C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1287–1291

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Sur la régression quantile pour variable explicative fonctionnelle : Cas des données spatiales

On the quantile regression when the regressor is functional: Spatial data case

Sophie Dabo-Niang [a], Zoulikha Kaid [b,a], Ali Laksaci [b]

[a] *Laboratoire EQUIPPE, maison de la recherche, université Lille3, BP 60149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France*
[b] *Laboratoire de Mathématiques, Université Djilali Liabes, BP 89, Sidi Bel Abbes, 22000, Algérie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 9 décembre 2010
Accepté après révision le 27 octobre 2011
Disponible sur Internet le 9 novembre 2011

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous étudions la liaison entre une variable aléatoire réelle Y et une variable fonctionnelle X via l'estimation de quantiles conditionnels. Plus précisément, nous considérons un champ aléatoire $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}, N \geqslant 1)$ de même loi que (X, Y) et nous établissons la convergence en moyenne d'ordre p d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel de $Y_{\mathbf{i}}$ sachant $X_{\mathbf{i}}$.

ABSTRACT

In this Note, we study the spatial relation between a real random variable Y and a functional variable X via conditional quantiles estimation. More precisely, we consider a random filed $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}, N \geqslant 1)$ with same law as (X, Y) and we establish the p-mean consistency of the kernel estimate of the conditional quantile of $Y_{\mathbf{i}}$ given $X_{\mathbf{i}}$.

Abridged English version

Conditional quantile estimation is an important field in statistics which dates back to Stone [12] and has been widely studied in the non-spatial case. We cite, for example, Honda [10], Gannoun et al. [7] among the lot of papers dealing with conditional quantile estimation in finite-dimension, Ferraty and Vieu [6], Ezzahrioui and Ould-Said [5], Dabo-Niang and Laksaci [3] in the functional case.

However, there is an increasing number of situations coming from different fields of applied sciences (soil science, geology, oceanography, econometrics, epidemiology, environmental science, forestry, ...), where the influence of a vector of covariates on some response variable is to be studied in a context of spatial dependence. The literature on spatial models is relatively abundant, see for example, Dabo-Niang and Yao [2] for a list of references.

In our knowledge, only the papers of Hallin et al. [9], Abdi et al. [1], Dabo-Niang and Thiam [4] have paid attention to study nonparametric quantile regression for finite-dimensional random fields while Laksaci and Maref [11] have considered infinite-dimensional fields. These last work deals with almost sure consistency of a kernel conditional quantile estimate.

The purpose of this note is to study the p-mean consistency of the kernel estimate considered by Laksaci and Maref [11]. Recall that a spatial conditional quantile is of wide interest in the modeling of spatial dependence and in the construction of confidence (predictive) intervals.

Adresse e-mail : alilak@yahoo.fr (A. Laksaci).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.10.025

Consider $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N})$ be an $\mathcal{F}\times\mathbb{R}$-valued measurable, strictly stationary spatial process, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, where $(\mathcal{F}, d)$ is a semi-metric space. Let d denote the semi-metric and $N \geqslant 1$. A point $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N$ will be referred to as a site. We assume that the process under study $(Z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}$ is observed over a rectangular domain $I_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{Z}^N,\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ k = 1, \dots, N\}$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$. A point $\mathbf{i}$ will be referred to as a *site*. We will write $\mathbf{n} \to \infty$ if $\min\{n_k\} \to \infty$ for all k such that $1 \leqslant k \leqslant N$. For $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, we set $\hat{\mathbf{n}} = n_1 \times \cdots \times n_N$.

We assume that the $Z_{\mathbf{i}}$'s have the same distribution as (X, Y) and the regular version of the conditional probability of Y given X exists and admits a bounded probability density. For all $x \in \mathcal{F}$, we denote respectively by F^x and f^x the conditional distribution function and density of Y given $X = x$.

Let $\alpha \in]0, 1[$, the αth conditional quantile noted $q_\alpha(x)$ is defined by

$$F^x\big(q_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

To insure existence and unicity of $q_\alpha(x)$, we assume that F^x is strictly increasing. This assumption is estimated by

$$\hat{F}^x_{\mathbf{n}}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}}) K_2(\frac{y-Y_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{n}}})}{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}})} & \text{if } \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}}) \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

where K_1 is a kernel, K_2 is a distribution function, $a_{\mathbf{n}}$ (resp. $b_{\mathbf{n}}$) is a sequence of real numbers which converges to 0 when $\mathbf{n} \to \infty$. The kernel estimate $\hat{q}_\alpha(x)$ of the conditional quantile $q_\alpha(x)$ is defined by

$$\hat{F}^x\big(\hat{q}_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

We are interested in the following theorem on a pointwise consistency in p-mean of the quantile estimator $\hat{q}_\alpha(x)$. This result is established under some assumptions stated in Section 2.

