C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 991–994

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Estimation par la distance de Hellinger des processus gaussiens stationnaires fortement dépendants

Hellinger distance estimation of stationary Gaussian strongly dependent processes

Aubin N'dri [a], Ouagnina Hili [a,b]

[a] *Laboratoire de mathématiques appliquées, université de Cocody Abidjan, B.P.V 34, Côte d'Ivoire*
[b] *Laboratoire de mathématiques et des nouvelles technologies de l'information, Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, B.P. 1093, Yamoussoukro, Côte d'Ivoire*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 12 février 2009
Accepté après révision le 25 juillet 2011
Disponible sur Internet le 1er septembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Dans cette Note, nous déterminons l'estimateur par le minimum de distance de Hellinger des paramètres d'un processus gaussien stationnaire et fortement dépendant. Sous certaines conditions, nous établissons les propriétés asymptotiques de l'estimateur.

A B S T R A C T

In this Note, we determine the minimum Hellinger distance estimator of the parameters of a stationary Gaussian and strongly dependent process. Under some assumptions, we establish the asymptotic properties of the estimator.

Abridged English version

The present Note deals with the estimation of the parameter vector θ_0 based on a finite number of observations $X_1, \dots, X_n$ and studies its asymptotic behavior under some hypotheses. We construct an estimator $\hat{\theta}_n$ of the parameter θ_0. The values of this estimator belong to a compact set $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ and minimize the Hellinger distance between $f(\cdot, \theta_0)$ and f_n, where f_n is a suitable nonparametric estimator of the density of the X_i's. We suppose that the process $\{X_n\}_{1 \leqslant n}$ is a centered stationary and strongly dependent Gaussian process with density $f(\cdot, \theta_0)$.

Main results

Theorem 1 *(Almost sure convergence). Let assumptions* (A1), (A2), (A6), *and* (B1)–(B5) *be fulfilled. If* θ_0 *is in the interior of* Θ, *then* $\hat{\theta}_n$ *converges almost surely to* θ_0 *when* $n \to +\infty$.

For the following theorem, $S(\cdot, \theta) = f^{1/2}(\cdot, \theta)$,

$$\dot{S}(\cdot, \theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} f^{1/2}(\cdot, \theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_q} f^{1/2}(\cdot, \theta) \right)^T,$$

Adresses e-mail : aukan1@yahoo.fr (A. N'dri), o_hili@yahoo.fr (O. Hili).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.07.026

$\dot{S}(\cdot,\theta)^T$ is the transpose of $\dot{S}(\cdot,\theta)$ and

$$\rho(x,\theta)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{S}(x,\theta)\dot{S}(x,\theta)^T\,\mathrm{d}x\right]^{-1}\dot{S}(x,\theta).$$

Consider I_d the identity function, $I\{.\}$ the indicator function, $F(.)$ the continuous marginal distribution function of the sequence $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ and $F_n(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i\leqslant x\},\ x\in\mathbb{R}$, the sample distribution function. The integer m is the Hermite rank of the family

$$\big\{I\big\{I_d(.)\leqslant x\big\}-F(x)\colon x\in\mathbb{R}\big\}\quad\text{where } F(x)=Prob(X_i\leqslant x).$$

Let $F_n(x)-F(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n} B_x(X_i)$, where $B_x(.)=I\{I_d(.)\leqslant x\}-F(x)$. In

$$L^2(\phi)=\left\{g\colon\int_{-\infty}^{+\infty}g^2(z)\phi(z)\,\mathrm{d}z<+\infty\right\},\quad\text{where }\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),$$

let us consider the Fourier–Hermite expansion

$$B_x(.)=\sum_{k=m}^{+\infty}J_k(x)\frac{H_k(.)}{k!},\quad\text{where } H_k(z)=(-1)^k\exp\big(z^2/2\big)\frac{d^k}{\mathrm{d}z^k}\big(\exp\big(-z^2/2\big)\big),\ z\in\mathbb{R}$$

is the k-th Hermite polynomial and $J_k(x)=E(H_k(.)B_x(.)),\ k=0,1,\dots$. Denote by

$$d_{m,n}^2=Var\left(\sum_{i=1}^{n}H_m(X_i)\right)\quad\text{and}\quad J_m'(x)=\frac{\mathrm{d}J_m(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Theorem 2 *(Asymptotic distribution). Let assumptions* (A1)–(A6) *and* (B1)–(B5) *be fulfilled. If θ_0 lies in the interior of Θ and $\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{S}(x,\theta_0)\dot{S}(x,\theta_0)^T\,\mathrm{d}x$ is a non-singular $(q\times q)$-matrix, then the limiting distribution of $nd_{m,n}^{-1}(\hat{\theta}_n-\theta_0)$ is $(Z_m(1)/m!)\times\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,\theta_0)J_m'(x)\,\mathrm{d}x$ where $\{Z_m(t)\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ is the Hermite process and $\Psi(x,\theta_0)=\rho(x,\theta_0)/2f^{1/2}(x,\theta_0)$.*

