C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 369–373

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi–Brauer

Degree three unramified cohomology of Severi–Brauer varieties

Alena Pirutka

École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 25 février 2011
Accepté après révision le 9 mars 2011

Présenté par Jean-Pierre Serre

RÉSUMÉ

Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$, car. $\mathbb{F} \neq 2$. Soit C/K une conique. Parimala et Suresh (2010) [9] ont montré que le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul pour tout $\ell \neq$ car. $\mathbb{F}$. Dans cette Note on étend leur résultat aux variétés de Severi–Brauer associées à une algèbre centrale simple dont l'indice ℓ est premier et différent de car. $\mathbb{F}$.

ABSTRACT

Let S be a smooth projective geometrically integral surface defined over a finite field $\mathbb{F}$, char. $\mathbb{F} \neq 2$, and let K be its field of fractions. Parimala and Suresh (2010) [9] proved that for C a conic over K, the group $H^3_{\mathrm{nr}}(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ is zero for $\ell \neq$ char. $\mathbb{F}$. In this Note we extend their result to the case of Severi–Brauer varieties of prime index.

Abridged English version

Let K be a field and F a function field over K. For n invertible on K one defines

$$H^j_{\mathrm{nr}}(F/K, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}\big[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})\big],$$

where A runs through all discrete valuation rings of rank one with $K \subset A$ and fraction field F. We denote by k_A the residue field of A and by $\partial_{j,A}$ the residue map.

Theorem 1. *Let S be a smooth projective geometrically integral surface defined over a finite field $\mathbb{F}$ and let K be its field of fractions. Let X be a Severi–Brauer variety associated to a central division algebra D over K of prime index $\ell \neq$ char. $\mathbb{F}$. Then $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$ for any prime ℓ', $\ell' \neq$ char. $\mathbb{F}$.*

This theorem generalizes the result of Parimala and Suresh [9] in case of conics.

Let X be as above and let α be the class of D in $\mathrm{Br}\, K$. To prove Theorem 1, we should essentially establish that $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. By a corestriction argument, we may also assume that K contains all ℓth roots of unity. We proceed in two steps.

Adresse e-mail : pirutka@dma.ens.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.03.005

(i) We first prove that the image of a natural map $H^3(K,\mu_\ell^{\otimes 2}) \to H^3(K(X),\mu_\ell^{\otimes 2})$ contains the group $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_\ell^{\otimes 2})$.

(ii) Next, let β be an element of $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_\ell^{\otimes 2})$. By (i), it comes from $\xi \in H^3(K,\mu_\ell^{\otimes 2})$. We show that there exists an element $f \in K^*$ such that $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S,\mu_\ell^{\otimes 2})$ (see p. 370 for the definition of this group).

These two steps imply that $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$ as the group $H^3_{\mathrm{nr}}(K/S,\mu_\ell^{\otimes 2})$ is zero by [4, p. 790].

In the proof of (i) we use a result of B. Kahn ([6, 5.3(8), 7.1] and [7, 2.5]) to get a surjection $H^3(K,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \twoheadrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/K,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Then we deduce (i) using the Merkur'ev–Suslin theorem [8, p. 339].

The main ingredient to prove (ii) is the local–global principle of Parimala and Suresh [9, 3.1]. By this principle, it is sufficient to find f locally. Let x be a codimension 1 point of S, let k be its residue field, let v be the corresponding valuation on K and let K_x be the completion of K at x. It is sufficient to find $f_x \in K_x^*$ such that $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x,\mu_\ell^{\otimes 2})$. Let us describe the choice of the function f_x.

If ξ is unramified at x, we take $f_x = 1$.

Suppose that ξ is ramified at x. Let π be a uniformizing parameter of $\mathcal{O}_{S,x}$. If α is unramified at x, denote by $\bar{\alpha} = \partial_x(\alpha \cup \pi)$ the specialization of α at x. In this case we use [5, 1.2] to extend v to a valuation on $K(X)$ with residue field $\kappa = k(\bar{X})$, where $\bar{X}$ is the Severi–Brauer variety over k corresponding to $\bar{\alpha}$. If α is ramified at x, we use [1, 1.4] to get an extension of v on $K(X)$ whose residue field κ is purely transcendental over k'/k of degree ℓ.