Theorem 1. *Under the hypotheses H_1–H_5 and* (2)–(5)*, we have for all $p \geqslant 1$,*

$$\big\|\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x)\big\|_p = \big(E\big|\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x)\big|^p\big)^{1/p} = O\big((a_{\mathbf{n}})^{b_1} + (b_{\mathbf{n}})^{b_2}\big) + O\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(a_{\mathbf{n}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

1. Introduction

On considère un champ aléatoire stationnaire $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N})$, où N est un entier naturel dans $\mathbb{N}^*$. La régression spatiale consiste à étudier la relation entre deux variables spatiales $X_{\mathbf{i}}$ et $Y_{\mathbf{i}}$. Il s'agit d'un sujet très important en statistique du fait de son utilisation dans de nombreux domaines tels l'épidémiologie, l'économétrie, les sciences de l'environnement et de la terre, la foresterie, l'imagerie, ...

En statistique non paramétrique la modélisation des données spatiales est relativement récente contrairement au cadre paramétrique. En effet, les premiers résultats dans un cadre non paramétrique ont été obtenus par Tran [13] sur l'estimation de la densité, tandis que les références les plus récentes sur le quantile conditionnel sont celles de Abdi et al. [1], Dabo-Niang and Thiam [4].

L'estimation du quantile conditionnel est motivée par son intérêt comme outil de prévision alternatif à la régression. Ce modèle a été largement étudié lorsque la variable explicative est à valeurs dans un espace de dimension finie, citons, par exemple Honda [10], Gannoun et al. [7]. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation du quantile conditionnel avec une variable explicative fonctionnelle, voir par exemple Ferraty et Vieu [6], Ezzahrioui et Ould-Said [5], Dabo-Niang et Laksaci [3].

Dans la plupart des travaux en statistique fonctionnelle suscités, les auteurs considèrent des observations indépendantes ou des données dépendantes issues de séries temporelles. Dans cette Note, on se propose d'étudier l'estimation du quantile conditionnel dans le cas où les observations sont à la fois spatialement dépendantes et la covariable est fonctionnelle. Ce cadre a été considéré très récemment par Laksaci et Maref [11], qui ont étudié la convergence presque complète d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel. Dans ce travail, nous étudions la convergence en moyenne d'ordre p et la normalité asymptotique d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel. Nous présentons l'estimateur de notre modèle spatial dans la Section 2, puis nous posons les hypothèses et nous étudions la convergence de l'estimateur à la Section 3. Les idées d'applications qui peuvent découler de ce type de modèle sont discutées dans la Section 4.

2. Le modèle

Soit le champ aléatoire $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N})$ à valeurs dans $\mathcal{F}\times\mathbb{R}$, où $(\mathcal{F}, d)$ est un espace semi-métrique de dimension éventuellement infinie. Dans ce contexte, $X_{\mathbf{i}}$ peut être une variable aléatoire fonctionnelle. Ces questions de statistique en dimension infinie sont au coeur d'une dynamique autour de la statistique fonctionnelle (voir Ferraty et Vieu [6]). Cette dynamique touche de nombreux statisticiens, qu'ils soient intéressés par la théorie ou les applications.

On suppose que les $Z_{\mathbf{i}}$ sont de même distribution que (X,Y) et qu'une version régulière de la probabilité conditionnelle de Y sachant X existe et admet une densité de probabilité bornée. Pour tout $x \in \mathcal{F}$, on note respectivement par F^x et f^x la fonction de répartition et la densité de Y sachant $X = x$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, le quantile d'ordre α noté $q_\alpha(x)$ et défini

$$F^x\big(q_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

Pour assurer l'unicité de $q_\alpha(x)$, on suppose que F^x est strictement croissante. Cette dernière est estimée par

$$\hat{F}^x_{\mathbf{n}}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}})K_2(\frac{y-Y_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{n}}})}{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}})} & \text{si } \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_1(\frac{d(x,X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}}) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

où K_1 est un noyau, K_2 est fonction de répartition, $a_{\mathbf{n}}$ (resp. $b_{\mathbf{n}}$) est une suite de nombres réels qui converge vers 0 quand $\mathbf{n} \to \infty$. L'estimateur à noyau $\hat{q}_\alpha(x)$ proposé, du quantile conditionnel $q_\alpha(x)$ est

$$\hat{F}^x\big(\hat{q}_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

3. Hypothèses et résultats

Dans la suite, on fixe un point x dans $\mathcal{F}$ tel que

$$P\big(X \in B(x,r)\big) = \phi_x(r) > 0,$$

où $B(x,h) = \{x' \in \mathcal{F} / \ d(x',x) < h\}$. On note par $g^{(j)}$ la dérivée d'ordre j d'une fonction g et on supposera les hypothèses suivantes :

