C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 951–954

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres / Équations différentielles

Courbures, groupes de Galois génériques et D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences

Curvatures, generic Galois groups and D-groupoid of a q-difference system

Lucia Di Vizio [a], Charlotte Hardouin [b]

[a] *Institut de mathématiques de Jussieu, topologie et géométrie algébriques, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France*
[b] *Institut de mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 6 mars 2010
Accepté après révision le 4 août 2010

Présenté par Jean-Pierre Ramis

RÉSUMÉ

En combinant les résultats de Hendriks (1996) [6], Di Vizio (2002) [1] et Di Vizio, Hardouin [2], nous prouvons que les groupes de Galois génériques, usuel et différentiel, d'un module aux q-différences sur $\mathbb{C}(x)$ peuvent toujours être caractérisés à l'aide d'un ensemble convenable de courbures, dans l'esprit de Katz (1982) [8]. Nous utilisons ce résultat pour prouver que le D-groupoïde de Malgrange–Granier d'un système aux q-différences linéaire coïncide, dans un sens que nous spécifions dans le texte ci-dessous, avec une sorte de clôture de Kolchin de la dynamique du système aux q-différences, et que le groupe qui fixe une transversale du groupoïde coïncide avec le groupe de Galois différentiel générique.

ABSTRACT

Combining the results in Hendriks (1996) [6], Di Vizio (2002) [1] and Di Vizio, Hardouin [2], we prove that the generic, algebraic or differential, Galois group of a q-difference modules over $\mathbb{C}(x)$ can always be characterized in terms of v-curvatures, in the spirit of the work of Katz (1982) [8]. We use this result to prove that the Malgrange–Granier D-groupoid of a linear q-difference system coincide, in a sense that we specify below, with a sort of Kolchin closure of the dynamics of the linear q-difference system and that the group that fixes a transversal, coincide with the differential generic Galois group.

1. Introduction

Considérons un système aux q-différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C}^*$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$. Dans [5], les auteurs attachent à cet objet un groupe de Galois différentiel à la Kolchin–Cassidy, qui « mesure » les relations algébrodifférentielles satisfaites par les solutions du système. Le groupe différentiel de Hardouin–Singer est défini sur la clôture différentielle du corps des fonctions méromorphes sur le tore $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, donc sur un corps très grand (des questions liées à la descente sont traitée aussi dans [11]).

Nous considérons ici le groupe de Galois générique d'un système aux q-différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$, dans l'esprit de [8] et [1], et son avatar différentiel. Ces deux groupes génériques sont définis sur $\mathbb{C}(x)$ et encodent beaucoup d'informations sur les solutions du système et peuvent être caractérisés en termes de courbures, dans

Adresses e-mail : divizio@math.jussieu.fr (L. Di Vizio), charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr (C. Hardouin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.08.001

l'esprit de la conjecture de Grothendieck–Katz sur les p-courbures d'une équation différentielle (*cf.* [8]). Nous comparons le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire (*cf.* [4]) avec le groupe de Galois générique différentiel et la clôture de Kolchin de la dynamique du système, généralisant ainsi les résultats de [3].

2. Définition des groupes de Galois génériques algébrique et différentiel

Soient K un corps de caractéristique zéro, $q \in K \setminus \{0,1\}$ et $\sigma_q : f(x) \mapsto f(qx)$, pour tout $f(x) \in K(x)$. On appelle module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ sur $K(x)$ un $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie $M_{K(x)}$ équipé d'une bijection σ_q-semilinéaire $\Sigma_q : M_{K(x)} \to M_{K(x)}$. Nous considérons la plus petite famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ de $K(x)$-espaces vectoriels contenant $M_{K(x)}$ et fermée par rapport aux constructions algébriques (somme directe, produit tensoriel, symétrique et antisymétrique, dual). L'opérateur Σ_q induit une bijection σ_q-semilinéaire sur chaque espace vectoriel de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$, que l'on appellera à nouveau Σ_q, de façon que les éléments de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ ont une structure de module aux q-différences sur $K(x)$. Notons que $Gl(M_{K(x)})$ agit fonctoriellement sur chaque élément de la famille $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$.

