



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse numérique

## Résolution rapide des systèmes de Toeplitz bande par blocs de Toeplitz bandes

*Asymptotically fast solution of two-level banded Toeplitz systems of linear equations*

Khalil Houssam<sup>a</sup>, Hossein Mouhamad<sup>b</sup>, Ezzaldine Hayssam<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Institut Camille-Jordan, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

<sup>b</sup> Laboratoire J.A. Dieudonné, parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France

### INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*

Reçu le 1<sup>er</sup> août 2010

Accepté le 11 octobre 2010

Disponible sur Internet le 27 octobre 2010

Présenté par le Comité de rédaction

### RÉSUMÉ

Nous présentons une méthode directe pour résoudre un système de Toeplitz bande par blocs de Toeplitz bandes avec une complexité de  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations arithmétiques. L'idée de cet algorithme est de plonger une matrice de Toeplitz bande biniveaux dans une matrice circulante biniveaux. La technique de plonger (resp. de transformer) une matrice de Toeplitz bande dans (resp. à) une matrice de type différente est très connue dans le cas des matrices de Toeplitz scalaires. C'est la première fois qu'on utilise cette technique pour les matrices de Toeplitz bandes biniveaux, ce qui nous permet d'obtenir cette complexité qui est, à notre connaissance, la plus rapide pour résoudre un système de Toeplitz biniveaux bande.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### ABSTRACT

We present a direct method for the solution of  $N \times N$  block banded Toeplitz systems with banded Toeplitz blocks with computational complexity  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  operations. The idea of this algorithm consists in embedding a two-level banded Toeplitz matrix into a two-level circulant matrix. This technical device is well-known for scalar banded Toeplitz systems, but it never been used for two-level banded Toeplitz systems.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

Plusieurs problèmes d'équations aux dérivées partielles, de traitement de signaux et d'ingénierie requièrent la résolution des systèmes de Toeplitz bandes biniveaux. Dans le cas scalaire on arrive à profiter des deux structures, la structure de Toeplitz et la structure bande, de la matrice pour donner des algorithmes plus rapides que ceux utilisant sa structure creuse. Par contre, dans le cas d'un système de Toeplitz bande par blocs Toeplitz bandes (Toeplitz bandes biniveaux), et plus généralement le cas des systèmes Toeplitz bandes multiniveaux, les algorithmes utilisés profitent seulement de la structure creuse de la matrice. Cette limitation est due à l'absence d'un algorithme qui utilise les deux structures de Toeplitz en même temps, et l'utilisation d'une seule structure de Toeplitz avec la structure bande complique le problème sans offrir un vrai gain.

Adresses e-mail : khalil@math.univ-lyon1.fr (K. Houssam), houssein@math.unice.fr (H. Mouhamad), ezzaldin@math.unice.fr (E. Hayssam).

Un système linéaire,  $Ax = b$ , bande de largeur de bande  $2k + 1$  et de taille  $n$  peut être résolu en  $\mathcal{O}(k^2n)$  opérations arithmétiques (voir [5]). Si de plus  $A$  est de Toeplitz, alors  $Ax = b$  peut être résolu en  $\mathcal{O}(n \log n)$  opérations (voir [3,1,2] et [6]).

Soit  $T$  une matrice de Toeplitz par blocs de Toeplitz à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ . On suppose qu'elle est formée de  $m$  blocs de taille  $n \times n$ ; de plus elle est bande par blocs, c'est-à-dire qu'en dehors des  $2k_1 + 1$  diagonales par blocs centrales les blocs sont nuls; les blocs eux-mêmes sont bandes : en dehors des  $2k_2 + 1$  diagonales centrales, les éléments des blocs sont nuls.  $T$  est donc de la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & T_{-1} & \dots & T_{-k_1} & 0 & \dots & 0 \\ T_1 & T_0 & T_{-1} & \dots & T_{-k_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ T_{k_1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{-k_1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{-1} \\ 0 & \dots & 0 & T_{k_1} & \dots & T_1 & T_0 \end{pmatrix}, \text{ et chaque } T_j \text{ est de la forme } T_j = \begin{pmatrix} t_{0,j} & t_{-1,j} & \dots & t_{-k_2,j} & 0 & \dots & 0 \\ t_{1,j} & t_{0,j} & t_{-1,j} & \dots & t_{-k_2,j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{k_2,j} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-k_2,j} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1,j} \\ 0 & \dots & 0 & t_{k_2,j} & \dots & t_{1,j} & t_{0,j} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Soit  $N = nm$ , et supposons que  $m$  et  $n$  sont de même ordre de grandeur, c'est-à-dire  $m = \mathcal{O}(\sqrt{N})$  et  $n = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ . On va supposer de plus que  $k_1 \ll m$  et  $k_2 \ll n$ . Comme la largeur de bande de  $T$  est  $K = (2k_1 - 1)n + 2k_2 + 1$  alors la résolution de  $Tx = b$  coutera  $\mathcal{O}(K^2N) = \mathcal{O}(N^2)$  opérations avec des méthodes directes pour matrices creuses.

