



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Systèmes dynamiques/Probabilités

Théorème limite central presque sûr pour les marches aléatoires avec trou spectral

Quenched central limit theorem for random walks with a spectral gap

Jean-Pierre Conze, Stéphane Le Borgne

IRMAR, UMR 6625, université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 13 mai 2011

Accepté après révision le 21 juin 2011

Disponible sur Internet le 12 juillet 2011

Présenté par Jean-Pierre Kahane

R É S U M É

Soit G un semi-groupe de transformations d'un espace probabilisé (X, \mathcal{B}, m) préservant la mesure m et soit μ une mesure de probabilité sur G . Nous montrons un théorème limite central de type « quenched » pour les fonctions dans $L_0^p(X, m)$, $p > 2$, sous la condition de trou spectral pour l'action diagonale de G sur $(X \times X, m \otimes m)$.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let G be a semi-group of measure preserving transformations of a probability space (X, \mathcal{B}, m) and let μ be a probability measure on G . We prove a quenched central limit theorem for functions in $L_0^p(m)$, $p > 2$, when the spectral gap condition holds for the diagonal action of G on $(X \times X, m \otimes m)$.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let (X, \mathcal{B}, m) be a metric space endowed with its Borel σ -algebra \mathcal{B} and a probability m and let G be a locally compact group or semi-group of Borel maps of X into itself which preserve m . Let μ be a probability measure on G .

Let $(\Omega, \mathbb{P}) = (G^{\mathbb{N}^*}, \mu^{\mathbb{N}^*})$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$. We denote by $g_k(\omega) := \omega_k$, $k \geq 1$, the coordinate maps. These data define a random walk on X with Markov operator P_μ defined by $P_\mu \varphi(x) = \int_G \varphi(gx) d\mu(g)$.

The operator corresponding to the diagonal action on $(X \times X, m \times m)$ is defined on $L^2(m \otimes m)$ by $\tilde{P}_\mu \varphi(x, y) := \int_G \varphi(gx, gy) d\mu(g)$. The measure m is a stationary probability for the associate Markov chain. For $p \geq 1$, P_μ is a contraction of $L^p(X, m)$ preserving the subspace $L_0^p(X, m)$ of functions φ in $L^p(X, m)$ such that $m(\varphi) = 0$. Let $P_{0,\mu}$ (resp. $\tilde{P}_{0,\mu}$) be the restriction of P_μ to $L_0^2(X, m)$ (resp. to $L_0^2(X \times X, m \otimes m)$).

We say that P_μ (resp. \tilde{P}_μ) satisfies the spectral gap property if $\|P_{0,\mu}\| < 1$ (resp. $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$). There are several situations where the spectral gap property holds for P_μ and \tilde{P}_μ (cf. [2,3,5,6]). For example we have $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$ for some groups of automorphisms of tori or nilmanifolds. We are interested in the behavior for a fixed ω of the ergodic sums defined by $S_n^\omega \varphi(x) = S_n \varphi(\omega, x) := \sum_{k=1}^n \varphi(g_k(\omega) \cdots g_1(\omega)x)$.

It is known (cf. [5]) that, if P_μ has a spectral gap, then for every $\varphi \in L_0^2(m)$ the variance $\sigma^2(\varphi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega \times X} (S_n \varphi)^2 dm d\mathbb{P} = \int \varphi^2 dm + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \varphi(x) P_\mu^k \varphi(x) dm(x)$ exists, with $\sigma > 0$ if $\varphi(x)$ is not 0 for m -a.e. x . Moreover a central limit theorem

Adresses e-mail : jean-pierre.conze@univ-rennes1.fr (J.-P. Conze), stephane.leborgne@univ-rennes1.fr (S. Le Borgne).

holds with respect to the probability $\mathbb{P} \otimes m$ for the sums $S_n \varphi$. The main result of this note is the following quenched central limit theorem:

Theorem 0.1. *If $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, then, for every real function φ in $L^p_0(X, m)$, with $p > 2$, for a.e. $\omega \in \Omega$,*

$$\lim \frac{1}{n} \int_X |S_n^\omega \varphi(x)|^2 dm = \sigma^2(\varphi) \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(x: \frac{1}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} S_n^\omega \varphi(x) < a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

