C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1273–1276

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Topologie

Dualité et homologie géométrique avec singularités isolées

Duality and geometric homology with isolated singularities

Ghada Salem

Université de Balamand, P.O. Box : 100, Tripoli, Liban

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 20 octobre 2010
Accepté après révision le 10 novembre 2011
Disponible sur Internet le 22 novembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Pour les pseudo-variétés à singularités coniques isolées, on construit un complexe non libre JC_*, quasi-isomorphe au complexe d'intersection IC_* de Goresky–MacPherson mais dont la cohomologie vérifie la dualité de Poincaré entière. On construit une théorie géométrique, dans le sens de Baum–Douglas–Jakob, représentant l'homologie d'intersection de Goresky–MacPherson.

ABSTRACT

For pseudo-manifolds with isolated conical singularities, we construct JC_* a non-free complex, quasi-isomorphic to the intersection complex IC_* of Goresky and MacPherson, but whose cohomology verifies the Poincaré duality. We define a geometrical theory, in the sense of Baum, Douglas and Jakob, representing the intersection homology of Goresky and MacPherson.

1. Introduction

En 1982, dans leur preuve du théorème d'indice d'Atiyah–Singer, Baum et Douglas définissent la K-homologie géométrique [1]. En 1998 Jakob étend cette construction pour toutes les théories d'homologie généralisées h^*, [6].

Rappelons la construction de Jakob. Pour une paire d'espaces (X, A), un cycle géométrique est un triplet (M, x, f) où M est une variété, éventuellement à bord, compacte h^*-orientable, x une classe de cohomologie de M et $f : (M, \partial M) \to (X, A)$ une application continue. Notons $[M, \partial M]$ la classe fondamentale relative, le cycle géométrique (M, x, f) représente la classe $f_*(x \cap [M, \partial M]) \in h_*(X, A)$.

La dualité de Poincaré n'est pas valable pour les variétés singulières. En 1980, Goresky et MacPherson résolvent ce problème pour les variétés stratifiées X en introduisant l'homologie d'intersection, [5]. Dans la suite, nous noterons $IH_*^{\bar{p}}(X)$ l'homologie d'intersection entière de X associée à la perversité $\bar{p}$ (voir [5]). Nous ne précisons pas les coefficients car nous n'utiliserons que des coefficients entiers. Lorsque les singularités de X sont des points isolés la perversité $\bar{p}$ est représentée par un entier $0 \leqslant p \leqslant N-2$ où N est la dimension de X ($p = \bar{p}_N$ dans les notations de [5]).

On suppose que X n'admet qu'une singularité conique isolée de link lisse L. Soit $\tilde{X}$ la variété de bord L obtenue en excisant la singularité, donc $X = \tilde{X}/L$. Nous construisons pour chaque tel entier p un nouveau complexe d'intersection $J_p C_*(\tilde{X}, L)$ quasi-isomorphe au complexe d'intersection $IC_*^{\bar{p}}(X)$ de Goresky–MacPherson mais dont la cohomologie $J_p H^*(\tilde{X}, L)$ est duale par Poincaré–Lefschetz de l'homologie d'intersection $IH_*^{\bar{q}}(X, \mathbb{Z})$ où $p + q = N - 2$ ($\bar{q}$ est la perversité

Adresse e-mail : salem.ghada82@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.11.010

complémentaire de $\bar{p}$, [5]). Cette construction nous permet d'introduire une nouvelle théorie d'intersection géométrique $I'H_*^{\bar{p}}(X)$. Un cycle géométrique d'intersection est un triplet $((M,\partial M),x,f)$ où M est une variété à bord orientable, $x \in J_qH^*(M,\partial M)$ et $f:(M,\partial M)\to(\tilde{X},L)$ une application continue. Le résultat principal de cette note est l'isomorphisme entre l'homologie géométrique d'intersection et l'homologie de Goresky–MacPherson (Théorème 4.3).

Dans le cadre des singularités isolées, la J-cohomologie permet la représentation des cycles d'intersection (Corollaire 4.4), donne la dualité de Poincaré entière (Théorème 2.2) et vérifie l'isomorphisme de Thom (Proposition 4.5).

2. Dualité de Poincaré en intersection

Soit $q = N-2-p$. Rappelons que les coefficients sont les entiers.

