



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse numérique

Linéarisation et maillage des surfaces paramétrées

Parametric surface linearization and meshing

Patrick Laug^a, Houman Borouchaki^b, Erwan Renaut^a

^a INRIA Paris-Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

^b Université de technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 27 janvier 2010

Accepté après révision le 25 mars 2011

Disponible sur Internet le 13 avril 2011

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

Nous proposons une méthodologie pour simplifier la paramétrisation des surfaces composées de carreaux paramétrés issues généralement des environnements CAO (conception assistée par ordinateur). Cette nouvelle paramétrisation est définie via la construction d'une triangulation adaptative appelée *support* pour chaque carreau. L'adaptation est gouvernée par le contrôle de l'écart entre la paramétrisation initiale et celle issue de la triangulation support. Ce support est utilisé pour générer les maillages de ces surfaces selon une approche indirecte, dans laquelle le maillage est généré via les domaines des paramètres. Le support permet de déconnecter le mailleur du système CAO, et en ce sens constitue un outil universel pour le maillage de telles surfaces. Un exemple d'application est donné pour montrer la pertinence de notre approche.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We propose a methodology to simplify the parameterization of a surface composed of parametric patches, typically encountered in CAD (computer aided design) environments. This new parameterization is defined via the construction of an adaptive triangulation, called *support*, of each patch. The adaptation is governed by the control of the gap between the initial parameterization of the patch and that of the support. This support is used to generate the mesh of the CAD surface using an indirect approach, in which the mesh is generated via the parametric domains. The support makes it possible to disconnect the mesher from the CAD system, and in this sense it constitutes a universal tool for meshing such surfaces. An application example is given to show the pertinency of our methodology.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Generating meshes of surfaces composed of parametric patches, usually produced by CAD (computer aided design) environments, can be done directly in the tridimensional space or indirectly via the parametric spaces. Following the latter approach, the difficulty is to take into account the “geometric deformation” due to the surface parameterization. Thanks to anisotropic mesh generation methods in two dimensions, the latter indirect technique can generally be successfully applied without much difficulty. For evaluating this deformation metric, it is necessary to know, in addition to the parameterization of the patch, the first derivatives of this parameterization. The evaluations of these derivatives are often costly while gen-

Adresses e-mail : patrick.laug@inria.fr (P. Laug), houman.borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki), erwan.renaut@inria.fr (E. Renaut).

erating meshes of these surfaces. Besides, in the presence of degenerate patches, these derivatives are not well defined. To remedy this, a simple solution consists in approximating each surface patch by a geometric *support* having a simpler and more regular parameterization, in particular a triangulation faithfully representing the surface geometry. When using the support to generate a mesh of each patch, an additional step is necessary consisting in projecting the mesh vertices (belonging to the support) onto the patch. An important advantage of the support, provided that an internal parameterization has been defined, is to disconnect the CAD environment during the process of mesh generation.

To define this support triangulation, a first approach consists in firstly constructing a coarse triangulation of the patch, then iteratively enriching this triangulation in order to bound the gap between the patch and the support. The idea of this “geometric support” was formulated in terms of maximum edge length firstly by Filipis et al. in the case of right-angled triangles [4]. This idea has been extended to any triangles by Sheng and Hirsch [8] with a variant proposed by Piegl [7]. To better control this maximum edge length, Vigo and Brunet proposed an adaptive formulation which defines in an isotropic manner the edge size at any point [9]. As for Anglada et al., they defined an anisotropic criterion to make the approximation more faithful to the geometry [1]. In all these approaches, the support triangulation faithfully represents the geometry but the parameterization inferred from this triangulation can be very far from the initial parameterization defining the patch, and consequently the convergence of the step for projecting vertices onto the patch is not guaranteed. In this paper, we propose a novel approach for constructing a geometric support triangulation which also provides a sufficient approximation to the parameterization. An initial surface triangulation is first constructed and then adaptively refined in order to bound the linear surface approximation gap. The resulting triangulation support is used to generate the mesh of the surface following an indirect approach.