1. Préliminaires

Soit (X, \mathcal{B}, m) un espace métrique muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} et d'une probabilité m . Soient G un groupe ou un semi-groupe localement compact de transformations boréliennes de X préservant m et μ une mesure de probabilité sur G . Notons g_x l'action de $g \in G$ sur un point $x \in X$. L'application $(g, x) \rightarrow gx$ est supposée mesurable. Ces données définissent une marche aléatoire sur X , d'opérateur de transition

$$P_\mu \varphi(x) = \int_G \varphi(gx) d\mu(g).$$

Notons \mathbb{E} l'intégrale en ω par rapport à $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ et $L^p_0(X, m)$, $1 \leq p \leq \infty$, le sous-espace de $L^p(X, m)$ des fonctions d'intégrale nulle. L'opérateur P_μ définit une contraction de $L^p(X, m)$ préservant $L^p_0(X, m)$. L'opérateur \tilde{P}_μ correspondant à l'action diagonale sur $(X \times X, m \times m)$ est $\tilde{P}_\mu \varphi(x, y) := \int_G \varphi(gx, gy) d\mu(g)$. Soient $P_{0,\mu}$ la restriction de P_μ à $L^2_0(X, m)$ et $\tilde{P}_{0,\mu}$ la restriction de \tilde{P}_μ à $L^2_0(X \times X, m \otimes m)$.

Nous dirons que P_μ (resp. \tilde{P}_μ) a un trou spectral si $\|P_{0,\mu}\| < 1$ (resp. $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$). Il y a plusieurs situations de nature algébrique pour lesquelles P_μ et \tilde{P}_μ vérifient la propriété de trou spectral, voir [2,3,5,6]. C'est le cas, par exemple, pour certains groupes d'automorphismes de tores ou de nilvariétés.

Le système dynamique correspondant à la marche aléatoire est défini sur l'espace $(G^{\mathbb{N}^*} \times X, \mu^{\otimes \mathbb{N}^*} \otimes m)$ par $\theta_\tau : (\omega, x) \mapsto (\theta\omega, \tau(\omega)x)$, avec $\theta(\omega_k)_{k \geq 1} = (\omega_{k+1})_{k \geq 1}$ et $\tau(\omega)x = g_1(\omega)x$. En itérant nous obtenons :

$$\theta_\tau^n(\omega, x) = (\theta^n \omega, g_1^n(\omega)x), \quad \text{avec } g_1^n(\omega)x := g_n(\omega) \cdots g_1(\omega)x.$$

Soit φ une fonction sur X . En la considérant comme fonction sur $\Omega \times X$, nous pouvons la composer par θ_τ^k . Nous nous intéressons à la distribution en x à ω fixé des sommes ergodiques définies par

$$S_n^\omega \varphi(x) = S_n \varphi(\omega, x) := \sum_{k=1}^n (\varphi \circ \theta_\tau^k)(\omega, x) = \sum_{k=1}^n \varphi(g_k(\omega) \cdots g_1(\omega)x).$$

Il est connu (cf. [8]) que, si l'opérateur P_μ a un trou spectral, alors pour toute fonction $\varphi \in L^2_0(m)$ la variance asymptotique $\sigma^2(\varphi) := \lim \frac{1}{n} \int_{\Omega \times X} (S_n \varphi)^2 dm d\mathbb{P}$ existe et vaut

$$\sigma^2(\varphi) = \int_X \varphi^2(x) dm(x) + 2 \sum_{k=1}^\infty \int_X \varphi(x) P_\mu^k \varphi(x) dm(x).$$

D'autre part, par une méthode inspirée de [7] (voir aussi [5]), on peut montrer, pour toute fonction φ réelle dans $L^\infty(X, m)$, la majoration :

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes m} \left(\exp \left(it \frac{S_n \varphi}{\sqrt{n}} \right) \right) - \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2(\varphi) t^2 \right) \right| \leq C \max_{j=3}^5 \frac{\ln^{j-1}(n) \|\varphi\|_\infty^j}{n^{j/2-1}}, \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$

