k-1}}\leqslant(b-1)/b^{p_k}.$$

L'inégalité de Liouville implique alors $b^{p_k}<(b-1)4^dHb^{dp_{k-1}}$ et on a donc $p_k<dp_{k-1}+\log(4^dH(b-1))$. D'après (5), il existe un entier p_k appartenant à $[\frac{R_{i+1}-R_i-K-\log(4^dH(b-1))}{d}, R_{i+1}-R_i-K]$. Puisque $\alpha_{1,p_k}>0$ et $\alpha_{d-1,R_i}>0$, on a $\alpha_{d,R_i+p_k}>0$. Notons $R:=R_i+p_k$. En raisonnant comme dans [5, p. 502], il vient

$$T(\alpha,R-1)\geqslant\frac{A_d}{b}-\frac{b}{N^d}\sum_{k=1}^{d-1}|A_k|\frac{(N+k)^k(b-1)^k}{(k-1)!(N+1)}.$$

En utilisant l'inégalité (1), on obtient aisément

$$\frac{b}{N^d}\sum_{k=1}^{d-1}|A_k|\frac{(N+k)^k(b-1)^k}{(k-1)!(N+1)}\leqslant\frac{bH}{N^{d+1}}\frac{[(N+d-1)(b-1)]^d-1}{[(N+d-1)(b-1)]-1}\leqslant 2H(b-1)^{d-1}/N<1/b,$$

ce qui permet de conclure que $T(\alpha,R-1)>0$. □

Démonstration de la Proposition 4. D'après le Lemme 6.2 de [5] on a le résultat suivant : soient r_0 et r_1 deux entiers tels que $r_0\leqslant r_1$, $\alpha_{d-1,r}=0$ pour tout r appartenant à $[r_0,r_1]$, et $T(\alpha,r_1)>0$, alors $T(\alpha,r)>0$, pour tout entier $r\in[r_0,r_1]$. Si $i\in I_\varepsilon$, le Lemme 5 permet d'appliquer ce résultat avec $r_0=R_i$ et $r_1=R-1$. Ainsi, pour tout $r\in[R_i,R-1]$, on a $|T(\alpha,r)|\geqslant 1$ puisque $T(\alpha,r)$ est entier. En utilisant le Lemme 5 et l'inégalité (4), il vient :

$$\begin{aligned}S(\alpha,N)=\sum_{R=1}^{N-K}\bigl|T(\alpha,R)\bigr|&>\sum_{i\in I_\varepsilon}\left\lfloor\frac{R_{i+1}-R_i-K-\log(4^dH(b-1))}{d}\right\rfloor\\&\geqslant\frac{1-\varepsilon/2}{d}N-C^{d-1}N^{1-1/d}\left(2\log N+\frac{\log(4^dH(b-1))+d}{d}\right),\end{aligned}$$

puisque d'après [5, p. 502], on a $\sum_{i \in I_\varepsilon}(R_{i+1} - R_i) \geqslant (1 - \varepsilon/2)N$. On déduit aussi de (1) que $(\log(4^{d-1}H(b-1)) + d)/(d \log N) \leqslant 1$. Ainsi $S(\alpha, N) \geqslant N(\frac{1-\varepsilon/2}{d} - 3C^{d-1}\frac{\log N}{N^{1/d}})$ et (6) permet alors de conclure. □

Démonstration du Théorème 1. Par définition de C, les Propositions 2 et 4 sont incompatibles. □

Références

[1] B. Adamczewski, On the expansion of some exponential periods in an integer base, Math. Ann. 346 (2010) 107–116.
[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases, Ann. of Math. 165 (2007) 547–565.
[3] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, F. Luca, Sur la complexité des nombres algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 11–14.
[4] B. Adamczewski, C. Faverjon, Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels, manuscrit de 17 pages disponible à l'URL : http://math.univ-lyon1.fr/~adamczew/Adamczewski_Faverjon_longue.pdf.
[5] D.H. Bailey, J.M. Borwein, R.E. Crandall, C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, J. Théor. Nombres Bordeaux 16 (2004) 487–518.
[6] É. Borel, Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 230 (1950) 591–593.
[7] Y. Bugeaud, Approximation by Algebraic Numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160, Cambridge University Press, 2004.