1. Introduction

Nous considérons un processus gaussien stationnaire $\{X_n\}_{1\leqslant n}$ centré et fortement dépendant de densité $f(\cdot,\theta_0)$, tel que $\gamma(t):=\mathbb{E}(X_1X_{1+t})=t^{-\alpha(\theta)}\mathcal{L}(t)$, $t=1,2,\dots$ où pour chaque $\theta\in\Theta$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^q$, il existe une fonction α telle que $0<\alpha(\theta)<1$ et $\mathcal{L}(.)$ est une fonction à variation lente à l'infini éventuellement positive. De plus $\gamma(0)=\sigma(\theta)$ où σ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Le but principal de cette note est d'estimer θ par la méthode du minimum de distance de Hellinger (MDH) et d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur MDH sous certaines conditions. L'estimateur du maximum de vraisemblance (voir Huber [5]) est connu pour ses propriétés d'efficacité asymptotique sous des conditions régulières, cependant il a de très mauvaises propriétés de robustesse. Par ailleurs, les alternatives classiques robustes de la famille des M-estimations ne sont pas asymptotiquement efficaces (cf. Hampel et al. [3]). Les estimateurs qui combinent la propriété d'efficacité asymptotique avec celle d'une forte stabilité peuvent avoir une grande valeur dans la pratique. Pendant longtemps, l'on a pensé qu'un estimateur robuste ne pouvait pas être efficace et vice-versa. Il a été montré que certains estimateurs du minimum de distance sont non seulement efficaces mais surtout fortement robustes. Dans cette classe de minimum de distance, nous pouvons citer le minimum de distance de Hellinger (MHD). Comme exemples d'étude de l'estimateur (MHD), on peut citer Beran [1] dans le cas indépendant. Dans le cas des modèles bilinéaires, on a Hili [4]. Pour les modèles linéaires univariés fortement dépendants, on peut citer Bitty et Hili [2].

Dans la Section 2, nous définissons quelques notations et hypothèses utiles. La Section 3, qui constitue l'essentiel de cette note, établit la convergence presque sûre et la loi asymptotique de l'estimateur.

2. Notations et hypothèses

Soit $\mathcal{F}=\{f(\cdot,\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ une famille de fonctions telle que pour chaque $\theta\in\Theta$ fixé, $f(x,\theta):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction positive et intégrable. Supposons que $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèses A.

(A1) Pour chaque $\theta\in\Theta$, la fonction $x\mapsto f(x,\theta)$ est continûment dérivable.

(A2) Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\theta\mapsto f^{\frac{1}{2}}(x,\theta)$ est continûment dérivable.

(A3) Pour chaque $x \in \mathbb{R}, \theta \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{\frac{1}{2}}(x,\theta), 1 \leqslant j \leqslant q$ est continue et pour tout j, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{\frac{1}{2}}(x,\theta)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^q)$.

(A4) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} f^{\frac{1}{2}}(x,\theta), 1 \leqslant j,k \leqslant q$ est continue, et pour tous j,k, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} f^{\frac{1}{2}}(x,\theta)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^q)$.

(A5) Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\inf_{\theta \in \Theta} \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x,\theta) \geqslant \lambda.$$

(A6) Pour $\theta, \theta' \in \Theta, \theta \neq \theta'$ implique que $\{x \in \mathbb{R}, f(x,\theta) \neq f(x,\theta')\}$ a une mesure de Lebesgue positive.