L'homologie et la cohomologie d'intersection entières sont données par les formules suivantes (pour l'homologie voir [2], la cohomologie s'en déduit par coefficients universels appliqués à la suite exacte de la paire $(\tilde{X},L)$).

$$IH_j^{\bar{p}}(X)=\begin{cases} H_j(\tilde{X}) & j\leqslant q,\\ Im(H_{q+1}(\tilde{X})\to H_{q+1}(X)) & j=q+1,\\ H_j(X) & j\geqslant q+2;\end{cases}\qquad IH^j_{\bar{p}}(X)=\begin{cases} H^j(\tilde{X}) & j\leqslant q,\\ \varphi^{-1}(Ext(H_q(L),\mathbb{Z})) & j=q+1,\\ \frac{H^{q+2}(X)}{\delta(Ext(H_q(L),\mathbb{Z}))} & j=q+2,\\ H^j(X) & j>q+2\end{cases}$$

où $\varphi:H^j(\tilde{X})\to H^j(L)$ est induit par la restriction et $\delta:H^{j-1}(L)\to H^j(\tilde{X},L)\cong H^j(X)$ est l'opérateur cobord.

Pour toute paire de CW-complexes $A\subset Y$, Y étant de dimension finie N, et tout entier positif q, on définit le complexe suivant :

$$J_pC_j(Y,A)=C_j(Y)\quad \text{si } j\leqslant q-1;\qquad J_pC_q(Y,A)=C_q(Y)/B_q(A);\qquad J_pC_j(Y,A)=C_j(Y,A)\quad \text{si } j\geqslant q+1.$$

Proposition 2.1. *Pour $X=\tilde{X}/L$ pseudo-variété avec une singularité conique isolée $x=\{L/L\}$, le complexe $J_pC_*(\tilde{X},L)$ est quasi-isomorphe au complexe de Goresky–MacPherson*

$$J_pH_*(\tilde{X},L)\cong IH_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L).$$

La cohomologie entière du complexe dual $\mathrm{Hom}(J_pC_*(\tilde{X},L),\mathbb{Z})$ *est notée $J_pH^j(\tilde{X},L)$, elle vérifie : $J_pH^j(\tilde{X},L)=H^j(\tilde{X})$ si $j\leqslant q$, $J_pH^{q+1}(\tilde{X},L)=Im(H^{q+1}(\tilde{X},L)\to H^{q+1}(\tilde{X}))$ et $J_pH^j(\tilde{X},L)=H^j(\tilde{X},L)$ si $j\geqslant q+2$.*

La J-cohomologie satisfait la dualité de Poincaré. Désignons par $[\tilde{X},L]$ le générateur de $H_N(\tilde{X},L)$.

Théorème 2.2. *Pour toute pseudo-variété $X=\tilde{X}/L$ de dimension N à singularité isolée et toute perversité $\bar{p}$ on a l'isomorphisme de Poincaré : $J_qH^{N-j}(\tilde{X},L)\overset{\cap[\tilde{X},L]}{\to} IH_j^{\bar{p}}(X)$.*

Lorsque l'homologie du bord est libre, $IH^*_{\bar{p}}$ et J_pH^* sont isomorphes. En présence de torsion, les deux cohomologies peuvent encore être isomorphes mais seule la J-cohomologie garantit la dualité de Poincaré entière.

Exemple. On considère une variété $\tilde{X}$ de dimension 4, admettant pour bord l'espace lenticulaire $L=L(2,1)=\mathbb{R}P(3)$, [7]. Rappelons que $H_0(L)=H_3(L)=\mathbb{Z}$; $H_1(L)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $H_2(L)=0$ et, d'après [7], $H_0(\tilde{X})=H_2(\tilde{X})=\mathbb{Z}$; $H_1(\tilde{X})=H_3(\tilde{X})=0=H_4(\tilde{X})=0$.