Jusqu'à présent, pour le cas biniveaux, il y a aucun algorithme qui utilise les deux structures de Toeplitz  $T$  ainsi que sa structure bande pour arriver à une complexité plus faible que  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations. Ce phénomène est dû à la difficulté de généraliser les algorithmes des matrices de Toeplitz scalaire au cas des matrices de Toeplitz biniveaux. Mais dans notre cas, où la matrice est aussi bande biniveaux, la généralisation est faisable. En généralisant une idée proche de celles utilisées dans [3,1,2] et [6] on a pu résoudre le problème  $Tx = b$  en  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations.

**2. Plongement dans une matrice circulante par blocs circulants**

Soit  $T$  une matrice de Toeplitz bande biniveaux comme en (1). Nous sommes intéressés par le problème  $Tx = b$  avec  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , les  $x_i$  et les  $b_i$  étant des vecteurs de taille  $m$ .

**Proposition 2.1.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-k} & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{-k+1} & a_{-k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_k & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_k & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

une matrice de Toeplitz bande de taille  $n$  et de largeur de bande  $2k + 1$ . On peut plonger  $A$  dans la matrice circulante  $C = C(r)$  de première colonne  $r$  donné par

$$r = \underbrace{(a_0, \dots, a_k, 0, \dots, 0)}_n, a_{-k}, \dots, a_{-1})^T.$$

En utilisant la proposition précédente, on peut plonger  $T$  dans une matrice circulante par blocs circulants,  $C$ , de taille  $(m + k_1)(n + k_2) \times (m + k_1)(n + k_2)$ . En effet, on plonge tout d'abord chaque bloc  $T_i$ , pour  $-k_1 \leq i \leq k_1$ , dans une matrice circulante de taille  $(n + k_2) \times (n + k_2)$ . Par suite on plonge par bloc la matrice obtenue, qui est une matrice bande Toeplitz par blocs, dans une matrice circulante par blocs. La matrice finale est bien une matrice circulante par blocs circulants de taille  $(m + k_1)(n + k_2) \times (m + k_1)(n + k_2)$ .

Pour résoudre le système  $Tx = b$ , on va poser le problème  $C\tilde{x} = \tilde{b}$  avec

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0_k \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ c \end{pmatrix},$$

où  $k = k_1(n + k_2)$ ,  $c$  est un vecteur inconnu de longueur  $k$ ,  $0_p$  désigne un vecteur nul de longueur  $p$  et

$$\bar{x} = (x_1 0_{k_2} | \dots | x_m 0_{k_2})^T \quad \text{et} \quad \bar{b} = (b_1 c_1 | \dots | b_m c_m)^T,$$

où chaque  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , est un vecteur inconnu de longueur  $k_2$ .

**Proposition 2.2.** *En supposant que  $k_1 \ll m$  et  $k_2 \ll n$ , on peut trouver le vecteur inconnu  $\zeta = (c_1 \dots c_m c)^T$  en  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations.*

**Démonstration.** Pour Trouver le vecteur  $\zeta$  on inverse la matrice  $C$  (requiert  $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations) et de la système  $C^{-1}\bar{b} = \bar{x}$  on extrait les lignes correspondantes aux coefficients nuls dans  $\bar{x}$  et les nouvelles inconnues. On procède comme suit :  $C$  est une matrice circulante biniveaux, donc  $C^{-1}$  est aussi circulante biniveaux. Donc, on peut écrire  $C^{-1}$  de la façon suivante :

$$C^{-1} = \left( \begin{array}{cc|ccc|c} \gamma_0^{11} & \gamma_0^{12} & & & \gamma_{-m}^{11} & \gamma_{-m}^{12} & \\ \gamma_0^{21} & \gamma_0^{22} & & & \gamma_{-m}^{21} & \gamma_{-m}^{22} & \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ \gamma_m^{11} & \gamma_m^{12} & & & \gamma_0^{11} & \gamma_0^{12} & \\ \gamma_m^{21} & \gamma_m^{22} & & & \gamma_0^{21} & \gamma_0^{22} & \\ \hline & & \Delta & & & & \mu \end{array} \right) \beta, \tag{2}$$

avec  $\mu$  est une  $k \times k$  matrice de Toeplitz par blocs circulants,  $\Delta$  et  $\beta$  sont deux matrices rectangulaires de Toeplitz par blocs circulants de tailles  $k \times m(n + k_2)$  et  $m(n + k_2) \times k$  respectivement. Pour  $-m \leq i \leq m$ ,  $\gamma_i^{11}$  est une  $n \times n$  matrice de Toeplitz,  $\gamma_i^{22}$  est une  $k_2 \times k_2$  matrice de Toeplitz,  $\gamma_i^{21}$  et  $\gamma_i^{12}$  sont deux matrices de Toeplitz de tailles  $k_2 \times n$  et  $n \times k_2$  respectivement.

