C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1241–1244

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Logique

Équivalence élémentaire de puissances cartésiennes d'un même groupe

Elemental equivalence of Cartesian powers of the same group

Anatole Khelif[a], Saharon Shelah[b]

[a] *Équipe de logique mathématique, université Paris Diderot Paris 7, UFR de mathématiques, case 7012, site Chevaleret, 75205 Paris cedex 13, France*
[b] *Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 91904, Israël*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu et accepté le 26 octobre 2010
Disponible sur Internet le 10 novembre 2010

Présenté par Jean-Yves Girard

RÉSUMÉ

Nous démontrons que si I et J sont des ensembles infinis et G un groupe commutatif de torsion les groupes G^I et G^J sont élémentairement équivalents pour la logique $L_{\infty\omega}$. La démonstration utilise de façon essentielle une propriété nouvelle et simple « à la Cantor–Bernstein ».
Un critère s'appliquant à des groupes noncommutatifs nous permet d'exhiber divers groupes (libres ou résolubles ou nilpotents ou ...) G tels que pour I infini dénombrable et J non dénombrable les groupes G^I et G^J ne sont même pas élémentairement équivalents pour la logique $L_{\omega_1\omega}$. Nous construisons à la main un groupe commutatif dénombrable ayant la même propriété.

ABSTRACT

We prove that if I and J are infinite sets and G a commutative torsion group, the groups G^I and G^J are elementarily equivalent for the logic $L_{\infty\omega}$. The proof is based on a new and simple property with a Cantor–Bernstein flavour.
A criterion applying to non-commutative groups allows us to exhibit various groups (free or soluble or nilpotent or ...) G such that for I infinite countable and J uncountable the groups G^I and G^J are not even elementarily equivalent for the $L_{\omega_1\omega}$ logic. Another argument leads to a countable commutative group having the same property.

1. Introduction

Dans un article récent [3], Jarden et Lubotzky démontrent (sans l'énoncer) le résultat suivant :

Pour tous ensembles infinis I et J les groupes $\mathbb{Z}_p^I$ et $\mathbb{Z}_p^J$ sont élémentairement équivalents pour la logique $L_{\infty\omega}$ (nous dirons dorénavant $\infty\omega$ équivalents), où $\mathbb{Z}_p$ désigne le groupe additif des p-adiques.

Ce résultat est en fait une conséquence immédiate d'un vieux théorème de [4] (Theorem 8, p. 635).

Il convient de rappeler que les théorèmes de Feferman et Vaught, connus depuis plus d'un demi-siècle, garantissent que pour G groupe (ou structure arbitraire) fixé et I infini la théorie de G^I dans la logique ordinaire ne dépend pas de l'ensemble I.

Adresses e-mail : khelif@logique.jussieu.fr (A. Khelif), shelah@huji.ac.il (S. Shelah).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.10.034

Observons également que si I et J sont des ensembles infinis de cardinal strictement supérieur au cardinal de G groupe (ou structure arbitraire) les groupes G^I et G^J sont $\infty\omega$ équivalents. Ce résultat fait partie du «*folklore*» et rend l'étude de G^I inintéressante, pour le point de vue qui nous concerne, pour un groupe G fini et un ensemble I infini.

G. Sabbagh a demandé si pour tout groupe G commutatif dénombrable et tous ensembles infinis I et J les groupes G^I et G^J sont $\infty\omega$ ou au moins $\omega_1\omega$ équivalents. Nous montrons qu'en général ces questions ont une réponse négative mais que pour$I$ et J infinis et G commutatif de torsion, sans hypothèse de cardinalité sur G, les groupes G^I et G^J sont $\infty\omega$ équivalents. La démonstration de ce dernier résultat est peut-être plus intéressante que le résultat lui-même, en ce qu'elle permet de dégager une propriété nouvelle, que nous appelons de Cantor–Bernstein, qui est assez naturelle et qui devrait avoir d'autres applications dans les généralisations du théorème d'Ulm et peut-être ailleurs (pour le théorème d'Ulm que nous n'utilisons pas bien que son contexte ne soit pas éloigné d'une partie de nos travaux, et pour une introduction simple et rapide aux logiques infinitaires nous renvoyons à [2]).