Lemme 1.1. *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toutes fonctions réelles φ, ψ dans $L^2_0(X, m)$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une fonction K intégrable, telle que, pour presque tout ω , $\|S_n^\omega \varphi\|_2^2 \leq K(\omega) n^{1+\alpha} \|\varphi\|_2^2$ et*

$$\left| \|S_n^\omega \psi\|_2^2 - \|S_n^\omega \varphi\|_2^2 \right| \leq K(\omega) n^{1+\alpha} \|\psi - \varphi\|_2 (\|\psi\|_2 + \|\varphi\|_2).$$

Démonstration. Montrons la première inégalité qui implique la seconde. Nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_X \varphi(g_1^{k+\ell}(\omega)x) \varphi(g_1^\ell(\omega)x) \, dm(x) \right| &\leq \left(\mathbb{E} \left| \int_X \varphi(g_1^{k+\ell}(\omega)x) \varphi(g_1^\ell(\omega)x) \, dm(x) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{X \times X} \tilde{P}_{0,\mu}^k(\varphi \otimes \varphi)(x, y) (\varphi \otimes \varphi)(x, y) \, dm(x) \, dm(y) \right)^{1/2} \leq \|\tilde{P}_{0,\mu}\|^{k/2} \|\varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

Soit λ tel que $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < \lambda^2 < 1$. D'après ce qui précède, il existe une fonction K intégrable telle que

$$\left| \sum_{r=n^\alpha+1}^{n-1} \int_X \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi \circ \theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega, x)) \, dm(x) \right| \leq K(\omega) \|\varphi\|_2^2 n \sum_{r=n^\alpha+1}^{n-1} \lambda^r.$$

Le résultat s'obtient à l'aide de ce qui précède, à partir du développement et de la majoration :

$$\begin{aligned} \|S_n^\omega \varphi\|_2^2 &= n \int_X \varphi^2(x) \, dm(x) + 2 \sum_{r=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-r} \int_X \varphi(\theta_\tau^r(\omega, x)) \varphi(\theta_\tau^{r+\ell}(\omega, x)) \, dm(x), \\ \left| \sum_{r=1}^{n^\alpha} \int_X \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi \circ \theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega, x)) \, dm(x) \right| &\leq n^{1+\alpha} \|\varphi\|_2^2. \quad \square \end{aligned}$$

Montrons maintenant que, pour presque tout ω , la variance asymptotique à ω fixé est égale à la variance asymptotique $\sigma^2(\varphi)$. Dans la suite κ est une constante > 0 . Etant donnée φ dans $L_0^p(X, m)$ avec $p > 2$, nous utilisons une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $L_0^\infty(X, m)$ telle que, pour une constante $C > 0$,

$$\|\varphi - \varphi_n\|_2^2 \leq C \frac{\|\varphi\|_p^p}{n^{\kappa(p-2)}}, \quad \|\varphi_n\|_2 \leq \|\varphi\|_2, \quad \|\varphi_n\|_\infty \leq n^\kappa. \tag{2}$$

Théorème 1.2. Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toute fonction φ dans $L_0^p(X, m)$, avec $p > 2$, pour presque tout ω , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X |S_n^\omega \varphi|^2 \, dm = \sigma^2$.

Démonstration. Soit a une constante dans $]0, \kappa \frac{p-2}{2}[$. D'après le lemme 1.1, il existe K intégrable telle que

$$\left| \|S_n^\omega \varphi\|_2^2 - \|S_n^\omega \varphi_n\|_2^2 \right| \leq 2K(\omega) n^{1+a} \|\varphi - \varphi_n\|_2 \|\varphi\|_2 \leq 2K(\omega) n^{1+a} \left(C \frac{\|\varphi\|_p^p}{n^{\kappa(p-2)}} \right)^{1/2} \|\varphi\|_2,$$

de sorte qu'il suffit de montrer la convergence pour $S_n^\omega \varphi_n$ au lieu de $S_n^\omega \varphi$. Grâce à la propriété de trou spectral le calcul peut être réduit à une somme de la forme $\sum_{r=1}^{n^a}$.