Soit $\mathcal{G} = L^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On définit pour $\theta \in \Theta$, la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} &H_2 : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R} \\ &\big(f(\cdot,\theta), g\big) \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f^{\frac{1}{2}}(x,\theta) - g^{\frac{1}{2}}(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où H_2 est la distance de Hellinger sur $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. On définit aussi la fonctionnellle T comme suit :

$$\begin{aligned} &T : \mathcal{G} \to \Theta \\ &\quad g \mapsto T(g) = \arg\min_{\theta \in \Theta} H_2\big(f(\cdot,\theta), g\big). \end{aligned}$$

Soit les observations $X_1, \ldots, X_n$ de densité $f(\cdot,\theta_0)$, où $\theta_0 \in \Theta$. Nous construisons un estimateur du vrai paramètre du modèle θ_0. Nous choisissons pour cela une valeur de θ qui minimise la fonction $H_2(f(\cdot,\theta), f_n(.))$ où f_n est un estimateur non paramétrique de $f(\cdot,\theta_0)$ défini par : $f_n(x) = (nb_n)^{-1} \sum_{i=1}^n K(\frac{x-X_i}{b_n})$, $x \in \mathbb{R}$. Nous supposons que le noyau K est symétrique, positif et tel que $\int_{\mathbb{R}} K^2(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$. La fenêtre b_n satisfait $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} nb_n = +\infty$. Nous notons par ν le rang de Hermite de $K(\frac{x-X_i}{b_n}) - EK(\frac{x-X_i}{b_n})$.

Hypothèses B.

(B1) Le noyau K est une fonction symétrique et positive tel que $K(\zeta x)$ est une fonction décroissante en $\zeta > 0$ pour x fixé dans $\mathbb{R}$.

(B2) Il existe un entier naturel $\upsilon > \max(\frac{\tau}{\alpha(\tau\nu - m)}, \frac{m}{\nu - m/\tau})$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{(n+1)^\upsilon}}{b_{n^\upsilon}} = 1$ où $b_n := n^{-m\alpha(\theta)/2\tau}$ et τ un réel strictement positif.

(B3) L'entier m est tel que $1 \leqslant m < \frac{1}{\alpha(\theta)}$ et le nombre réel τ satisfait $\tau > \max(2m, \frac{m\alpha(\theta)}{1 - m\alpha(\theta)})$.

(B4) Pour $l > \tau$, $f(\cdot,\theta)$ admet des dérivées d'ordre $l-1$ absolûment continues et la dérivée d'ordre l, $f^{(l)}(\cdot,\theta)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

(B5) Pour $l > \tau$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |s|^l K(s)\,\mathrm{d}s < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} s^j K(s)\,\mathrm{d}s = 0$ pour $j = 1, \ldots, l-1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} s^l K(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.

3. Distribution asymptotique de l'estimateur

Dans cette section, nous étudions la convergence presque sûre et la convergence en loi de l'estimateur $\hat{\theta}_n = T(f_n)$ du vrai paramètre θ_0.

Les notations utilisées dans le Théorème 3.2 sont identiques à celles utilisées dans le Théorème 2 de la version anglaise abrégée.

Lemme 3.1. *Supposons que $f(\cdot,\theta_0)$ vérifie les hypothèses* (A1) *et* (B1) *à* (B5)*, alors l'estimateur f_n converge presque sûrement vers $f(\cdot,\theta_0)$ dans la métrique de Hellinger.*

Théorème 3.1 *(convergence presque sûre). Supposons que la famille $\mathcal{F}$ vérifie les conditions* (A1), (A2), (A6) *et* (B1) *à* (B5)*. Si θ_0 est dans l'intérieur de Θ, alors $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ_0 quand $n \to +\infty$.*

Théorème 3.2 *(distribution asymptotique). Supposons que les hypothèses* (A1) *à* (A6) *et* (B1) *à* (B5) *sont satisfaites. Si θ_0 est dans l'intérieur de Θ et si $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(x,\theta_0)\dot{S}(x,\theta_0)^T(x)\,\mathrm{d}x$ est une matrice carrée d'ordre q inversible, alors la loi limite de $nd_{m,n}^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ est $(Z_m(1)/m!) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,\theta_0) J_m'(x)\,\mathrm{d}x$ où $\{Z_m(t)\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ est le processus de Hermite.*

N.B. Les preuves du Lemme 3.1, du Théorème 3.1 et du Théorème 3.2 peuvent être consultées dans la version longue de notre article.

Remerciements

Nous sommes très reconnaissants aux rapporteurs dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer la qualité de la Note.

Références

[1] R. Beran, Minimum Hellinger distance estimates for parametric models, Ann. Statist. 5 (3) (1977) 445–463.
[2] A.L. Bitty, O. Hili, Hellinger distance estimation of long memory linear processes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 348 (2010) 445–448.
[3] F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel, Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions, Wiley, New York, 1986.
[4] O. Hili, Hellinger distance estimation of general bilinear time series models, Statist. Methodol. 5 (2008) 119–128.
[5] P.J. Huber, Robust regression: Asymptotics, conjectures and Monte Carlo, Ann. Statist. 5 (5) (1973) 799–821.