We have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^3(K,\mu_\ell^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(K(X),\mu_\ell^{\otimes 2}) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_x} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_v} \\ H^2(k,\mu_\ell) & \longrightarrow & H^2(\kappa,\mu_\ell). \end{array}$$

As ξ becomes unramified on $K(X)$, its residue $\partial_x(\xi)$ lies in the kernel of the map $H^2(k,\mu_\ell) \to H^2(\kappa,\mu_\ell)$. If α is unramified at x, we deduce that $\partial_x(\xi) = r\bar{\alpha}$ and we take $f_x = \pi^r$. If α is ramified at x, we deduce that $\partial_x(\xi) = (\partial_x(\alpha), c)$ for some element $c \in \kappa^*$. We then lift c to a unit $c' \in K_x$ and we take $f_x = c'$. With these choices we have $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x,\mu_\ell^{\otimes 2})$, which finishes the step (ii).

1. Introduction

Soit K un corps. Pour n un entier inversible sur K, on note μ_n le K-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-j)},\mathbb{Z}/n)$ si j est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. Ces k-schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore $\mu_n^{\otimes j}$, sur toute K-variété X. On note $H^i(X,\mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de X à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Lorsque K contient une racine primitive n-ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout j.

Pour A un groupe abélien et ℓ un nombre premier on note $A\{\ell\}$ le sous-groupe de A formé des éléments annulés par une puissance de ℓ.

Soit K un corps. Soit F un corps de fonctions sur K. Soient $j \geqslant 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Dans la suite on va utiliser les notions suivantes de cohomologie *non ramifiée* :

(i) $H^j_{\mathrm{nr}}(F/K,\mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F,\mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A,\mu_n^{\otimes i-1})]$. Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps K. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

(ii) Pour X une K-variété intègre, on note $H^j_{\mathrm{nr}}(X,\mu_n^{\otimes i}) \overset{\text{déf}}{=} H^j_{\mathrm{nr}}(K(X)/K,\mu_n^{\otimes i})$.

Pour X propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier $H^j_{\mathrm{nr}}(X,\mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie $H^0(X,\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j(U,\mu_n^{\otimes i})$ (cf. [2]).

(iii) Si X est régulier en codimension 1, on pose

$$H^j_{\mathrm{nr}}\big(K(X)/X,\mu_n^{\otimes i}\big) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}\,\partial_{j,\mathcal{O}_{X,x}}$$

la cohomologie non ramifiée de $K(X)$ par rapport à X.

Soit maintenant K le corps des fractions d'une surface lisse géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Dans [9], Parimala et Suresh montrèrent que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$, pour X une conique sur K. Le but de cette note est d'étendre leurs arguments au cas des variétés de Severi–Brauer d'indice premier :

Théorème 1. *Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit X la variété de Severi–Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. On a alors $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$ pour tout premier ℓ', $\ell' \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$.*

Remarque 2. Ce résultat est aussi vrai pour une variété de Severi–Brauer associée à une K-algèbre centrale simple d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. En effet, $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(X \times \mathbb{P}^n_K, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2))$ d'après [3, 1.2].

Pour montrer ce théorème, on doit essentiellement établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$ (cf. section 2). Pour ce faire, on suit les mêmes étapes que dans [9]. On montre d'abord que tout élément $\beta \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$ (cf. section 2). Dans la section 3, en utilisant le principe de type local–global de [9], on montre que l'on peut en effet supposer que $\xi \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$. D'après le théorème de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [4], le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$ est nul, ce qui nous permet de conclure.