On considère la perversité correspondante à $p=1$. Les calculs de J_1H^* et $IH^*_{\bar{1}}$ montrent que ces cohomologies sont formellement isomorphes. En fait on a

$$J_1H^2(\tilde{X})=Im\big(H^2(\tilde{X},L)\to H^2(\tilde{X})\big)=2\mathbb{Z};\qquad IH^2_{\bar{1}}(\tilde{X}/L)=H^2(\tilde{X})=\mathbb{Z}.$$

Dans le diagramme commutatif suivant l'isomorphisme de dualité de Poincaré–Lefschetz induit la dualité entre la J-cohomologie et l'homologie d'intersection. Par contre l'image de la cohomologie de Goresky–MacPherson ne se relève pas dans l'homologie d'intersection :

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{Z}=J_1H^2(\tilde{X},L)=2H^2(\tilde{X}) & \xrightarrow{\cap[\tilde{X},L]} & IH_2^{\bar{1}}(\tilde{X}/L)=2\mathbb{Z}=2H_2(\tilde{X},L)\\ \cap & & \cap\\ \mathbb{Z}=IH^2_{\bar{1}}(\tilde{X}/L)=H^2(\tilde{X}) & \xrightarrow{\cap[\tilde{X},L]} & H_2(\tilde{X},L)=\mathbb{Z}. \end{array}$$

3. Cycle géométrique d'intersection et bordisme à coins

La J-cohomologie permet de représenter géométriquement l'homologie d'intersection, [1,6]. Pour cela on définit une relation de bordisme à poids entre variétés à coins, [4]. Les coefficients sont les entiers.

Définition 3.1. Soit $X = \tilde{X}/L$ une pseudo-variété de dimension N à singularité isolée, un triplet d'intersection est un triplet de la forme $((M^n, \partial M), x, f)$ où M^n est une variété orientable de dimension n, à bord, $x \in J_q H^{n-j}(M, \partial M)$ et $f : (M, \partial M) \to (\tilde{X}, L)$ une application continue.

Deux triplets d'intersection $((M_0, \partial M_0), x_0, f_0)$ et $((M_1, \partial M_1), x_1, f_1)$ sont dits équivalents s'il existe un difféomorphisme $F : (M_1, \partial M_1) \to (M_0, \partial M_0)$ qui préserve l'orientation et tel que $f_1 = f_0 \circ F$ et $x_1 = F^* x_0$. Les classes d'équivalence sont appelées *cycles géométriques d'intersection*.

Définition 3.2. Soient $(M_0, \partial M_0)$ et $(M_1, \partial M_1)$ deux variétés à bord de dimension n. On dit que le triplet $((M_0, \partial M_0), (W, W'), (M_1, \partial M_1))$ est un bordisme à coins si l'on a un bordisme au sens usuel $(\partial M_0, W', \partial M_1)$, [8] et si W est une variété à bord anguleux de dimension $n+1$ dont le bord « topologique » est la réunion de trois parties M_0, M_1 et W', les coins étant ∂M_0 et ∂M_1.

Deux triplets $((M_k, \partial M_k), x_k, f_k)$, $k = 0, 1$ sont bordants s'il existe un triplet $((W, W'), x, f)$ tel que $((M_0, \partial M_0), (W, W'), (M_1, \partial M_1))$ est un bordisme à coins, $x \in J_{q+1} H^j(W, W')$ induit x_k par les inclusions $(M_k, \partial M_k) \subset (W, W')$ et $f : (W, W') \to (\tilde{X}, L)$ est tel que $f_k = f_{|(M_k, \partial M_k)}$.

En utilisant [3,4] on montre :

Théorème 3.3. *La relation de bordisme à coins est une relation d'équivalence.*

4. Construction de l'homologie d'intersection géométrique entière

Soit E un fibré vectoriel de rang r muni d'une métrique au-dessus de M variété orientable de dimension n à bord. On note 1 le fibré de rang 1 et $V = E \oplus 1$. La section $\sigma : M \to V$ définie par $\sigma(m) = (0_m, 1)$ est partout non nulle. Le fibré en sphères S de V est une variété orientable de dimension $n + r$ de bord $\partial S = S/_{\partial M}$. Puisque M et S sont orientables, il existe Φ_M et Φ_S isomorphismes de Poincaré (Théorème 2.2) :

$$\Phi_M : J_q H^{n-j}(M, \partial M) \xrightarrow{\cap[M,\partial M]} IH_j^{\bar{p}}(M/\partial M, \mathbb{Z}); \qquad \Phi_S : J_q H^{n+r-j}(S, \partial S) \xrightarrow{\cap[S,\partial S]} IH_j^{\bar{p}+r}(S/\partial S, \mathbb{Z}).$$

On définit $\sigma_! = \Phi_S^{-1} \circ \sigma_* \circ \Phi_M : J_q H^{n-j}(M, \partial M) \to J_q H^{n+r-j}(S, \partial S)$ où $\sigma_* : IH_{n-j}^{\bar{p}}(M/\partial M, \mathbb{Z}) \to IH_{n-j}^{\bar{p}+r}(S/\partial S, \mathbb{Z})$ est défini par fonctorialité du complexe J_* sur les paires en utilisant la Proposition 2.1.