De  $C^{-1}\bar{b} = \bar{x}$  on extrait le système de Toeplitz par blocs de Toeplitz de taille  $k_2 m \times k_2 m$  suivant

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{22} & \dots & \gamma_{-m}^{22} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_m^{22} & \dots & \gamma_0^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_0^{21} & \dots & \gamma_{-m}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_m^{21} & \dots & \gamma_0^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La matrice en second membre est de Toeplitz par blocs de Toeplitz de taille  $k_2 m \times mn$ , et la multiplication d'un vecteur par une matrice de Toeplitz biniveaux de taille  $k_2 m \times mn$  requiert  $\mathcal{O}(mn \log^2 mn)$  opérations (voir [8]). De plus, la résolution d'un système de Toeplitz biniveaux de taille  $k_2 m \times k_2 m$  requiert  $\mathcal{O}(k_2^3 m \log^2(k_2 m))$  opérations (voir [7,9,4,3]).

Donc, en supposant  $k_2 \ll n$ , on peut calculer  $c_1, \dots, c_m$  en  $\mathcal{O}(mn \log^2 mn) + \mathcal{O}(k_2^3 m \log^2(k_2 m)) = \mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations. Une fois qu'on a calculé  $c_1, \dots, c_m$ , on peut trouver  $c$  comme la solution du système suivant :

$$\mu c = -\Delta(b_1 c_1 | \dots | b_m c_m)^T. \tag{4}$$

Comme  $\Delta$  est une matrice de Toeplitz biniveaux de taille  $k \times m(n + k_2)$ , alors on peut calculer le second membre en  $\mathcal{O}(mn \log^2 mn)$  opérations. De plus,  $\mu$  est de Toeplitz biniveaux de taille  $k \times k$ , donc une fois qu'on a le second membre, on peut calculer  $c$  en  $\mathcal{O}(k^2 \log^2 k)$  opérations. Et  $\mathcal{O}(k^2 \log^2 k)$  est équivalent à  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  si on suppose que  $k_1 \ll m$  et  $k_2 \ll n$ .

Le compte final donne le résultat annoncé.  $\square$

**Corollaire 2.3.** *En plongeant  $T$  dans une matrice circulante biniveaux, on peut résoudre le système  $Tx = b$  en  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations.*

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, le calcul des nouvelles inconnues requiert  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$  opérations. Une fois qu'on a toutes les coefficients de  $\bar{b}$ , la résolution du système circulant biniveaux  $C\bar{x} = \bar{b}$  requiert  $\mathcal{O}((m + k_1)(n + k_2) \log(m + k_1)(n + k_2))$  opérations qui est équivalent à  $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations dans le cas où  $k_1 \ll m$  et  $k_2 \ll n$ .

Le compte final donne le résultat annoncé.  $\square$

**Références**

[1] Dario Bini, Milvio Capovani, Spectral and computational properties of band symmetric Toeplitz matrices, Linear Algebra and its Applications 52–53 (1983) 99–126.  
 [2] Dario Bini, Milvio Capovani, Tensor rank and border rank of band Toeplitz matrices, SIAM J. Comput. 16 (2) (1987) 252–258.  
 [3] Dario Bini, Victor Y. Pan, Polynomial and Matrix Computations. Vol. 1, Fundamental Algorithms, Progress Theoretical Computer Science, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.  
 [4] Alin Bostan, Claude-Pierre Jeannerod, Éric Schost, Solving Toeplitz- and Vandermonde-like linear systems with large displacement rank, in: ISSAC '07: Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, New York, NY, USA, 2007, pp. 33–40.  
 [5] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd edition, The Johns Hopkins University Press, 1996.  
 [6] A. Jain, Fast inversion of banded Toeplitz matrices by circular decompositions, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing 26 (1–4) (Apr 1978) 121–126.  
 [7] Houssam Khalil, Structured and Toeplitz-block-Toeplitz matrices in numeric and symbolic computation, Ph.D. thesis, Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, 2008, <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/30/69/87/PDF/these.pdf>.

- [8] Bernard Mourrain, Victor Y. Pan, Multivariate polynomials, duality, and structured matrices, in: *Real Computation and Complexity*, Schloss Dagstuhl, 1998, *J. Complexity* 16 (1) (2000) 110–180.
- [9] H. Yunbiao Wang Krishna, On fast and superfast algorithms for solving block Toeplitz systems, in: *Twenty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Oct. 30–Nov. 1, 1989, pp. 643–647.