Théorème 1. *Soit un groupe G vérifiant les conditions suivantes* :

1) *Il existe un sous-ensemble fini P de G tel que le centralisateur $\tilde{C}(P)$ de l'ensemble de conjugués dans P de G soit égal à $Z(G)$, au centre de G.*
2) *Si H et K sont deux sous-groupes normaux de G contenant le centre de G et tels que l'ensemble $H \cup K$ engendre G, alors l'un des groupes H, K est égal à G.*
3) *Le groupe $G/Z(G)$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique.*

Alors pour tout cardinal κ non dénombrable les groupes G^ω et G^κ ne sont pas $\omega_1\omega$ équivalents (nous désignons par ω le plus petit cardinal infini, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble des entiers.

2. Esquisse de démonstration

Pour tout sous ensemble X d'un groupe on désigne par $\tilde{C}(X)$ le centralisateur de l'ensemble des conjugués de X.

Les fonctions constantes de ω dans G qui prennent leur valeur dans P forment un sous-ensemble P' de G^ω de même cardinal que P, tel que $\tilde{C}(P')$ est égal au centre de G^ω, $Z(G^\omega)$ qui n'est autre que $Z(G)^\omega$.

Considérons, un sous-ensemble Q de G de même cardinal que P ayant la propriété suivante $(*)$:

$(*)$ $\tilde{C}(Q)$ et $\tilde{C}(\tilde{C}(Q))$ engendrent G^ω.

Il résulte de la condition (2) que, pour toute coordonnée, soit la projection de $\tilde{C}(Q)$, soit la projection de $\tilde{C}(Q)/Z(G^\omega)$ sur cette coordonnée est égale à G. Si la projection d'un de ces ensembles est égale à G, la projection de l'autre est égale à $Z(G)$. Considérons les sous-groupes $\tilde{C}(Q)$ distincts de $Z(G^\omega)$, minimaux pour l'inclusion, tels que Q vérifie $(*)$.

Comme on n'a qu'un ensemble dénombrable de coordonnées l'ensemble de ces $\tilde{C}(Q)$ est dénombrable, chacun d'eux étant le produit cartésien de G pour une coordonnée et de $Z(G)$ pour les autres.

$$\text{Pour un tel } \tilde{C}(Q) \text{ on a donc} \quad G^\omega/Z\big(G^\omega\big) = \tilde{C}(Q)/Z\big(G^\omega\big) \times \tilde{C}\big(\tilde{C}(Q)\big)/Z\big(G^\omega\big)$$

et $\tilde{C}(Q)/Z(G^\omega)$ s'identifie à $G/Z(G)$.

La condition 3) signifie exactement qu'il existe un entier n et une infinité de n-uples ayant deux à deux des n-types distincts. Cela permet de construire explicitement l'énoncé de $L_{\omega_1\omega}$ vrai dans G^κ et faux dans G^ω en observant d'abord que $(*)$ est exprimable dans $L_{\omega_1\omega}$ et que tous les sous-ensembles Q ont le même cardinal fini.

Corollaire 1. *Si G est un groupe libre non commutatif ou un groupe résoluble libre de classe de résolubilité au moins égale à* 2, *ou un groupe nilpotent libre de classe de nilpotence au moins égale à* 2, *alors G^ω et G^κ ne sont pas $\omega_1\omega$ équivalents, pour κ non dénombrable.*

Il en est de même si G est infini simple car un résultat cité à la page 18 de [1] garantit qu'un groupe infini simple n'est pas $\aleph_0$-catégorique.

Corollaire 2. *Il existe un groupe G dénombrable virtuellement commutatif tel que pour κ non dénombrable les groupes G^ω et G^κ ne sont pas $\omega_1\omega$ équivalents.*

Le groupe G est simplement défini comme suit : soit p un nombre premier impair, soit H la somme directe $\bigoplus Z/p^k Z_{k\geqslant 1}$.

On construit l'automorphisme τ de H qui à tout élément associe son inverse.