2. Comparaison entre cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi–Brauer et cohomologie du corps de base

Proposition 3. *Soit K un corps. Soit X la variété de Severi–Brauer associée à un corps gauche D de centre K et d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.K$. L'application naturelle*

$$H^3\big(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)\big) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}\big(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)\big)$$

est surjective.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence des résultats de B. Kahn [6,7]. Supposons d'abord que K est parfait. Soient K^s une clôture séparable de K, $\bar{X} = X \times_K K^s$ et $G = Gal(K^s/K)$. D'après [6, 5.3(8)] et [7, 2.5], pour X une K-variété de Severi–Brauer, on a alors un complexe :

$$0 \to \mathrm{Coker}\,\phi \to \mathrm{Coker}\big[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G\big]\{\ell\} \xrightarrow{\delta} Br\,K\{\ell\},$$

qui est exact sauf peut-être au terme du milieu. Si X est une conique, on a immédiatement $\mathrm{Coker}\,\phi = 0$ car $CH^2(\bar{X}) = 0$ (ce résultat est dû à Suslin [11]).

Supposons que $\ell \geqslant 3$. Puisque D est d'indice premier ℓ, on a que $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G] \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [8, 8.7.2]. Dans ce cas, d'après [6, 7.1] et [7, 2.5], on a explicitement $\delta(1) = 2[D] \neq 0$, où $[D]$ désigne la classe de D dans $Br\,K$ et $1 \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est identifié au générateur de $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G]$. Ainsi, sur un corps K parfait, l'application $H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective. Dans le cas général, on passe à une clôture parfaite de K et on déduit le résultat par un argument de corestriction. □

Corollaire 4. *Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit X la K-variété de Severi–Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. Alors*

(i) *pour tout $\ell' \neq \ell$, $\mathrm{car}.K$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$;*
(ii) *$H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ et l'image de l'application naturelle*

$$H^3\big(K, \mu_\ell^{\otimes 2}\big) \to H^3\big(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2}\big)$$

contient le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$.

Démonstration. Soit K' une extension de K de degré ℓ, telle que $X_{K'}$ est isomorphe à un espace projectif. Par le même argument que dans [2, 2.1.10], on a une application entre les cohomologies non ramifiées

$$H^3_{\mathrm{nr}}\big(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)\big) \to H^3_{\mathrm{nr}}\big(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)\big).$$

Puisque $K'(X_{K'})$ est une extension transcendante pure de K', on a un isomorphisme [3, 1.2] :

$$H^3_{\mathrm{nr}}\big(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)\big) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}\big(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)\big).$$

Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2))$ est nul d'après [4, p. 790]. Un argument de corestriction montre alors que pour ℓ' premier, $\ell' \neq \ell$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$, et que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par ℓ. On a alors que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par ℓ et il vient donc de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ par [8, p. 339].

Soit $\xi \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$. On voit ξ aussi comme un élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mu_\ell^{\otimes 2})$ et on déduit de la proposition précédente que ξ provient d'un élément $\beta \in H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Montrons que β est annulé par ℓ.

Par le même raisonnement que précédemment, l'image ξ' de ξ dans $H^3(K'(X_{K'}), \mu_\ell^{\otimes 2})$ est nulle. En effet, $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(K'/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. On en déduit que l'image de β dans $H^3(K', \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nulle. On a alors : $\ell\beta = \mathrm{Cor}_{K'/K} \circ \mathrm{Res}_{K'/K}(\beta) = 0$. D'après [8], on a alors que β vient d'un élément de $H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$. $\square$

3. Preuve du théorème 1

Lemme 5. *Soit R un anneau de valuation discrète dont on note K le corps des fractions et k le corps résiduel. Soit X la variété de Severi–Brauer associée à un corps gauche D de centre K et d'indice premier ℓ, $(\ell, \mathrm{car}.k) = 1$. Soit α la classe de D dans $\mathrm{Br}\,K$. Soit $\xi \in H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$. Supposons que pour toute valuation v sur $K(X)$ induisant sur K soit la valuation triviale, soit la valuation associée à R, le résidu $\partial_v(\xi_{K(X)})$ est nul. On a alors :*

