C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 663–668

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Contrôle optimal

Contrôlabilité asymptotique de systèmes hyperboliques linéaires

Asymptotic controllability for linear hyperbolic systems

Tatsien Li [a,b,*], Bopeng Rao [c]

[a] *School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*
[b] *Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics; Nonlinear Mathematical Modeling and Methods Laboratory, China*
[c] *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 21 décembre 2010
Accepté après révision le 24 février 2011
Disponible sur Internet le 25 mai 2011

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous considérons la contrôlabilité asymptotique et la contrôlabilité nulle asymptotique pour des systèmes hyperboliques linéaires en dimension d'espace un. Nous établissons qu'elles sont équivalentes, respectivement, à l'observabilité forte et l'observabilité faible du système dual. Nous donnons un exemple d'un système hyperbolique 4×4 sousmis à un seul contrôle frontière, qui est asymptotiquement contrôlable mais non exactement contrôlable.

ABSTRACT

In this Note we introduce the asymptotic controllability and the asymptotic null controllability for 1-*D* linear hyperbolic systems under the lack of boundary controls. We claim that they are equivalent, respectively, to the strong observability and the weak observability for the dual system. An example of 4×4 hyperbolic system with only one boundary control is shown to be asymptotically controllable but not exactly controllable.

Abridged English version

Consider the following one-dimensional linear hyperbolic problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial z}{\partial x} + Bz = 0, \\ x = 0: \quad z_+ = A_- z_- + h_+(t), \\ x = L: \quad z_- = A_+ z_+ + h_-(t), \\ t = 0: \quad z = \Phi(x), \end{cases} \tag{1}$$

where $z = \binom{z_-}{z_+}$ with $z_- = (z_1, \dots, z_m)^T$ and $z_+ = (z_{m+1}, \dots, z_n)^T$ and $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ is a constant diagonal matrix with $\lambda_r < 0 < \lambda_s$ $(r = 1, \dots, m;\ \ s = m+1, \dots, n)$, and $A_- \in \mathbb{M}^{(n-m)\times m}$, $A_+ \in \mathbb{M}^{m \times (n-m)}$, $B \in \mathbb{M}^{n\times n}$ are constant matrices. Let M_- be a subset of $\{1, \dots, m\}$ and M_+ a subset of $\{m+1, \dots, n\}$. We suppose that

* Addresse pour la correspondence : School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
Adresses e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T. Li), bopeng.rao@math.unistra.fr (B. Rao).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.03.006

$$h_r(t) \equiv 0, \quad \forall r \in M_-^c; \qquad h_s(t) \equiv 0, \quad \forall s \in M_+^c. \tag{2}$$

Definition 0.1. The forward problem (1) is *asymptotically controllable* on the interval $[0, T]$ if for any given $\Phi, \Psi \in (L^2(0, L))^n$, there exist a sequence of controls $h_r^{(k)} \in L^2(0, T)$ acting on the end $x = L$ for $r \in M_-$ and a sequence of controls $h_s^{(k)} \in L^2(0, T)$ acting on the end $x = 0$ for $s \in M_+$, such that the corresponding solutions $z^{(k)} = z^{(k)}(t, x)$ to (1) satisfy

$$z^{(k)}(T, \cdot) \to \Psi(\cdot) \quad \text{in } H \text{ as } k \to +\infty. \tag{3}$$

If $\Psi \equiv 0$, the problem (1) is *asymptotically null-controllable* on the interval $[0, T]$.

Remark 0.1. We give an example of 4×4 system with only one boundary control, which is asymptotically controllable, but not exactly controllable.

