C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1303–1306

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie/Géométrie analytique

Feuilletage lisse de $\mathbb{S}^5$ par surfaces complexes

Smooth foliation of $\mathbb{S}^5$ by complex surfaces

Guillaume Deschamps

UFR de mathématiques, université Bretagne occidentale, 6, avenue le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 mars 2010
Accepté après révision le 11 octobre 2010
Disponible sur Internet le 4 novembre 2010

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

En 2002 Meersseman et Verjovsky [2] ont construit un feuilletage de codimension un de $\mathbb{S}^5$ par feuilles complexes, possédant 2 feuilles compactes. Le but de cette Note est d'améliorer et de simplifier la construction afin de munir la sphère de dimension cinq d'un feuilletage lisse à feuilles complexes avec une seule feuille compacte.

ABSTRACT

In 2002 Meersseman and Verjovsky [2] constructed a smooth, codimension-one, foliation on 5-sphere by complex surfaces with two compact leaves. The aim of this Note is to improve and simplify their construction in order to give a smooth foliation on 5-sphere by complex surfaces with only one compact leaf.

1. Introduction

La note de Novikov [5] parue en 1964, où il esquissait une démonstration que tout feuilletage lisse de la 3-sphère par surface possédait une feuille compacte, a eu un impact considérable. On pouvait alors penser que la construction de Lawson [1] d'un feuilletage lisse de codimension un sur $\mathbb{S}^5$ avec une seule feuille compacte, était optimal du point de vue du nombre de feuilles compactes. Mais on sait aujourd'hui [3,6] qu'il existe un feuilletage lisse de codimension un sur la sphère $\mathbb{S}^5$ sans feuille compacte.

Trente ans plus tard Meersseman et Verjovsky [2] en modifiant la construction de Lawson ont pu définir un feuilletage lisse à feuilles complexes sur $\mathbb{S}^5$ muni de deux feuilles compactes. C'est le premier exemple exotique d'un tel feuilletage (en particulier qui ne peut être plongé dans une 3-variété de Stein). Le but de cette note est de simplifier notablement la construction de Meersseman–Verjovsky.

Théorème. *Il existe un feuilletage lisse à feuilles complexes et de codimension un sur $\mathbb{S}^5$ ne contenant qu'une seule feuille compacte.*

Ce théorème dit en particulier que le feuilletage de Meersseman–Verjovsky n'est pas optimal en terme de nombre de feuilles compactes. La démonstration que nous donnons s'inspire de la construction de [2] dont nous rappelons ici les notations.

Adresse e-mail : guillaume.deschamps@univ-brest.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.10.012

2. Notations

On considère $\mathbb{S}^5$ comme la sphère unité de $\mathbb{C}^3$. Soit

$$W = \{z \in \mathbb{C}^3 - \{0\} / P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$$

C'est une variété complexe. Soit K l'intersection de W avec $\mathbb{S}^5$. On décompose la 5-sphère en deux variétés à bord : $\mathcal{N}$, un voisinage tubulaire fermé de K dans $\mathbb{S}^5$ et $\mathcal{M}$ l'adhérence du complémentaire de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{S}^5$. En particulier le bord commun de $\mathcal{N}$ et de $\mathcal{M}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times K$.

Soit X une variété à bord dont le bord ∂X est une variété complexe. On rappelle qu'un feuilletage de X par variétés complexes est dit *plat* [2] s'il s'étend en un feuilletage à feuilles complexes de $X \cup \partial X \times [0,1]$ qui coïncide avec le feuilletage naturelle du collier $\partial X \times [0,1]$. L'intérêt de cette définition provient de la proposition suivante :

Proposition. *(Voir [2].) Soient $(X_i, \mathcal{F}_i)$ deux feuilletages à bord $(i = 1,2)$. Supposons les bords biholomorphes et les feuilletages plats. Alors pour tout biholomorphisme ψ de ∂X_1 sur ∂X_2, il existe un feuilletage par variétés complexes sur l'union $X_1 \cup_\psi X_2$ (recollé le long du bord via ψ) dont la restriction à X_1 (respectivement à X_2) est $\mathcal{F}_1$ (respectivement $\mathcal{F}_2$).*

On sait que $\mathcal{N}$ admet un feuilletage à feuilles complexes plat dont la seule feuille compacte est son bord $\partial\mathcal{N}$ [2]. Nous rappellerons brièvement la construction dans le paragraphe suivant, c'est un feuilletage du type feuilletage de Reeb.