1. Introduction

La génération de maillages de surfaces composées de carreaux paramétrés issues de la CAO (conception assistée par ordinateur) peut s’effectuer de manière directe dans l’espace tridimensionnel, ou de manière indirecte via les espaces des paramètres. Suivant cette dernière approche, la difficulté est la prise en compte de la «déformation géométrique» due à la paramétrisation de la surface. Grâce à des méthodes de génération de maillages anisotropes en deux dimensions, cette dernière technique indirecte s’applique en général avec succès sans trop de difficulté. Pour évaluer cette métrique de déformation, il est nécessaire de connaître, en plus de la paramétrisation du carreau, les dérivées premières de celle-ci. L’évaluation de ces dérivées est une opération souvent coûteuse dans la génération de maillages de ces surfaces. En outre, en présence de carreaux dégénérés, ces dérivées sont mal définies. Pour y remédier, une solution simple consiste à approcher chaque carreau surfacique par un support géométrique ayant une paramétrisation plus simple et régulière, et en particulier une triangulation représentant fidèlement la géométrie de la surface. En utilisant ce support pour la génération d’un maillage de chaque carreau, une étape supplémentaire est nécessaire consistant à projeter les sommets du maillage (appartenant au support) sur le carreau. Le support permet entre autres, moyennant une paramétrisation interne, de déconnecter l’environnement CAO lors de la génération de maillages.

Pour définir cette triangulation support, une première approche consiste à construire dans un premier temps une triangulation grossière du carreau, puis à enrichir de manière itérative cette triangulation afin de limiter l’écart entre le carreau et le support. L’idée de ce «support géométrique» a été formulée en termes de longueurs d’arêtes admissibles en premier lieu par Filipis et al. uniquement dans le cadre de triangles rectangles [4]. Celle-ci a ensuite été généralisée aux triangles quelconques par Sheng et Hirsch [8] avec une variante proposée par Piegl [7]. Pour mieux contrôler cette taille d’arête admissible, Vigo et Brunet ont proposé une formulation adaptative qui définit de façon isotrope cette taille d’arête en tout point [9]. Anglada et al. rendent ce critère anisotrope afin que l’approximation soit plus fidèle à la géométrie [1]. Dans toutes ces approches, la triangulation support représente fidèlement la géométrie mais la paramétrisation déduite de cette triangulation est très éloignée de la paramétrisation initiale définissant le carreau, et par conséquent la convergence de l’étape de projection des sommets sur le carreau n’est pas garantie.

Dans ce papier, nous proposons une nouvelle approche pour construire une triangulation support géométrique permettant d’obtenir aussi une approximation suffisante de la paramétrisation. Pour cela, nous introduisons la notion d’écart d’approximation linéaire de surface en Section 2. La Section 3 traite de la construction du support basée sur l’emploi de cet écart. Dans la Section 4, on présente brièvement la méthodologie de génération indirecte de maillages surfaciques utilisant le support. Enfin, un exemple d’application est proposé en Section 5.

2. Écart d’approximation linéaire surfacique

Soit σ la paramétrisation d’un carreau Σ de \mathbb{R}^3 , définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . Soit $t = [a, b, c]$ un triangle de Ω , et soit $T = [\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)]$ le triangle dont les sommets sont les images par σ des sommets a, b et c de t . Notons $\sigma(t)$ le triangle gauche image de t sur Σ , et $\bar{\sigma}$ l’application linéaire qui envoie t sur T (ainsi $T = \bar{\sigma}(t)$). On se propose de quantifier l’écart entre $\bar{\sigma}(t)$ et $\sigma(t)$. L’écart géométrique δ_g entre $\bar{\sigma}(t)$ et $\sigma(t)$, qui représente la plus grande des distances entre les points de $\bar{\sigma}(t)$ et $\sigma(t)$, est donné par :

$$\delta_g(\bar{\sigma}(t), \sigma(t)) = \max_{P \in \sigma(t)} d(P, \bar{\sigma}(t)).$$

Cet écart permet de quantifier, et donc de contrôler, l'approximation géométrique de la surface localement en $\sigma(t)$ par l'élément triangulaire $T = \bar{\sigma}(t)$ dans \mathbb{R}^3 dont les sommets appartiennent à la surface, et ceci quelle que soit la paramétrisation σ . Cependant, si p est un point de t , la distance entre $\bar{\sigma}(p)$ et $\sigma(p)$ ne peut être limitée malgré le contrôle sur $\delta_g(\bar{\sigma}(t), \sigma(t))$. Cette distance, qui représente l'écart d'approximation linéaire surfacique δ_l entre $\bar{\sigma}(t)$ et $\sigma(t)$, est exprimée par :

$$\delta_l(\bar{\sigma}(t), \sigma(t)) = \max_{p \in t} d(\bar{\sigma}(p), \sigma(p)).$$