Soit $\psi_{j,n}$ la fonction définie sur Ω par $\psi_{j,n} = \int_X \varphi_n \varphi_n \circ \theta_\tau^j \, dx - \int_{\Omega \times X} \varphi_n \varphi_n \circ \theta_\tau^j \, dx \, d\mathbb{P}(\omega)$. Elle dépend seulement des j premières coordonnées de ω , donc $\int_\Omega \psi_{j,n} \psi_{j,n} \circ \theta_\tau^\ell \, d\mathbb{P}(\omega) = 0$, pour $\ell > j$. A l'aide de cette remarque et d'un calcul de moment, on montre que pour presque tout ω

$$\lim_n \left(\sum_{r=1}^{n^a} \int_X \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1-r} (\varphi_n \varphi_n \circ \theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega, x)) \, dx - \sum_{r=1}^{n^a} \int_{\Omega \times X} (\varphi_n \varphi_n \circ \theta_\tau^r)(\omega, x) \, dx \, d\mathbb{P}(\omega) \right) = 0. \quad \square$$

La propriété de trou spectral permet de majorer les moments de $S_n \varphi_n$ et d'obtenir :

Proposition 1.3. Pour tout entier $r \geq 1$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\varphi \in L_0^\infty(X, m)$, $\mathbb{P} \otimes m(|S_n \varphi| > L) \leq CL^{-2r} n^{r(1+\alpha)} \|\varphi\|_\infty^{2r}, \forall n \geq 1$.

2. Le TCL à ω fixé

Théorème 2.1. Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, pour toute fonction réelle φ dans $L_0^p(X, m)$, avec $p > 2$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \left(x : \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_n^\omega \varphi(\omega, x) < a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp(-t^2/2) \, dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La méthode utilisée est analogue à celle de [1]. (Voir aussi [4] pour une autre méthode appliquée à des composées d'une suite stationnaire d'automorphismes du tore.) Grâce au lemme 1.1, il suffit d'établir la convergence pour $S_n^\omega \varphi_n$ au lieu de $S_n^\omega \varphi$, (φ_n) étant la suite définie plus haut. Soit σ_n^2 la variance associée à φ_n pour l'action de θ_τ . Rappelons que $\lim_n \sigma_n = \sigma(\varphi)$. Posons

$$Z_k(t, \omega) = \left| \int_X \exp\left(\frac{it S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}\right) dm(x) - \exp\left(-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\right) \right|.$$

Nous allons montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et presque tout ω , $\lim_k Z_k(t, \omega) = 0, \forall t \in [-p, p]$. Nous avons :

$$Z_k^2(t, \omega) = \left| \int_X e^{\frac{it S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} dm(x) \right|^2 - e^{-\sigma_k^2 t^2} + 2e^{-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} \Re \left(e^{-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} - \int_X e^{\frac{it S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} dm(x) \right).$$

Comme dans [1] ou [5], écrivons

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_X \exp\left(\frac{it S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}\right) dm(x) \right|^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_{X \times X} \exp\left(i \frac{t}{\sqrt{k}} \sum_{\ell=0}^{k-1} (\varphi_k(g_1^\ell(\omega)x) - \varphi_k(g_1^\ell(\omega)y))\right) dm(x) dm(y) \right).$$

Sous l'hypothèse $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, la majoration (1) s'applique à $\tilde{P}_{0,\mu}$ et à la fonction $(x, y) \mapsto \varphi_k(x) - \varphi_k(y)$ pour la marche diagonale $\theta_\tau \otimes \theta_\tau$, la variance asymptotique étant égale à $2\sigma_k^2$; d'où :

$$\mathbb{E}(Z_k^2(t, \omega)) \leq C \ln^2(k) k^{-1/2+3\kappa}. \tag{3}$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ des paramètres réels positifs qui seront précisés plus loin et L un entier. Comme dans [1] nous découpons l'ensemble des entiers naturels et l'intervalle $[-p, p]$. Posons $I_n := \{n^L, \dots, (n+1)^L - 1\}$ et, en notant $[\]$ la partie entière, définissons $s_n := [((n+1)^L - n^L)^{(1-\beta)}] + 1, r_n := [((n+1)^L - n^L)^\beta] + 1$. Pour $n \geq 2L$, l'inégalité $(n+1)^L - n^L \leq n^L$ est vérifiée, ce qui assure $r_n \leq 2n^{\beta L}$ et $s_n \leq 2n^{(1-\beta)L}$, pour n grand. Pour $\ell = 0, \dots, s_n - 1$, soit $I_{n,\ell} := \{n^L + \ell r_n + k/k = 0, \dots, r_n - 1\}$. Nous avons : $I_n \subset \bigcup_{\ell=0}^{s_n-1} I_{n,\ell}$.