Dans la construction originale de Meersseman–Verjovsky, les auteurs ne réussissent pas à construire un feuilletage plat sur $\mathcal{M}$. La démonstration de notre théorème revient précisément à construire un feuilletage plat par variétés complexes sur $\mathcal{M}$ avec comme seule feuille compacte $\partial\mathcal{M}$.

3. Construction d'un feuilletage plat sur $\mathcal{N}$

On considère la courbe elliptique $E = \{[z] \in \mathbb{C}P^2 / P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$ ainsi que le $\mathbb{C}^\star$-fibré W de base E obtenu en quotientant $\mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$ par l'action engendrée par :

$$(z,u) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star \longmapsto \left(e^{2i\pi w}.z, \psi(z).u\right) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$$

où w est le module de E et ψ une fonction holomorphe bien choisie [2]. On munit alors la variété $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathbb{C}^\star \times (\mathbb{C} \times [0,+\infty[- \{(0,0)\})$ du feuilletage trivial par surfaces complexes et on note :

$$\begin{cases} T : (z,u,t) \in \widetilde{\mathcal{N}} \longmapsto (z, \lambda w.u, d(t)) \in \widetilde{\mathcal{N}} \\ U : (z,u,t) \in \widetilde{\mathcal{N}} \longmapsto (e^{2i\pi w}.z, \psi(z).u, t) \in \widetilde{\mathcal{N}} \end{cases}$$

pour $0 < \lambda < 1$ et d un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ tel que $d(t) = t$ si $t \leqslant 0$ et $d'(t) < 1$ si $t > 0$. L'action de $\mathbb{Z}^2$ engendrée par T et U est libre, propre, respecte le feuilletage et est holomorphe le long des feuilles. On vérifie alors que le quotient s'identifie à la variété $\mathcal{N}$ munit d'un feuilletage plat par surfaces complexes.

4. Construction d'un feuilletage plat sur $\mathcal{M}$

On définit $Y = P^{-1}([0,+\infty[) - \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{C}^3$ et l'application

$$g : (z,t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \longmapsto P(z) - \phi(t) \in \mathbb{R}$$

Contrairement à ce qui est fait dans [2] ici nous choisissons la fonction ϕ bien précise définie par :

$$\begin{aligned} \phi :]-\infty, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{\exp(-\frac{1}{t})}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction ϕ a les propriétés suivantes :

i) ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
ii) $\phi'(t) = \frac{\phi(t)}{t^2 \exp(-\frac{1}{t})} > 0$ si $t > 0$.
iii) ϕ est une bijection de $]0,1]$ sur $]0,\phi(1)]$ d'inverse la fonction $\phi^{-1}(t) = \frac{1}{\ln(\ln(\frac{1}{t}))}$.

On prolonge alors ϕ sur $[1,+\infty[$ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$, surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et tel que $\phi'(t) > 0$ $\forall t > 0$.

Posons alors $\Xi = g^{-1}(\{0\}) - \{(0,0,0)\} \times \mathbb{R}$ et remarquons que Ξ est l'union de

$$\Xi^- = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z,t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}/t \leqslant 0,\ z \neq [0,0,0)\}$$

difféomorphe à $W \times]-\infty, 0]$ et de

$$\Xi^+ = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z,t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}/t \geqslant 0,\ z \neq [0,0,0)\}$$

difféomorphe à Y. L'intersection de ces deux pièces est difféomorphe à $W = \partial Y$ si bien que Ξ est difféomorphe à Y augmenté d'un collier infini. On feuillette alors Ξ^+ par les niveaux

$$L_t = \{(z,t) \in \Xi^+/P(z) = \phi(t)\}$$

et Ξ^- par les niveaux

$$L_t = \{(z,t) \in \Xi^-/P(z) = \phi(t) = 0\}$$

C'est un feuilletage lisse à feuilles complexes sur Ξ. Pour $0 < \lambda < 1$, on note

$$\begin{aligned} G : \Xi &\longrightarrow \Xi \\ (z,t) &\longmapsto (\lambda jz, h(t)) \end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction constante égale t sur $]-\infty, 0]$ et sur $\mathbb{R}^+$ égale à :

$$h^+(t) = \phi^{-1}(\lambda^3 \phi(t))$$

Le groupe engendré par G agit librement, proprement sur Ξ, respecte le feuilletage et est holomorphe en restriction aux feuilles. Le quotient Y_1 est donc une variété feuilletée par feuilles complexes.