Definition 0.2. The backward adjoint problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial v}{\partial x} - B^T v = 0, \\ x = 0: \quad v_- = -\Lambda_-^{-1} A_-^T \Lambda_+ v_+, \\ x = L: \quad v_+ = -\Lambda_+^{-1} A_+^T \Lambda_- v_-, \\ t = T: \quad v = \Psi(x) \end{cases} \tag{4}$$

is *strongly observable* by means of the observed values v_s $(s \in M_+)$ at the end $x = 0$ and v_r $(r \in M_-)$ at the end $x = L$ on the interval $[0, T]$, if the conditions of observation

$$v_r(t, L) \equiv 0, \qquad v_s(t, 0) \equiv 0 \quad (r \in M_-,\ s \in M_+),\ \forall 0 \leqslant t \leqslant T \tag{5}$$

imply that $v(T, x) \equiv 0$ for all $0 \leqslant x \leqslant L$. The backward problem (4) is *weakly observable* by means of the observed values v_s $(s \in M_+)$ at the end $x = 0$ and v_r $(r \in M_-)$ at the end $x = L$ on the interval $[0, T]$, if the conditions of observation (5) imply that $v(0, x) \equiv 0$ for all $0 \leqslant x \leqslant L$.

Theorem 0.1. *The asymptotic controllability of the problem* (1) *is equivalent to the strong observability of the dual problem* (4)*.*

Theorem 0.2. *The asymptotic null controllability of the problem* (1) *is equivalent to the weak observability of the dual problem* (4)*.*

1. Introduction et résultats principaux

La contrôlabilité exacte frontière de systèmes hyperboliques linéaires ou quasilinéaires peut être réalisée si les contrôles frontières sont suffisamment nombreux (cf. [2–5,7,8]). Néanmoins, dans la pratique, on rencontre souvent des situations où les conditions aux limites ou les conditions d'interface ne fournissent pas un nombre suffisant de contrôles frontières pour la contrôlabilité exacte. Dans ce cas, les résultats mentionnés ci-dessus sur la contrôlabilité exacte ne peuvent pas être appliqués (cf. [6]). Il est donc important d'étudier la contrôlabilité exacte en absence de certains contrôles frontières.

Considérons le système hyperbolique linéaire à coefficients constants $\lambda_i, b_{ij}, a_{sr}, a_{rs}$ $(i, j = 1, \ldots, n; r = 1, \ldots, m; s = m + 1, \ldots, n)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial z}{\partial x} + Bz = 0, \\ x = 0: \quad z_+ = A_- z_- + h_+(t), \\ x = L: \quad z_- = A_+ z_+ + h_-(t), \\ t = 0: \quad z = \Phi(x), \end{cases} \tag{6}$$

où

$$\Lambda_- = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}, \qquad \Lambda_+ = \mathrm{diag}\{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n\}, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}\{\Lambda_-, \Lambda_+\},$$
$$A_- = (a_{sr}) \in \mathbb{M}^{(n-m)\times m}, \qquad A_+ = (a_{rs}) \in \mathbb{M}^{m\times(n-m)}, \qquad B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}^{n\times n},$$
$$z_- = (z_1, \ldots, z_m)^T, \qquad z_+ = (z_{m+1}, \ldots, z_n)^T, \qquad z = \begin{pmatrix} z_- \\ z_+ \end{pmatrix},$$
$$h_- = (h_1, \ldots, h_m)^T, \qquad h_+ = (h_{m+1}, \ldots, h_n)^T, \qquad h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_+ \end{pmatrix}.$$

Supposons que

$$\lambda_r < 0 < \lambda_s \quad (r = 1, \ldots, m;\ s = m + 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Alors pour toute donnée initiale $\Phi \in (L^2(0,L))^n$ et toute fonction frontière $h \in (L^2(0,T))^n$, le problème (6) admet une unique solution faible $z \in C^0(0,T;H)$ telle que

$$\|z\|_{C^0(0,T;H)} \leqslant C\big(\|\Phi\|_H + \|h\|_V\big), \tag{8}$$

où $H = (L^2(0,L))^n$, $V = (L^2(0,T))^n$ et $C > 0$ est une constante positive (cf. [8]). En conséquence, le problème adjoint rétrograde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial v}{\partial x} - B^T v = 0, \\ x = 0: \quad v_- = -\Lambda_-^{-1} A_-^T \Lambda_+ v_+, \\ x = L: \quad v_+ = -\Lambda_+^{-1} A_+^T \Lambda_- v_-, \\ t = T: \quad v = \Psi(x) \end{cases} \tag{9}$$

est également bien posé dans l'espace H.