On prend pour G le produit semi-direct de H et du groupe cyclique à 2 éléments (engendré par τ) ; On vérifie facilement que G vérifie les conditions 1), 2), 3) du Théorème 1.

Remarque. On peut obtenir des exemples de groupes très variés en observant que la conclusion du Théorème 1 vaut pour les produits cartésiens d'un nombre fini de groupes vérifiant les hypothèses du Théorème 1.

Théorème 2. *Pour tout nombre premier p, il existe un groupe commutatif sans torsion G dénombrable, q-divisible pour tout nombre premier $q \neq p$, tel que pout tout cardinal κ non dénombrable les groupes G^ω et G^κ ne sont pas $\omega_1\omega$ équivalents.*

Nous nous contenterons de définir le groupe et de donner l'idée de la démonstration.

Soit p un nombre premier ; nous considérons le groupe Z_p des entiers p-adiques et l'anneau local $Z(p)$ de l'ensemble des fractions a/b où a est un entier et b un entier non nul premier avec p. L'anneau $Z(p)$ est évidemment dénombrable alors que Z_p est un $Z(p)$-module ayant la puissance du continu.

Nous pouvons alors conclure qu'il existe un ensemble B, ayant la puissance du continu, d'éléments de Z_p qui sont algébriquement indépendants sur $Z(p)$. Par l'ajout éventuel d'un entier compris entre 1 et $p - 1$, on peut supposer qu'aucun de ces éléments n'est multiple de p **dans** Z_p. Soit (x_i) $i \in N$ et (y_i) $i \in N$ deux familles disjointes d'éléments de B deux à deux distincts pour des indices différents. Considérons le sous-module de A engendré par les éléments de la forme cy_i/d où c et d sont des produits de puissances non négatives de x_j, d ne contenant dans sa décomposition que des x_j avec $i \neq j$. Comme les (x_i) $i \in N$ et les (y_i) $i \in N$ réunis forment un ensemble d'éléments de Z_p algébriquement indépendants sur $Z(p)$, A est alors un $Z(p)$-module libre dénombrable et il ne contient aucun élément non nul qui soit divisible (dans le Q-espace vectoriel engendré par A) par toutes les puissances de tous les x_i ; considérons maintenant les éléments de la forme a/b où a est un élément de A et b une puissance de p. Il est clair que ces éléments forment un sous-groupe dénombrable de Z_p.

Ce sous-groupe est notre groupe G. L'idée de la démonstration est que l'élément $y = (y_i)$ $i \in N$ « engendre » dans un certain sens, exprimable dans $L_{\omega_1\omega}$ le groupe G^ω, alors qu'il n'existe pas d'analogue pour le groupe G^κ si κ est non dénombrable. Nous omettons les détails.

3. La propriété de Cantor–Bernstein et la propriété de Cantor–Bernstein faible

Définition 1. On dit qu'un groupe G (ou une structure quelconque) vérifie la propriété de Cantor–Bernstein si et seulement si pour tout couple (u, v) d'éléments de G tel qu'il existe un endomorphisme de G envoyant u sur v et un endomorphisme de G envoyant v sur u, il existe un automorphisme de G envoyant u sur v.

Pour un groupe non nécessairement dénombrable on définit une propriété de Cantor–Bernstein adaptée à la logique $L_{\infty\omega}$ qui évidemment coïncide avec la propriété de Cantor–Bernstein si le groupe est dénombrable.

Pour la commodité du lecteur nous rappelons des notions classiques.

On appelle morphisme partiel d'une structure A vers une structure B un morphisme φ tel qu'il existe une classe M de morphismes de sous-structures de A vers des sous-structures de B ayant les propriétés suivantes :

1) Le morphisme φ appartient à M ;
2) Pour tout morphisme γ de M et tout élément a de A, il existe un morphisme de M qui prolonge γ et qui est défini sur a.

La notion d'isomorphisme partiel de A vers B est obtenue de façon analogue en exigeant une version symétrique de la condition 2).