Lemme 1. *La variété Y_1 est difféomorphe à $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M} \times]-\infty, 0]$.*

Preuve. Si on note $int(\Xi^+)$ l'intérieur de Ξ^+ alors le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} int(\Xi^+) &\longrightarrow P^{-1}(1) \times]0, +\infty[\\ (z,t) &\longmapsto \left(\frac{z}{\phi^{\frac{1}{3}}(t)}, \phi(t)\right) \end{aligned}$$

induit un difféomorphisme entre les feuilletages naturels de ces deux variétés. De plus il conjugue G à :

$$\begin{aligned} \tilde{G} : P^{-1}(1) \times]0, +\infty[&\longrightarrow P^{-1}(1) \times]0, +\infty[\\ (z,t) &\longmapsto (jz, \lambda^3 t) \end{aligned}$$

Le quotient de $int(\Xi^+)$ par G est donc difféomorphe à un fibré en cercle de fibre $P^{-1}(1)$ et de monodromie donnée par la multiplication par j. Maintenant la fibration de Milnor qui envoie un point z de l'intérieur de $\mathcal{M}$ sur $P(z)/|P(z)|$ a la même monodromie [4]. On a bien $int(\Xi^+)/G$ difféomorphe à $int(\mathcal{M})$ et donc Y_1 difféomorphe à $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M} \times]-\infty, 0]$. □

Le feuilletage que nous avons construit sur Y_1 est lisse du fait du choix de la fonction ϕ :

Lemme 2. *La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en zéro.*

Par définition, dire que le feuilletage sur Y_1 est lisse équivaut à dire que le feuilletage sur $\mathcal{M}$ est un feuilletage plat (à feuilles complexes) dont la seule feuille compacte est son bord. Ce qui conclut la démonstration de notre théorème.

Preuve du Lemme 2. On pose $u(t) = 1 - \ln(\lambda^3)\exp(-\frac{1}{t})$, on peut alors écrire

$$\forall t \in]0,1] \quad h^+(t) = \phi^{-1}(\lambda^3 \phi(t)) = \frac{t}{t \ln(1 - \ln(\lambda^3)\exp(-\frac{1}{t})) + 1} = \frac{t}{t \ln(u(t)) + 1}$$

Mais en zéro on a $\exp(-\frac{1}{t}) = o(t^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ de sorte que $u(t) = 1 + o(t^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$h^+(t) = \frac{t}{t \ln(1 + o(t^n)) + 1} = \frac{t}{o(t^{n+1}) + 1} = t + o(t^{n+2})$$

En d'autres termes on a $h^+(0) = 0$, $h^{+\prime}(0) = 1$ et $h^{+(n)}(0) = 0$, $\forall n > 1$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ en zéro. □

Remerciements

Je tiens à remercier L. Meersseman d'avoir porté mon attention sur cette question. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

Références

[1] H.B. Lawson, Codimension-one foliations of spheres, Ann. of Math. 94 (1971) 494–503.
[2] L. Meersseman, A. Verjovsky, A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces, Ann. of Math. (2) 156 (2002) 915–930.
[3] G. Meigniez, Regularization and minimization of Γ_1-structures, arXiv:0904.2912v3, 2010.
[4] J. Milnor, Singular Points on Complex Hypersurfaces, Ann. of Math. Stud., vol. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, 1968.
[5] S.P. Novikov, Foliations of codimension 1 on manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155 (1964) 1010–1013.
[6] P.A. Schweitzer, Codimension one foliations without compact leaves, Comment. Math. Helv. 70 (1995) 171–209.