Soient M_- un sous-ensemble de $\{1,\dots,m\}$ et M_+ un sous-ensemble de $\{m+1,\dots,n\}$. Nous imposons que

$$h_r(t) \equiv 0, \quad \forall r \in M_-^c; \qquad h_s(t) \equiv 0, \quad \forall s \in M_+^c. \tag{10}$$

Définition 1.1. Le problème (6) est *asymptotiquement contrôlable* en temps T si pour toutes fonctions $\Phi, \Psi \in H$, il existe une suite de contrôles $h_r^{(k)}, h_s^{(k)} \in L^2(0,T)$ pour $r \in M_-, s \in M_+$, telle que la suite des solutions correspondantes $z^{(k)} = z^{(k)}(t,x)$ du problème (6) vérifie

$$z^{(k)}(T,\cdot) \to \Psi(\cdot) \quad \text{dans } H \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{11}$$

Remarque 1.1. En général, nous ne pouvons pas déduire la convergence de $\{h_r^{(k)}, h_s^{(k)}\}$ et donc la contrôlabilité exacte à partir de la convergence de $\{z^{(k)}(T,\cdot)\}$. Nous allons donner un exemple qui est asymptotiquement contrôlable, mais non exactement contrôlable.

Définition 1.2. Le problème (9) est *fortement observable* au moyen des valeurs observées de v_s $(s \in M_+)$ à l'extrémité $x = 0$ et des valeurs observées de v_r $(r \in M_-)$ à l'extrémité $x = L$ sur l'intervalle du temps $[0,T]$, si les conditions d'observation

$$v_r(t,L) \equiv 0, \quad v_s(t,0) \equiv 0 \quad (r \in M_-,\ s \in M_+),\ \forall 0 \leqslant t \leqslant T \tag{12}$$

impliquent

$$v(T,x) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{13}$$

Désignos par w la solution du problème progressif avec conditions aux limites homogènes, qui engendre un C^0 semi-groupe $S(t)$ dans H :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial w}{\partial x} + Bw = 0, \\ x = 0: \quad w_+ = A_- w_-, \\ x = L: \quad w_- = A_+ w_+, \\ t = 0: \quad w = \Phi. \end{cases} \tag{14}$$

Par le changement de variable $u = z - w$, nous transformons le problème (6) en un problème progressif avec condition initiale nulle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, \\ x = 0: \quad u_+ = A_- u_- + h_+, \\ x = L: \quad u_- = A_+ u_+ + h_-, \\ t = 0: \quad u = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Il est clair que la contrôlabilité asymptotique du problème (6) est équivalente à la contrôlabilité asymptotique du problème (15).

Théorème 1.1. *La contrôlabilité asymptotique du problème* (15) *ou* (6) *est équivalente à l'observabilité forte du problème* (9).

Définition 1.3. Le problème (6) est *asymptotiquement nul-contrôlable* en temps T si $\Psi = 0$ dans la Définition 1.1 et

$$z^{(k)}(T,\cdot) \to 0 \quad \text{dans } H \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{16}$$

Définissons le sous-espace W_T comme l'image de $S(T)$:

$$W_T = S(T)H \subseteq H. \tag{17}$$

Notons que W_T est *a priori* un sous-espace propre et qu'il n'est pas fermé en général.

Définition 1.4. Le problème (15) est *asymptotiquement atteignable* en temps T, si pour toute donnée $\Psi \in W_T$, il existe une suite de contrôles $h_r^{(k)}$, $h_s^{(k)} \in L^2(0,T)$ appliqués à l'extrémité $x = L$ pour $r \in M_-$ et à l'extrémité $x = 0$ pour $s \in M_+$, telle que les solutions correspondantes $u^{(k)} = u^{(k)}(t,x)$ du problème (15) satisfont la condition finale suivante :

$$u^{(k)}(T,\cdot) \to \Psi(\cdot) \quad \text{dans } H \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{18}$$