Nous pouvons modifier la suite (φ_k) introduite plus haut de telle façon que $\varphi_k = \varphi_{k_{n,\ell}}$ pour $k \in I_{n,\ell}$, les propriétés (2) restant satisfaites. Posons également $J_{j,n} := [\frac{j-1}{n^\gamma L}, \frac{j}{n^\gamma L}]$, $t_{n,j} := \frac{j-1}{n^\gamma L}, k_{n,\ell} := n^L + \ell r_n$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Ces découpages fournissent la majoration

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{k \geq N^L} \sup_{t \in [-p, p]} Z_k(t, \omega) \geq \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{n=N}^\infty \sum_{\ell=0}^{s_n-1} \sum_{|j| \leq pn^{\gamma L} + 1} \left(\mathbb{P} \left(\sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} |Z_k(t, \omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P} \left(|Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

D'après (3), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{P}(|Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \varepsilon/2) \leq C \varepsilon^{-2} \ln^2(k_{n,\ell}) k_{n,\ell}^{3\kappa-1/2} \leq C' \varepsilon^{-2} n^{(4\kappa-1/2)L}. \tag{5}$$

Pour $k \in I_{n,\ell}$ et $t \in J_{j,n}$, nous avons $0 \leq k - k_{n,\ell} \leq r_n \leq 2n^{L\beta}$ et $|t - t_{n,j}| \leq n^{-\gamma L}$. Partons de l'inégalité

$$|Z_k(t, \omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \leq \int_X \left| e^{it \frac{S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}} \right| dm(x) + \left| e^{-\sigma_k^2 \frac{t^2}{2}} - e^{-\sigma_{k_{n,\ell}}^2 \frac{t_{n,j}^2}{2}} \right|.$$

Soit $N_0(\varepsilon)$ tel que $|e^{-\sigma_k^2 \frac{t^2}{2}} - e^{-\sigma_{k_{n,\ell}}^2 \frac{t_{n,j}^2}{2}}| < \varepsilon/4$, pour $n \geq N_0(\varepsilon)$ et $t \in J_{j,n}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} |Z_k(t, \omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\omega : \int_X \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| e^{it \frac{S_k^\omega \varphi_k(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}} \right| dm(x) \geq \frac{\varepsilon}{4} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Tenant compte du fait que $\varphi_k = \varphi_{k_{n,\ell}}$ pour $k \in I_{n,\ell}$ et de la majoration, vérifiée si $\beta + \gamma < 1$,

$$\sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{t_{n,j}}{\sqrt{k_{n,\ell}}} \right| \leq pn^{(\beta-3/2)L} + n^{-(\gamma+1/2)L} \leq Cn^{-(\gamma+1/2)L},$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 & \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| e^{it \frac{S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}} \right| \\
 & \leq \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| t \frac{S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x)}{\sqrt{k}} - t_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}} \right| \\
 & \leq \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \frac{|t|}{\sqrt{k}} \left| S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right| + \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{t_{n,j}}{\sqrt{k_{n,\ell}}} \right| \left| S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right| \\
 & \leq pn^{-L/2} \sup_{k \in I_{n,\ell}} \left| S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right| + Cn^{-(\gamma+1/2)L} \left| S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right|. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Si ψ est une fonction définie sur $\Omega \times X$ telle que $0 \leq \psi \leq 2$ et si η est un nombre réel > 0 , alors la minoration $m(\psi) > \eta$ implique $m(\psi > \eta/2) > \eta/4$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(m(\psi) > \eta) \leq \mathbb{P} \left\{ \omega : m \left\{ x : \psi(\omega, x) > \frac{\eta}{2} \right\} > \frac{\eta}{4} \right\} \leq 4\eta^{-1} \mathbb{P} \otimes m \left\{ (\omega, x) : \psi(\omega, x) > \frac{\eta}{2} \right\}.$$

Compte-tenu de (6), cette inégalité implique :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left(\sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} |Z_k(t, \omega) - Z_{k_{n,\ell}}(t_{n,j}, \omega)| \geq \varepsilon/2 \right) \\
 & \leq 8\varepsilon^{-1} \mathbb{P} \otimes m \left\{ (\omega, x) : \sup_{k \in I_{n,\ell}} \sup_{t \in J_{j,n}} \left| e^{it \frac{S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x)}{\sqrt{k}}} - e^{it_{n,j} \frac{S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x)}{\sqrt{k_{n,\ell}}}} \right| \geq \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leq 8\varepsilon^{-1}(A + B),
 \end{aligned}$$