Théorème 3. *Si G est un groupe abélien de torsion alors pour tout cardinal infini κ les groupes G^ω et G^κ sont $\infty\omega$-équivalents.*

La preuve est trop complexe pour être donnée. Elle utilise des ingrédients semblables à ceux du théorème d'Ulm. On commence par montrer que G^ω vérifie la propriété de Cantor–Bernstein faible. On montre ensuite que, pour un groupe G vérifiant certaines hypothèses assez générales, si le groupe G^ω vérifie la propriété de Cantor–Bernstein faible, alors les groupes G^ω et G^κ sont $\infty\omega$-équivalents, avec un résultat semblable pour certains modules, ce qui permet de remplacer dans l'énoncé du Théorème 3 « groupe abélien de torsion » par module de torsion sur un anneau de Dedekind dénombrable dont les idéaux maximaux sont d'indice fini.

Pour la preuve du Théorème 3, nous utilisons un lemme qui joue un rôle important dans la suite.

Lemme 3. *Soit G un groupe (ou un A-module sur un anneau non nécessairement commutatif A), soit κ un cardinal infini. Soit f un isomorphisme de $G^\kappa \times G^\kappa$ sur G^κ. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1) *G^κ vérifie la propriété de Cantor–Bernstein (respectivement la propriété de Cantor–Bernstein faible).*
2) *Pour tout élément a de G^κ, il existe un automorphisme (respectivement un automorphisme partiel) de G^κ envoyant a sur $f((a, 0))$.*
3) *Pour tout élément a de G^κ, il existe un élément c de G^κ et un automorphisme (respectivement un automorphisme partiel) de G^κ envoyant a sur $f((c, 0))$.*
4) *Pour tout élément a de G^κ, il existe un automorphisme de G^κ envoyant a sur un élément $f(b)$, où b a κ coordonnées nulles.*

La démonstration du Théorème 3 nous a mené à un résultat purement algébrique.

Théorème 4. *Tout groupe commutatif de torsion, en fait tout module localement artinien sur un anneau de Dedekind, possède la propriété de Cantor–Bernstein faible. En particulier un groupe commutatif de torsion dénombrable possède la propriété de Cantor–Bernstein.*

Nous concluons avec des remarques et questions qui essaient de cerner les limites au-delà desquelles on ne saurait aller.

La question la plus intéressante est probablement la suivante : à part [2] il y a eu, en dehors même du cadre des groupes commutatifs de torsion, des généralisations algébriques et logiques du théorème d'Ulm (cf. [5]). Aucune de ces généralisations n'inclut le Théorème 3. Il serait souhaitable d'avoir une espèce d'enveloppe convexe de ces généralisations et du Théorème 3.

Théorème 5. *Il existe un groupe G commutatif sans torsion **non** dénombrable avec G^ω et $G^{\aleph_1}$ non $L_{\omega_1,\omega}$ élémentairement équivalents tel que G est réunion d'une chaîne C de sous-groupes dénombrables tel que pour tout $F \in C$, F^ω et $F^{\aleph_1}$ sont ∞-élémentairement équivalents.*

Il est intéressant d'observer que le groupe G^ω possède la propriété de Cantor–Bernstein. Dans le paragraphe ci-dessus nous avons précisé non dénombrable, car il est très facile de déduire l'existence d'un groupe dénombrable ayant les propriétés requises de nos autres résultats. Nous ignorons s'il existe un groupe commutatif G ne vérifiant pas la propriété de Cantor–Bernstein tel que G^ω la vérifie.

Références

[1] A.B. Apps, On the structure of $\aleph_0$-categorical groups, J. Algebra 81 (1983) 320–339.
[2] J. Barwise, P. Eklof, Infinitary properties of abelian torsion groups, Ann. Math. Logic 2 (1970) 25–68.
[3] M. Jarden, A. Lubotzky, Elementary equivalence of profinite groups, Bull. London Math. Soc. 40 (2008) 887–896.
[4] G. Sabbagh, P. Eklof, Definability problems for modules and rings, J. Symbolic Logic 36 (1971) 623–649.
[5] R.B. Warfield Jr., Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 88–92.