Proposition 1.1. *Le problème* (6) *est asymptotiquement nul-contrôlable en temps T si et seulement si le problème* (15) *est asymptotiquement atteignable en temps T.*

Définition 1.5. Le problème (9) est *faiblement observable* au moyen des valeurs observées de v_s $(s \in M_+)$ à l'extrémité $x = 0$ et des valeurs observées de v_r $(r \in M_-)$ à l'extrémité $x = L$ sur l'intervalle du temps $[0,T]$, si les conditions d'observation (12) impliquent

$$v(0,x) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{19}$$

Théorème 1.2. *La contrôlabilité nulle asymptotique du problème* (6) *est équivalente à l'observabilité faible du problème* (9).

2. Démonstrations des résultats principaux

Soient z, v solution de (6) et (9) respectivement. En multipliant (6) par v et en intégrant par parties, nous obtenons l'identité de dualité fondamentale :

$$\big(z(T,\cdot), v(T,\cdot)\big)_H - \big(z(0,\cdot), v(0,\cdot)\big)_H = \sum_{r \in M_-} (-\lambda_r) \int_0^T h_r(t) v_r(t,L)\,\mathrm{d}t + \sum_{s \in M_+} \lambda_s \int_0^T h_s(t) v_s(t,0)\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Démonstration du Théorème 1.1. Notons par C_T l'ensemble des états finals que le problème (15) peut atteindre en temps T par l'action de tous les contrôles possibles h_r, h_s pour $r \in M_-$ et $s \in M_+$. Alors le problème (15) est asymptotiquement contrôlable si et seulement si $\overline{C}_T = H$.

Supposons que le problème (15) n'est pas asymptotiquement contrôlable, alors il existe une fonction non triviale $\Psi \in \overline{C}_T^{\perp}$. En choisissant cette fonction Ψ comme état final, nous résolvons le problème adjoint rétrograde (9). Puis en utilisant l'identité de dualité (20) et en notant la relation

$$\big(u(T,\cdot), v(T,\cdot)\big)_H = \big(u(T,\cdot), \Psi\big)_H = 0,$$

nous obtenons

$$\sum_{r \in M_-} (-\lambda_r) \int_0^T h_r(t) v_r(t,L)\,\mathrm{d}t + \sum_{s \in M_+} \lambda_s \int_0^T h_s(t) v_s(t,0)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $h_r \in L^2(0,T)$ $(r \in M_-)$ et tout $h_s \in L^2(0,T)$ $(s \in M_+)$. Nous en déduisons les conditions d'observation (12). Ceci implique la non observabilité forte du problème (9). □

Réciproquement, supposons que problème (9) n'est pas fortement observable. Il existe un état final non trivial Ψ tel que la solution correspondante $v = v(t,x)$ du problème (9) vérifie les conditions d'observation (12). Par définition, pour tout $u_T \in \overline{C}_T$, il existe une suite de contrôles $h_r^{(k)} \in L^2(0,T)$ pour $r \in M_-$ et $h_s^{(k)} \in L^2(0,T)$ pour $s \in M_+$ telle que la suite de solutions correspondantes $u^{(k)} = u^{(k)}(t,x)$ du problème (15) vérifie

$$u^{(k)}(T,\cdot) \to u_T(\cdot) \quad \text{dans } H \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{21}$$

D'autre part, en utilisant les conditions d'observation (12) et l'identité de dualité (20), nous avons

$$\big(u^{(k)}(T,\cdot),\Psi\big)_H=0. \tag{22}$$

Grâce à (21) et en passant à la limite dans (22), nous obtenons $(u_T,\Psi)_H=0$ pour tout $u_T\in\overline{C}_T$. On a donc $\Psi\in\overline{C}_T^{\perp}$, par conséquent $\overline{C}_T\neq H$. Ceci donne la non-contrôlabilité asymptotique du problème (15).