A et B étant définis (cf. (7)) par

$$\begin{aligned}
 A &= \mathbb{P} \otimes m \left\{ (\omega, x) : \sup_{k \in I_{n,\ell}} pn^{-L/2} \left| S_k^\omega \varphi_{k,\ell}(x) - S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{16} \right\}, \\
 B &= \mathbb{P} \otimes m \left\{ (\omega, x) : Cn^{-(\gamma+1/2)L} \left| S_{k_{n,\ell}}^\omega \varphi_{k_{n,\ell}}(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{16} \right\}.
 \end{aligned}$$

Comme $S_k \varphi_{k,\ell} - S_{k_{n,\ell}} \varphi_{k_{n,\ell}} = S_{k-k_{n,\ell}} \varphi_{k_{n,\ell}} \circ \theta_\tau^{k_{n,\ell}}$, la proposition 1.3 appliquée avec $r = 4$ implique

$$\begin{aligned}
 A &\leq C(\varepsilon n^{L/2})^{-8} r_n^{4(1+\alpha)} k_{n,\ell}^{8\kappa} n^{\beta L} \leq C' \varepsilon^{-8} n^{-4L} n^{4(1+\alpha)\beta L} n^{8\kappa L} n^{\beta L}, \\
 B &\leq C'(\varepsilon n^{-(\gamma+1/2)L})^{-8} n^{4(1+\alpha)L} n^{8\kappa L} \leq C' \varepsilon^{-8} n^{-4(2\gamma+1)L} n^{4(1+\alpha)L} n^{8\kappa L}.
 \end{aligned}$$

En rassemblant dans (4) la majoration (5) et les majorations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left(\sup_{k \geq N^L} \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) \geq \varepsilon \right) \\
 & \leq C\varepsilon^{-9} \sum_{n=N}^{\infty} n^{(1-\beta)L} n^{\gamma L} (n^{-(1/2-4\kappa)L} + n^{-4L} n^{4(1+\alpha)\beta L} n^{8\kappa L} n^{\beta L} + n^{-4(2\gamma+1)L} n^{4(1+\alpha)L}).
 \end{aligned}$$

Soient $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,7$, $\gamma = 0,07$, $\kappa = 0,001$ et $L = 20$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $N_1(\varepsilon, \eta)$ tel que le majorant, reste de la série de terme général $C\varepsilon^{-9}(n^{-2.52} + n^{-1.88} + n^{-2.84})$, soit inférieur à η pour $N \geq N_1(\varepsilon, \eta)$. On a donc $\mathbb{P}(\sup_{k \geq N^L} \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) \geq \varepsilon) \leq \eta$, pour $N \geq \max(N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon, \eta))$; d'où $\mathbb{P}(\limsup_k \sup_{t \in [-p,p]} Z_k(t, \omega) > 0) = 0$. \square

Références

- [1] A. Ayyer, C. Liverani, M. Stenlund, Quenched CLT for random toral automorphism, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 24 (2) (2009) 331–348.
- [2] B. Bekka, Y. Guivarc'h, Spectral properties of a group of affine transformations on a nilmanifold, preprint, 2011.
- [3] J. Bourgain, A. Gamburd, Spectral gaps in $SU(d)$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 348 (11–12) (2010) 609–611.
- [4] J.-P. Conze, S. Le Borgne, M. Roger, Central limit theorem for products of toral automorphisms, preprint, 2010.
- [5] A. Furman, Ye. Shalom, Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 19 (4) (1999) 1037–1061.
- [6] Y. Guivarc'h, Limit theorems for random walks and products of random matrices, in: *Probability Measures on Groups: Recent Directions and Trends*, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006, pp. 255–330.
- [7] C. Jan, Vitesse de convergence dans le TCL pour des chaînes de Markov et certains processus associés à des systèmes dynamiques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 331 (5) (2000) 395–398.
- [8] M. Rosenblatt, Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 184, Springer-Verlag, New York, 1971.