(i) *si α est non ramifiée en R, alors $\partial_R(\xi)$ est un multiple de la spécialisation $\bar{\alpha} = \partial_R(\alpha \cup \pi)$, où π est la classe d'une uniformisante de R dans $H^1(K, \mu_\ell)$;*
(ii) *si α est ramifiée en R, alors ou bien ξ est non ramifiée en R, ou bien $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in H^1(k, \mu_\ell)$.*

Démonstration. Pour prolonger la valuation sur K en une valuation sur $K(X)$ on s'intéresse à la structure de la fibre spéciale d'un modèle de X au-dessus de R.

Quitte à changer K par son complété, on peut supposer que K est complet. Notons d'abord que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K. En effet, soit K_{nr} l'extension maximale non ramifiée de K, soit R_{nr} l'anneau des entiers de K_{nr} et soit k^s une clôture séparable de k. On a une suite exacte

$$0 \to H^2(R_{\mathrm{nr}}, \mu_\ell) \to H^2(K_{\mathrm{nr}}, \mu_\ell) \xrightarrow{\partial_R} H^1\big(k^s, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\big).$$

Puisque k^s est séparablement clos, on a $H^1(k^s, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(R_{\mathrm{nr}}, \mu_\ell) = H^2(k^s, \mu_\ell) = 0$, d'où $H^2(K_{\mathrm{nr}}, \mu_\ell) = 0$ et donc α est trivialisée par une extension non ramifiée de K.

Supposons que α est non ramifiée. Dans ce cas, puisque α est trivialisée par une extension non ramifiée de K, on a que D se prolonge en une algèbre d'Azumaya Λ sur R, qui a pour la classe α (cf. [5, 1.1 et 1.2]). Ainsi X se prolonge en un schéma de Severi–Brauer au-dessus de R, associé à Λ, dont la fibre spéciale $\bar{X}$ est donnée par l'image de α dans $H^2(k, \mu_\ell)$, qui est précisement $\bar{\alpha}$.

Supposons que α est ramifiée. Sous l'hypothèse que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K, d'après Artin [1, 1.4], il existe un modèle de X au-dessus de R dont la fibre spéciale géométrique contient ℓ composantes de multiplicité 1, conjuguées sur k, qui sont des variétés rationnelles.

On voit ainsi qu'il existe une valuation v sur $K(X)$ qui prolonge la valuation sur K avec le corps résiduel $\kappa(v)$ tel que

– $\kappa(v) = k(\bar{X})$, ou $\bar{X}$ est une k-variété de Severi–Brauer de classe $\bar{\alpha}$, si α est non ramifiée ;
– $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure d'une extension k' de k de degré ℓ, sinon.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^3(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2}) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_R} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_v} \\ H^2(k, \mu_\ell) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^2(\kappa(v), \mu_\ell). \end{array}$$

Puisque ξ devient non ramifiée sur $K(X)$, on a que $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(\kappa(v), \mu_\ell)$. Si α est non ramifiée, $\partial_R(\xi)$ est alors un multiple de $\bar{\alpha}$ d'après le théorème d'Amitsur, ce qui établit (i).

Supposons maintenant que α et ξ sont ramifiées en R. Puisque $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure de k', $H^2(k', \mu_\ell)$ s'injecte dans $H^2(\kappa(v), \mu_\ell)$. Ainsi $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(k', \mu_\ell)$.