Définition 4.1. Soit $X = \tilde{X}/L$ une pseudo-variété à singularité isolée, $((M, \partial M), x, f)$ un triplet d'intersection de X. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel, $S = S(E \oplus 1)$ le fibré en sphères associé, et $\pi : (S, \partial S) \to (M, \partial M)$ la projection. Le cycle $((S, \partial S), \sigma_!(x), f \circ \pi)$ est dit modifié par fibré vectoriel du cycle $((M, \partial M), x, f)$.

On considère le groupe abélien libre engendré par tous les cycles géométriques d'intersection et on quotiente par le sous-groupe constitué de toutes les différences de la forme :

$$\big((M, \partial M), x, f\big) - \big((M_0, \partial M_0), x/_{(M_0,\partial M_0)}, f/_{(M_0,\partial M_0)}\big) - \big((M_1, \partial M_1), x/_{(M_1,\partial M_1)}, f/_{(M_1,\partial M_1)}\big),$$
$$\big((M_2, \partial M_2), u + v, g\big) - \big((M_2, \partial M_2), u, g\big) - \big((M_2, \partial M_2), v, g\big)$$

dans lesquelles $M = M_0 \amalg M_1$ où $\amalg$ désigne la somme disjointe. On note ce quotient par $G(\tilde{X}, L)$.

Soit maintenant $U(\tilde{X}, L) \subset G(\tilde{X}, L)$ le sous-groupe engendré par les éléments bordant l'ensemble vide (Définition 3.2) et les différences entre un cycle et son modifié par fibré vectoriel (Définition 4.1).

Définition 4.2. On appelle homologie géométrique d'intersection le quotient $G(\tilde{X}, L)/U(\tilde{X}, L)$. On le note $I'H_*^{\bar{p}}(X)$. La classe du cycle géométrique d'intersection $((M, \partial M), x, f)$ dans le groupe quotient est notée $[(M, \partial M), x, f]$.

Théorème 4.3. *Le morphisme $\varphi : I'H_*^{\bar{p}}(X) \to IH_*^{\bar{p}}(X)$ défini par $\varphi((M, \partial M), x, f) = f_*(x \cap [M, \partial M])$ est un isomorphisme.*

Corollaire 4.4. *Soit X une pseudo-variété avec une singularité isolée. Tout cycle d'intersection dans $IH_*^{\bar{p}}(X)$ peut être représenté par l'image du cap produit de la classe fondamentale relative d'une variété à bord $(M, \partial M)$ par une classe de J-cohomologie de cette variété.*

Soit $P:F\to\tilde{X}$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de $\tilde{X}$. Le fibré en disques DF est une variété de dimension $N+r$ de bord topologique $\partial(DF)=SF\cup DF|_L$ où SF est le fibré en sphères de F.

Proposition 4.5. *Le produit par la classe de Thom $u_F\in H^r(DF,SF)$ du fibré F est un isomorphisme dont l'inverse est $P_!$ défini comme $\sigma_!$:*

$$J_qH^j(\tilde{X},L)\xrightarrow{P^*(-).u_F}J_qH^{j+r}\big(DF/SF,\partial(DF)/SF\big);\qquad J_qH^{j+r}\big(DF/SF,\partial(DF)/SF\big)\xrightarrow{P_!}J_qH^j(\tilde{X},L).$$

Références

[1] P. Baum, R. Douglas, K-homology and index theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 38 (Part 1) (1982) 117–173.

[2] J.-P. Brasselet, Homologie d'intersection : Définitions singulière et simpliciale, in : Journées singulières, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1984–1985, pp. 1–23.

[3] A. Douady, Théorèmes d'isotopie et de recollement, Séminaire Henri Cartan 14 (2) (1961–1962) 1–16.

[4] A. Douady, Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires, Séminaire Henri Cartan 14 (1) (1961–1962) 1–11.

[5] M. Goresky, R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19 (1980) 135–162.

[6] M. Jakob, A bordism-type description of homology, Manuscripta Math. 96 (1998) 67–80.

[7] P. Orlik, Seifert Manifolds, Lecture Notes in Mathematics, vol. 291, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[8] R. Stong, Notes on Cobordism Theory, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1968.