Le point $p \in t$ peut s'écrire comme $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$ (où α, β et γ sont les coordonnées barycentriques de p dans t) et le point $\bar{\sigma}(p)$ de T est défini par $\bar{\sigma}(p) = \alpha\sigma(a) + \beta\sigma(b) + \gamma\sigma(c)$, et par suite l'écart d'approximation linéaire surfacique s'écrit comme :

$$\delta_l(\bar{\sigma}(t), \sigma(t)) = \max_{p \in t} d(\alpha\sigma(a) + \beta\sigma(b) + \gamma\sigma(c), \sigma(\alpha a + \beta b + \gamma c)).$$

Le contrôle de l'écart d'approximation linéaire permet d'approcher la paramétrisation σ par une application linéaire par morceaux, ce qui ne pouvait être réalisé en contrôlant seulement l'écart d'approximation géométrique. Par ailleurs, comme l'écart d'approximation linéaire est par définition supérieur ou égal à l'écart d'approximation géométrique, le contrôle du premier implique le contrôle du second.

3. Schéma de construction du support

Pour un carreau Σ , la construction de son support comprend trois étapes : discrétisation géométrique de $\partial\Omega$ avec contrôle de gradation, maillage régulier de Ω s'appuyant sur cette discrétisation, et raffinement adaptatif du maillage obtenu afin de limiter l'écart d'approximation linéaire.

Discrétisation géométrique. La discrétisation géométrique de la frontière $\partial\Omega$ du domaine de paramètres Ω consiste à construire, pour chaque segment courbe de $\partial\Omega$, une ligne polygonale telle que chaque segment droit $s = [ab]$ de cette ligne polygonale est proche de $\partial\Omega$ et que son segment droit correspondant $[\sigma(a)\sigma(b)]$ est proche de $\partial\Sigma$. Pour cela, dans un premier temps, on considère pour chaque segment courbe de $\partial\Omega$ l'arête joignant ses deux extrémités (appelée l'arête associée). Puis, on subdivise de manière récursive les segments courbes dont la distance à l'arête associée est supérieure à un seuil spécifié ε_ω . À l'issue de cette opération, on obtient une nouvelle partition en segments courbes de $\partial\Omega$. Cette nouvelle partition de $\partial\Omega$ correspond à une nouvelle partition de $\partial\Sigma$. Ensuite, on subdivise de manière récursive les nouveaux segments courbes de $\partial\Sigma$ dont la distance à l'arête associée est supérieure à un autre seuil spécifié ε_γ . Enfin, chaque nouveau segment courbe de la partition correspondante de $\partial\Omega$ est itérativement subdivisé en deux si la variation entre les tailles d'arêtes à ses extrémités est importante (ce qui permet de contrôler la gradation de taille dans le domaine Ω).

Maillage régulier. Cette étape consiste à générer un maillage régulier de Ω s'appuyant sur la discrétisation géométrique de $\partial\Omega$ construite à l'étape précédente. Le caractère régulier de ce maillage assure une convergence rapide de la prochaine étape de raffinement. Pour cela, on applique une méthodologie de génération de maillage basée sur une approche combinée frontale-Delaunay, ce qui permet d'obtenir un maillage de Ω le plus régulier possible s'appuyant sur une discrétisation donnée de sa frontière [2].

Raffinement adaptatif. Dans cette dernière étape, le maillage régulier généré à l'étape précédente est raffiné afin de limiter l'écart d'approximation linéaire surfacique. Il s'agit en fait d'une généralisation aux surfaces de la linéarisation et discrétisation des courbes [6]. Si K est un triangle du maillage de Ω , le raffinement de K consiste à subdiviser K en quatre triangles homothétiques en utilisant les milieux des arêtes de K . Les triangles du maillage de Ω sont raffinés de manière itérative tant qu'ils présentent un écart d'approximation linéaire supérieur à un seuil donné ε_σ . En outre, une procédure d'équilibrage de raffinement est appliquée, permettant de limiter à 2 le niveau de raffinement d'un triangle par rapport à ses triangles adjacents. À l'issue de cette opération, il résulte un maillage non conforme de Ω . Pour établir la conformité, il suffit alors de remplacer les éléments non conformes (un triangle dont au moins l'un des côtés partage deux autres triangles) par des éléments de transition en subdivisant ces éléments en 2, 3 ou 4 éléments. En effet, grâce au procédé d'équilibrage de raffinement, les seuls éléments non conformes sont ceux dont l'un des côtés partage deux autres triangles. L'application du maillage conforme résultant sur la surface constitue le support de Σ .