Démonstration du Théorème 1.2. Supposons que le problème (9) n'est pas faiblement observable. Alors il existe un état final $\Psi\in H$ tel que la solution $v=v(t,x)$ du problème (9) vérifie les conditions d'observation (12), mais avec l'état initial non identiquement nul :

$$v(0,x)\not\equiv 0,\quad 0\leqslant x\leqslant L. \tag{23}$$

Pour toute suite de contrôles $h_r^{(k)},h_s^{(k)}\in L^2(0,T)$ avec $r\in M_-$, $s\in M_+$, nous désignons par $z^{(k)}=z^{(k)}(t,x)$ les solutions correspondantes du problème (6) avec la donnée initiale $\Phi(x)=v(0,x)$. En utilisant les conditions d'observation (12) et l'identité de dualité (20), nous obtenons

$$\big(z^{(k)}(T,\cdot),\Psi(\cdot)\big)_H=\big(v(0,\cdot),v(0,\cdot)\big)_H.$$

Ceci implique que $z^{(k)}(T,\cdot)\not\to 0$. Ainsi, nous obtenons la non-contrôlabilité nulle asymptotique du problème (6).

Soit maintenant E_T le sous-espace de tous les états finals $\Psi\in H$ que le problème (15) peut asymptotiquement atteindre :

$$E_T=\big\{\Psi\in H\colon \exists h_r^{(k)},\ h_s^{(k)}\in L^2(0,T)\text{ tels que }u^{(k)}(T,\cdot)\to\Psi(\cdot)\text{ lorsque }k\to+\infty\big\}. \tag{24}$$

Evidemment, le problème (15) est asymptoticquement atteignable si et seulement si $W_T\subseteq E_T$. De plus, on peut montrer que E_T est un sous-espace fermé dans H. Supposons que le problème (6) n'est pas asymptotiquement nul-contrôlable, grâce à la Proposition 1.1, le problème (15) n'est pas asymptotiquement atteignable. Alors il existe une fonction non triviale Ψ telle que $\Psi\in W_T$ mais $\Psi\notin E_T$. Comme E_T est fermé, on peut écrire

$$\Psi=\Psi^{\perp}+\big(\Psi-\Psi^{\perp}\big),\qquad \Psi^{\perp}\in E_T^{\perp},\quad \Psi-\Psi^{\perp}\in E_T.$$

En prenant $\Psi^{\perp}$ comme l'état final, nous résolvons le problème adjoint rétrograde (9). Rappelons que pour toute solution $u=u(t,x)$ du problème (15), nous avons

$$u(0,\cdot)\equiv 0\quad\text{et}\quad u(T,\cdot)\in E_T.$$

Il vient de l'identité de dualité (20) que

$$\sum_{r\in M_-}(-\lambda_r)\int_0^T h_r(t)v_r(t,L)\,\mathrm{d}t+\sum_{s\in M_+}\lambda_s\int_0^T h_s(t)v_s(t,0)\,\mathrm{d}t=0$$

pour tout $h_r\in L^2(0,T)$ $(r\in M_-)$ et tout $h_s\in L^2(0,T)$ $(s\in M_+)$. Ceci implique les conditions d'observation (12).

Enfin comme $\Psi\in W_T$, il existe une fonction $\Phi\in H$ telle que $\Psi=S(T)\Phi$. En multipliant (14) par la solution v du problème (9) avec l'état final $\Psi^{\perp}$, et en utilisant l'identité de dualité (20) et les conditions d'observation (12), nous obtenons

$$\big(\Phi(\cdot),v(0,\cdot)\big)_H=\big(S(T)\Phi,\Psi^{\perp}\big)_H=\big(\Psi,\Psi^{\perp}\big)_H.$$

Comme $\Psi\notin E_T$, nous avons $(\Psi,\Psi^{\perp})_H\neq 0$. En particulier, nous obtenons $v(0,\cdot)\not\equiv 0$. Ceci implique la non-observabilité faible du problème (9).