H_1 : F^x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f^x(q_\alpha(x)) > 0$.
H_2 : $\exists \delta_1 > 0$, $\forall (y_1,y_2) \in [q_\alpha(x)-\delta_1, q_\alpha(x)+\delta_1]^2$, $\forall (x_1,x_2) \in N_x \times N_x$,

$$\big|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)\big| \leqslant C\big(d^{b_1}(x_1,x_2) + |y_1-y_2|^{b_2}\big), \quad b_1 > 0,\ b_2 > 0,$$

où N_x est un voisinage assez petit de x.
H_3 : Il existe C_1 et C_2, $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tels que $C_1\mathbb{I}_{[0,1]}(t) < K_1(t) < C_2\mathbb{I}_{[0,1]}(t)$.
H_4 : K_2 est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée et

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{b_2} K_2^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Pour établir la même vitesse de convergence en moyenne d'ordre p que dans le cas non spatial $N = 1$ (voir Dabo-Niang et Laksaci [3]), on considère la condition de dépendance locale suivante :

$$\begin{cases} \text{(i) Pour tous } \mathbf{i} \neq \mathbf{j},\ \text{la densité conditionnelle de } (Y_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{j}}) \text{ sachant } (X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}) \text{ existe et est bornée} \\ \text{(ii) Pour tout } k \geqslant 2,\ \text{on suppose qu'il existe une suite croissante } 0 < (v_k) < k,\ \text{telle que} \\ \qquad \max(\max_{\mathbf{i}_1,\dots\mathbf{i}_k \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} P(d(X_{\mathbf{i}_j},x) \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant k), \phi_x^k(r)) = O(\phi_x^{1+v_k}(r)). \end{cases} \tag{2}$$

La dépendance spatiale du processus sera mesurée à l'aide du coefficient de mélange *α-mixing*. En effet, on suppose que le coefficient de mélange du champ $(Z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}$, est tel que :

il existe une fonction $\varphi(t) \downarrow 0$ quand $t \to \infty$, telle que pour tous sous-ensembles E, E' de $\mathbb{Z}^N$ de cardinals finis,

$$\alpha\big(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E')\big) = \sup_{B\in\mathcal{B}(E),\, C\in\mathcal{B}(E')} \big|P(B\cap C) - P(B)P(C)\big| \leqslant \psi\big(\mathrm{Card}(E), \mathrm{Card}(E')\big)\varphi\big(\mathrm{dist}(E,E')\big), \tag{3}$$

où $\mathcal{B}(E)$ (*resp.* $\mathcal{B}(E')$) est la σ-algèbre engendrée par $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E)$ (*resp.* $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E')$), $\mathrm{Card}(E)$ (*resp.* $\mathrm{Card}(E')$) le cardinal de E (*resp.* E'), $\mathrm{dist}(E,E')$ est la distance euclidienne entre E et E' et $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction symétrique, positive et croissante en chaque variable. On suppose aussi que les fonctions ψ et φ vérifient, respectivement

$$\psi(n,m) \leqslant C\min(n,m), \quad \forall n,m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^\delta \varphi(i) < \infty, \quad \delta > N(p+2),\ p \geqslant 1. \tag{5}$$

Si $N = 1$, on retrouve la condition de mélange fort. Notons qu'il y a plusieurs processus stochastiques, parmi lesquels figurent des séries temporelles très utilisées qui ont des propriétés de mélange faciles à vérifier. Les conditions (4)–(5) ont été utilisées dans Tran [13] et sont vérifiées par beaucoup de champs aléatoires (voir, par exemple, Guyon [8] pour quelques exemples). On suppose de plus

H_5 : $\exists 0 < \tau < (\delta - 5N)/2N$, $\eta_0, \eta_1 > 0$, tel que $\hat{\mathbf{n}}^{\tau} b_{\mathbf{n}} \to \infty$ et

$$C\hat{\mathbf{n}}^{\frac{(5+2\tau)N-\delta}{\delta}+\eta_0} \leqslant \phi_x(a_{\mathbf{n}}),$$

où δ est introduit dans (5). On a alors le résultat suivant de convergence en moyenne d'ordre p.