D'autre part, puisque α devient triviale sur $K(X)$, on voit que $\partial_R(\alpha)$ est dans le noyau de l'application $H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to H^1(k', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ par le même argument. Puisque $\partial_R(\alpha)$ est un élément non nul dans $H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, il correspond à une extension galoisienne, cyclique, de degré ℓ, qui coïncide avec k' car $\partial_R(\alpha) \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to H^1(k', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})]$ et $[k' : k] = \ell$. Puisque $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(k', \mu_\ell)$, cela implique que $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in H^1(k, \mu_\ell)$ [10, p. 211], ce qui établit (ii). $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. D'après le corollaire 4, il suffit d'établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. Notons qu'on peut supposer que K contient une racine primitive ℓ-ième de l'unité. En effet, le degré d de l'extension K' de K, obtenue en ajoutant une racine primitive ℓ-ième de l'unité, divise $\ell - 1$. Ainsi $d\,\mathrm{Id} = \mathrm{Cor}_{K'(X)/K(X)} \circ \mathrm{Res}_{K'(X)/K(X)}$ est un isomorphisme sur $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$. Il suffit donc d'établir $H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$.

Soit α la classe de D dans $Br\,K$. Soit $\beta \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. D'après le corollaire 4, β provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Montrons qu'il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Pour ce faire, on utilise le principe local–global de Parimala et Suresh :

Théorème 6. *(Voir [9, 3.1].) Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit ℓ un entier premier, $(\ell, \mathrm{car}.\,K) = 1$. Supposons que K contient une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Soit $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ un élément d'indice ℓ et soit $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $f \in K^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$;*
(ii) *pour tout point $x \in S$ de codimension 1, il existe un élément non nul f_x dans le complété K_x de K en x tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.*

D'après ce théorème, il suffit de trouver, pour tout point $x \in S$ de codimension 1, un élément $f_x \in K_x^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. On a trois cas à considérer :

1. ξ est non ramifiée en x. Dans ce cas, $f_x = 1$ convient.
2. ξ est ramifiée en x et α est non ramifiée en x. D'après le lemme 5, $\partial_x(\xi) = r\bar{\alpha}$. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{S,x}$. Alors $f_x = \pi^r$ convient : $\partial_x(\xi - \alpha \cup \pi^r) = r\bar{\alpha} - r\bar{\alpha} = 0$.
3. ξ est ramifiée en x et α est ramifiée en x. D'après le lemme 5, on peut écrire $\partial_x(\xi) = (\partial_x(\alpha), c)$. On relève c en une unité c' pour la valuation de K_x. Puisque $\partial_x(\alpha \cup c') = (\partial_x(\alpha), c)$, $f_x = c'$ convient.

Ainsi il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. On a ainsi que β provient de $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$. D'après [4, p. 790], ce groupe est nul (cf. [2, 2.1.8] pour l'identification de divers groupes de cohomologie non ramifiée). Ainsi $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$, ce qui termine la preuve du théorème 1. □

Références

[1] M. Artin, Left ideals in maximal orders, in: Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry, Wilrijk, 1981, in: Lecture Notes in Math., vol. 917, Springer, Berlin–New York, 1982, pp. 182–193.
[2] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in: K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, Santa Barbara, CA, 1992, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, Part 1, pp. 1–64.
[3] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. Math. 97 (1) (1989) 141–158.
[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J. 50 (3) (1983) 763–801.
[5] E. Frossard, Fibres dégénérées des schémas de Severi–Brauer d'ordres, J. Algebra 198 (2) (1997) 362–387.
[6] B. Kahn, Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties, in: Algebraic K-Theory, Seattle, WA, 1997, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 149–174.
[7] B. Kahn, Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras, Documenta Mathematica, Extra Volume: Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010) 317–369.
[8] A.S. Merkur'ev, A.A. Suslin, K-когомологии многообразий Севери–Брауэра и гомоморфизм норменного вычета (K-cohomology of Severi–Brauer varieties and the norm residue homomorphism), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (5) (1982) 1011–1046, 1135–1136.
[9] R. Parimala, V. Suresh, Degree three cohomology of function fields of surfaces, arXiv:1012.5367, 2010.
[10] J.-P. Serre, Corps Locaux, Publications de l'Université de Nancago, vol. VIII, Hermann, Paris, 1968.
[11] A.A. Suslin, Кватернионный гомоморфизм для поля функций на конике (Quaternion homomorphism for the field of functions on a conic), Dokl. Akad. Nauk SSSR 265 (2) (1982) 292–296.