4. Méthodologie de génération indirecte de maillages surfaciques

La paramétrisation σ est approchée par une fonction linéaire par morceaux $\tilde{\sigma}$ s'appuyant sur le support. Ainsi, si $p = (u, v)$ est un point de Ω , alors il existe un triangle $t = [a, b, c]$ du support contenant p , et p peut s'écrire comme $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$, où α, β et γ sont les coordonnées barycentriques de p dans t . L'approximation linéaire de σ restreinte à t s'exprime comme : $\sigma|_t \approx \tilde{\sigma}|_t = \alpha\sigma(a) + \beta\sigma(b) + \gamma\sigma(c)$.

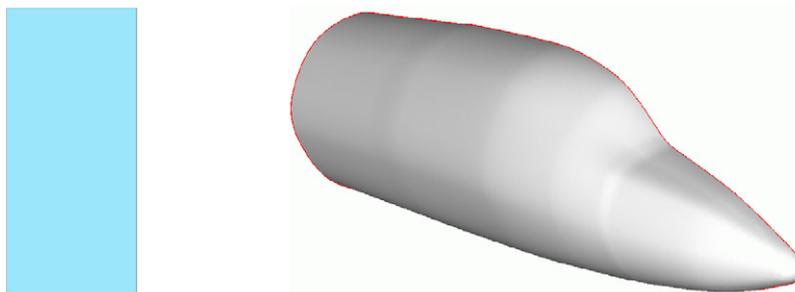


Fig. 1. Domaine des paramètres Ω (ici un simple rectangle) et carreau Σ correspondant, représentant l'avant du fuselage d'un avion d'affaires de type Falcon (Dassault Aviation).

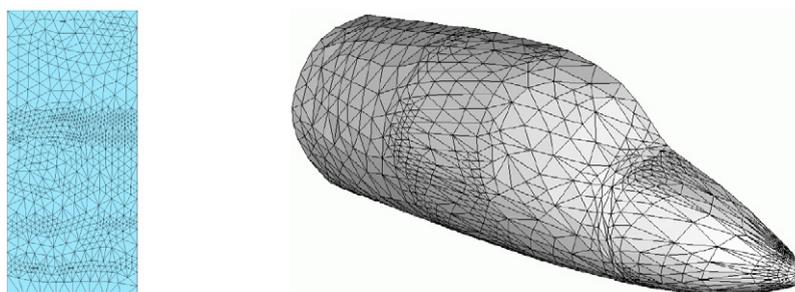


Fig. 2. Triangulation support du carreau Σ .

La méthodologie de maillage indirecte de Σ consiste à construire le maillage dans le domaine de paramètre Ω et à appliquer ce maillage sur Σ . Étant donnée une fonction de taille h définie sur Σ , on montre dans [3] que le maillage de Σ vérifiant cette fonction de taille est l'image du maillage de Ω vérifiant la métrique $\mathcal{M} = \frac{1}{h^2} \tilde{\mathcal{M}}$, où la métrique de déformation $\tilde{\mathcal{M}}$ est définie par :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \sigma_u^T \sigma_u & \sigma_u^T \sigma_v \\ \sigma_u^T \sigma_v & \sigma_v^T \sigma_v \end{pmatrix},$$

où σ_u et σ_v désignent les dérivées partielles de σ par rapport à u et v . Si $a = (u_a, v_a)$, $b = (u_b, v_b)$ et $c = (u_c, v_c)$, alors on a :

$$(\tilde{\sigma}|_t)_u = \frac{(v_b - v_c)\sigma(a) + (v_c - v_a)\sigma(b) + (v_a - v_b)\sigma(c)}{\|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|},$$

$$(\tilde{\sigma}|_t)_v = \frac{(u_c - u_b)\sigma(a) + (u_a - u_c)\sigma(b) + (u_b - u_a)\sigma(c)}{\|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|}.$$

En approchant σ par $\tilde{\sigma}$, la métrique de déformation associée au support est constante par morceaux et la métrique \mathcal{M} ne dépend que de la taille h . Ainsi, l'utilisation du support permet de déconnecter la paramétrisation de la génération du maillage et en conséquence d'accélérer le processus du maillage.