Théorème 1. *Sous les hypothèses H_1–H_5 et* (2)–(5), *on a pour tout $p \geqslant 1$:*

$$\big\|\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x)\big\|_p = O\big((a_{\mathbf{n}})^{b_1} + (b_{\mathbf{n}})^{b_2}\big) + O\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(a_{\mathbf{n}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

où $\|.\|_p$ est la norme L_p.

Schéma de la preuve. On note par

$$K_{\mathbf{i}} = K_1\left(\frac{d(x, X_{\mathbf{i}})}{a_{\mathbf{n}}}\right), \qquad H_{\mathbf{i}}(y) = K_2\left(\frac{y - Y_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{n}}}\right), \qquad W_{\mathbf{ni}} = W_{\mathbf{ni}}(x) = \frac{K_{\mathbf{i}}}{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_{\mathbf{i}}},$$
$$\hat{F}_N^x(y) = \frac{1}{\hat{\mathbf{n}}EK_{\mathbf{1}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}(y) \quad \text{et} \quad \hat{F}_D^x = \frac{1}{\hat{\mathbf{n}}EK_{\mathbf{1}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K_{\mathbf{i}}.$$

En utilisant le développement du Taylor de la fonction $\hat{F}_N^x(\cdot)$ au point $\hat{q}_\alpha(x)$, on obtient

$$\hat{F}_N^x\big(\hat{q}_\alpha(x)\big) = \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big) + \hat{F}_N^{x^{(1)}}\big(q_\alpha^*(x)\big)\big(\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x)\big)$$

où $q_\alpha^*(x)$ est dans l'intervalle $(q_\alpha(x), \hat{q}_\alpha(x))$. Ainsi, lorsque $\hat{F}_D^x \neq 0$, on a

$$\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x) = \frac{1}{\hat{F}_N^{x^{(1)}}(q_\alpha^*(x))}\big(\hat{F}_N^x\big(\hat{q}_\alpha(x)\big) - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big)\big) = \frac{1}{\hat{F}_N^{x^{(1)}}(q_\alpha^*(x))}\big(\alpha\hat{F}_D^x - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big)\big).$$

Sous les conditions du Théorème 1, Laksaci et Maref [11] ont démontré

$$\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x) \to 0, \quad \text{presque complètement (p.co.)}.$$

La combinaison de ce résultat avec le Lemme 11.17 dans Ferraty et Vieu [6] (p. 181) nous permet de déduire

$$\hat{F}_N^{x^{(1)}}\big(q_\alpha^*(x)\big) - f^x\big(q_\alpha(x)\big) \to 0, \quad \text{p.co.} \tag{6}$$

et comme $f^x(q_\alpha(x)) > 0$ on a

$$\exists C > 0 \quad \text{telle que} \quad \left|\frac{1}{\hat{F}_N^{x^{(1)}}(q_\alpha^*(x))}\right| \leqslant C \quad \text{p.co.}$$

D'où

$$\big\|\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x)\big\|_p \leqslant C\big\|\alpha\hat{F}_D^x - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big)\big\|_p + \big(P\big(\hat{F}_D^x = 0\big)\big)^{1/p}.$$

Le reste de la preuve est une conséquence des trois lemmes suivants :

Lemme 2. *Sous les hypothèses H_2–H_4, on a*

$$E\big[\alpha\hat{F}_D^x - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big)\big] = O\big(a_{\mathbf{n}}^{b_1} + b_{\mathbf{n}}^{b_2}\big).$$

Lemme 3. *Sous les hypothèses du Théorème* 1, *on a*

$$\big\|\alpha\hat{F}_D^x - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big) - E\big[\alpha\hat{F}_D^x - \hat{F}_N^x\big(q_\alpha(x)\big)\big]\big\|_p = o\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(a_{\mathbf{n}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Lemme 4. *Sous les hypothèses du Lemme* 3, *on obtient*

$$\big(P\big(\hat{F}_D^x = 0\big)\big)^{1/p} = o\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(a_{\mathbf{n}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

4. Application à la prévision spatiale

Une des applications de l'estimation des quantiles conditionnels pour des observations fonctionnelles et spatialement dépendantes est la prévision spatiale à partir d'un champ aléatoire continûment observé. En effet, soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^N,\,N>0}$ un champ aléatoire réel stationnaire observable sur un sous ensemble I de $\mathbb{R}^N$ et observé sur $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ (de cardinal $\hat{\mathbf{n}}$), supposons que notre objectif est de prévoir la valeur $Z_{\mathbf{s_0}}$, pour un $\mathbf{s_0}\notin\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$, sachant la trajectoire continue de (Z_t) dans I. Pour cela, on suppose que la quantité $Z_{\mathbf{s_0}}$ dépend seulement des valeurs du processus (Z_t) dans un voisinage borné de $\mathbf{s_0}$ noté $\mathcal{V}_{\mathbf{s_0}}\subset I$ et on construit $\hat{\mathbf{n}}$ variables fonctionnelles spatialement dépendantes de la manière suivante. On considère l'ensemble de $\hat{\mathbf{n}}$ sites d'observation $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}=\{\mathbf{t}_k=(t_{k,1},\dots t_{k,N})\in I,\ 1\leqslant t_{k,j}\leqslant n_j,\ \ j=1,\dots,N,k=1,\dots,\hat{\mathbf{n}}\}$, tel que