3. Un exemple de non-contrôlabilité exacte

Considérons le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\Lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}+Bu=0,\\ x=0:\quad u_3=-u_1,\qquad u_4=-u_2,\\ x=\pi:\quad u_1=u_3+h,\qquad u_2=u_4,\\ t=0:\quad u=\Phi,\end{cases} \tag{25}$$

où on a posé

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&-1&0\\0&1&0&1\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Parallélement, nous considérons le problème adjoint rétrograde

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\Lambda\dfrac{\partial v}{\partial x}+Bv=0,\\ x=0: \quad v_1=-v_3, \qquad v_2=-v_4,\\ x=\pi: \quad v_3=v_1, \qquad v_4=v_2,\\ t=T: \quad v=\Psi.\end{cases}\tag{26}$$

Il est clair que le problème (25) et son dual (26) sont bien posés dans l'espace $H=L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$ (cf. [8]). D'autre part, on a $M_-=\{1\}$ et $M_+=\emptyset$. L'observation sera donc prise sur la variable v_1 à l'extrémité $x=\pi$ sur l'intervalle $[0,T]$. Plus précisement, si la condition d'observation

$$v_1(t,\pi)\equiv 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T\tag{27}$$

implique que

$$v(T,x)\equiv 0, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\tag{28}$$

alors le Théorème 1.1 impliquera la contrôlabilité asymptotique du problème (25). D'autre part, il est bien connu (cf. [7,8]) que le problème (25) est exactement contrôlable dans l'espace H par un contrôle frontière $h\in L^2(0,T)$ si et seulement s'il existe une constante $C>0$ telle que les solutions du problème adjoint rétrograde (26) vérifient une inégalité d'observation

$$\|\Psi\|_H^2\leqslant C\int_0^T\left|v_1(t,\pi)\right|^2\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } \Psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)\in H.\tag{29}$$

Théorème 3.1. *Supposons que $T>4\pi$. Alors le problème* (25) *est asymptotiquement contrôlable dans l'espace H par un contrôle frontière $h\in L^2(0,T)$. Mais le problème* (25) *n'est jamais exactement contrôlable pour tout $T>0$.*

Démonstration. Des développements asymptotiques des valeurs propres du problème adjoint :

$$\lambda_{1,\pm n}=\pm\left(n-1+\frac{1}{8\widetilde{n}}\right)i+\frac{O(1)}{n^3}i,$$
$$\lambda_{2,\pm n}=\pm\left(n+\frac{1}{8\widetilde{n}}\right)i+\frac{O(1)}{n^3}i$$

où $\widetilde{n}=n-\frac{1}{2}$, nous observons que chaque branche de valeurs propres satisfait une condition d'écartement, et que les valeurs propres de deux branches différentes sont asymptotiquement proches : $\lambda_{1,n+1}-\lambda_{2,n}\sim\frac{O(1)}{n^2}$. Ceci, grâce à une généralisation de l'inégalité d'Ingham (cf. [1]), permet de montrer l'observabilité forte du problème adjoint (26) au moyen de la condition d'observation (27), mais exclut toutes les possibilités d'inégalité d'observabilité du type (29). □

Références

[1] Vilmos Komornik, Paola Loreti, Fourier Series in Control Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2005.
[2] Tatsien Li, Controllability and Observability for Quasilinear Hyperbolic Systems, AIMS Series on Applied Mathematics, vol. 3, American Institute of Mathematical Sciences & Higher Education Press, 2010.
[3] Tatsien Li, Bopeng Rao, Local exact boundary controllability for a class of quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math. B 23 (2002) 209–218.
[4] Tatsien Li, Bopeng Rao, Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2003) 1748–1755.
[5] Tatsien Li, Bopeng Rao, Strong (weak) exact controllability and strong (weak) exact observability for quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math. B 31 (2010) 723–742.
[6] Tatsien Li, Bopeng Rao, Exact controllability and exact observability for quasilinear hyperbolic systems: Known results and open problems, in: Tatsien Li, Yuejun Peng, Bopeng Rao (Eds.), Series in Contemporary Applied Mathematics, vol. 15, Higher Education Press, World Scientific, 2010, pp. 374–385.
[7] Jacques-Liouis Lions, Contrôlabilié Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, tome 1, Masson, 1988.
[8] David L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions, SIAM Rev. 20 (1978) 639–739.