5. Résultats numériques

On considère (voir Fig. 1) un carreau représentant l'avant du fuselage d'un avion d'affaires de type Falcon (Dassault Aviation). La Fig. 2 montre le support linéaire surfacique obtenu pour les seuils de construction (cf. Section 3) : $\varepsilon_\omega = 0,001$ (en normalisant le rectangle englobant le domaine des paramètres en un carré unité) et $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\sigma = 0,001\Delta$, où Δ est la diagonale de la boîte englobant la surface.

En appliquant la méthode indirecte décrite dans la section précédente (maillage via les espaces des paramètres), un maillage uniforme (correspondant à une fonction constante de taille) du carreau est généré. Pour déterminer les métriques de déformation dans l'espace des paramètres, les dérivées premières sont calculées à partir de son support associé. Ce même support est utilisé pour projeter les sommets des maillages sur la surface réelle. La Fig. 3 montre ce maillage uniforme comprenant 4380 triangles dans l'espace des paramètres, ainsi que le maillage appliqué sur la surface réelle. Ce maillage est réalisé à l'aide du logiciel BLSURF [5] en moins d'une seconde sur un ordinateur portable.

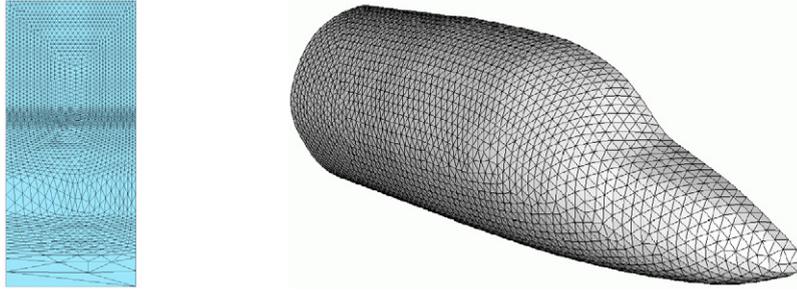


Fig. 3. Maillage dans le domaine des paramètres et maillage uniforme correspondant du carreau.

6. Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une méthodologie pour construire un support linéaire par morceaux pour les surfaces composées de carreaux paramétrés (issues en particulier des environnements CAO). L'utilisation du support permet de déconnecter le maillage du système CAO. En ce sens, il représente un outil universel pour la génération de maillages surfaciques. Outre le problème du maillage de ces surfaces, d'autres applications sont envisageables, notamment la projection d'un point spécifié, l'empreinte d'une courbe donnée sur une surface, ou encore la mise à plat géométrique des surfaces.

Références

- [1] M.V. Anglada, N.P. Garcia, P.B. Crosa, Directional adaptive surface triangulation, *CAGD* 16 (2) (1999) 107–126.
- [2] H. Borouchaki, La marche unité, in : *Traité en Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Méthodes Numériques, Maillage et adaptation*, sous la direction de P.L. George, Hermès, Paris, France, 2001, pp. 139–171 (Chapitre 4).
- [3] H. Borouchaki, P. Laug, P.L. George, Parametric surface meshing using a combined advancing-front/generalized-Delaunay approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49 (1–2) (2000) 233–259.
- [4] D. Filip, R. Magedson, R. Markot, Surface algorithms using bounds on derivatives, *CAGD* 3 (4) (1986) 295–311.
- [5] P. Laug, H. Borouchaki, BLSURF – Mesh Generator for Composite Parametric Surfaces, User's Manual, INRIA Tech. Report RT-0235, 1999.
- [6] P. Laug, H. Borouchaki, Curve linearization and discretization for meshing composite parametric surfaces, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 20 (11) (2004) 869–876.
- [7] L. Piegl, Tessellating trimmed NURBS surfaces, *CAD* 27 (1) (1995) 16–26.
- [8] X. Sheng, B.E. Hirsch, Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *CAD* 24 (8) (1992) 437–444.
- [9] M. Vigo, P. Brunet, Piecewise linear approximation of trimmed surfaces, *Computing Suppl.* 10 (1995) 341–356.