$$\forall k=1,\dots,\hat{\mathbf{n}},\qquad \min_{1\leqslant j\leqslant N-1}(t_{k,j+1}-t_{k,j})\geqslant C>0\quad\text{pour un certain } C$$

et on définit

$$\forall \mathbf{t}_k,\, X_{\mathbf{t}_k}=(Z_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t}\in\mathcal{V}_{\mathbf{t}_k}),$$

où $\mathcal{V}_{\mathbf{t}_k}=\mathcal{V}+\mathbf{t}_k$ avec $\mathcal{V}=\mathcal{V}_{\mathbf{s_0}}-\mathbf{s_0}$.

Le problème devient donc, la prévision d'une caractéristique réelle $Y=Z_{\mathbf{s_0}}$ sachant $X_{\mathbf{s_0}}=(Z_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t}\in\mathcal{V}_{\mathbf{s_0}})$. L'estimation de la médiane conditionnelle $\hat{q}_{.5}(X_{\mathbf{s_0}})$ est dans certains cas, une bonne approximation de la quantité $Y=Z_{\mathbf{s_0}}$. De plus, l'estimation des $\hat{q}_{\alpha/2}(X_{\mathbf{s_0}})$ et $\hat{q}_{1-\alpha/2}(X_{\mathbf{s_0}})$ nous permet de déterminer un intervalle de confiance de seuil $1-\alpha$ pour $Y=Z_{\mathbf{s_0}}$. Le calcul pratique de ces estimations est obtenu à l'aide des observations $(X_{\mathbf{t}_k},Y_{\mathbf{t}_k})_{k=1,\dots,\hat{\mathbf{n}}}$ où $Y_{\mathbf{t}_k}=Z_{\mathbf{t}_k}$ et $X_{\mathbf{t}_k}$ est une variable fonctionnelle.

Remerciements

Le rapporteur anonyme est vivement remercié pour ses commentaires détaillés et constructifs.

La démonstration détaillée des résultats de cette Note, peut être obtenue sur demande.

Références

[1] A. Abdi, S. Abdi, S. Dabo-Niang, A. Diop, P-mean consistency of a nonparametric conditional quantile estimator for random fields, Math. Methods Statist. 19 (2010) 1–21.
[2] S. Dabo-Niang, A.-F. Yao, Kernel regression estimation for continuous spatial processes, Math. Methods Statist. 16 (2007) 298–317.
[3] S. Dabo-Niang, A. Laksaci, Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data, Comm. Statist. Theory Methods (2011), in press.
[4] S. Dabo-Niang, B. Thiam, L_1 consistency of a kernel estimate of spatial conditional quantile, Statist. Probab. Lett. 80 (2010) 1447–1458.
[5] M. Ezzahrioui, E. Ould-Said, Asymptotic results of the kernel estimator of the conditional quantile in the normed space under α-mixing hypothesis, Comm. Statist. Theory Methods 37 (2008) 2735–2759.
[6] F. Ferraty, Ph. Vieu, Nonparametric Functional Data Analysis, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2006.
[7] A. Gannoun, J. Saracco, J.K. Yu, Nonparametric prediction by conditional median and quantiles, J. Statist. Plann. Inference 117 (2003) 207–223.
[8] X. Guyon, Estimation d'un champ par pseudo-vraisemblance conditionnelle : Etude asymptotique et application au cas Markovien, in : Proceedings of the Sixth Franco-Belgian Meeting of Statisticians, 1987.
[9] M. Hallin, Z. Lu, K. Yu, Local linear spatial quantile regression, Bernouilli 15 (2009) 659–686.
[10] T. Honda, Nonparametric estimation of a conditional quantile for α-mixing processes, Ann. Inst. Statist. Math. 52 (2000) 459–470.
[11] A. Laksaci, F. Maref, Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1075–1080.
[12] C.J. Stone, Consistent nonparametric regression. Discussion, Ann. Statist. 5 (1977) 595–645.
[13] L.T. Tran, Kernel density estimation on random fields, J. Multivariate Anal. 34 (1990) 37–53.