Nous pouvons aussi considérer une famille plus grande $Constr^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})$, contenant $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$, mais qui est en plus fermée par rapport au *foncteur de prolongation F*, dont nous allons maintenant donner la définition. Soit $\partial = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Pour tout module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)}$, le module aux q-différences $F(\mathcal{M}_{K(x)}) = (F(M_{K(x)}), \Sigma_q)$ est défini par : $F(M_{K(x)}) = M_{K(x)} \otimes_{K(x)} [K(x) + K(x)\partial]$, où le produit tensoriel est pris par rapport à la structure de $K(x)$-module à droite de $K(x) + K(x)\partial$; si $\underline{e}$ est une $K(x)$-base de $M_{K(x)}$ telle que $\Sigma_q \underline{e} = \underline{e} A(x)$, alors on note $(\underline{e}, \partial(\underline{e})) := (\underline{e} \otimes 1, \underline{e} \otimes \partial)$ et on pose $\Sigma_q(\underline{e}, \partial(\underline{e})) = (\underline{e}, \partial\underline{e})\left(\begin{smallmatrix} A & \partial(A) \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, motivé par le fait que $\sigma_q \partial = \partial \sigma_q$. Nous soulignons que la structure $K(x)$-linéaire de $F(M_{K(x)})$ est définie par $\lambda(\partial(m)(:= \lambda(m \otimes \partial)) = \partial(\lambda m) - \partial(\lambda)m$, pour tout $\lambda \in K(x)$ et $m \in M_{K(x)}$. Un automorphisme $\varphi \in Gl(M_{K(x)})$ agit sur $F(M_{K(x)})$ dans la base $(\underline{e}, \partial\underline{e})$ via : $\varphi(\underline{e}, \partial(\underline{e})) = (\underline{e}, \partial\underline{e})\left(\begin{smallmatrix} \Phi & \partial(\Phi) \\ 0 & \Phi \end{smallmatrix}\right)$.

Définition 1. On appelle *groupe de Galois générique* (*algébrique*) (*resp. générique différentiel*) *de* $\mathcal{M}_{K(x)}$ le sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)})$: φ stabilise tout sous-espace Σ_q-stable dans chaque objet de $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})\}$ (resp. différentiel[1] $Gal^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)})$: φ stabilise tout sous-espace Σ_q-stable dans chaque objet de $Constr^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})\}$) de $Gl(M_{K(x)})$.

La noetherianité de $Gl(M_{K(x)})$ et le théorème de Ritt–Raudenbush [7, Thm. 7.1] impliquent :

Proposition 2. *Il existe un sous-corps $K' \subset K$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que*

$$Gal(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) \quad \big(\textit{resp. } Gal^{\partial}(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})\big).$$

D'après le théorème de Chevalley (resp. son analogue différentiel [10]) tout sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ s'écrit comme le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ contenue dans $\mathcal{W}_{K(x)}$ dans $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Constr^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})$).

3. Conjecture de Grothendieck–Katz pour les modules aux *q*-différences

Nous pouvons donner l'énoncé informel suivant, dont nous expliquerons la signification plus loin :

Théorème 3. *Soient K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini, $q \in K \setminus \{0,1\}$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q-différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})$) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient un ensemble non vide et cofini de courbures.*

L'énoncé précédent résume de façon un peu informelle trois énoncés similaires. Les trois cas dépendent de la nature de q :

(1) *q est une racine de l'unité.* Dans ce cas, il n'y a qu'une courbure à prendre en compte :

Théorème 4 *(Cf. [6] dans le cas du groupe de Galois usuel). Soient K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini, q une racine de l'unité d'ordre $\kappa > 1$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q-différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^{\partial}(\mathcal{M}_{K(x)})$) est la clôture de Zariski (resp. la clôture de Kolchin) de $\{\Sigma_q^{\kappa}\}$ dans $Gl(M_{K(x)})$.*

(2) *q est transcendant sur $\mathbb{Q}$.* Si q est transcendant sur $\mathbb{Q}$, il existe un corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$ tel que q est transcendant sur k et K est une extension algébrique de $k(q)$. Nous appellons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers de K. Nous appellerons *cyclotomiques* les valuations v de K, pour lesquelles l'image de q dans le corps résiduel est une racine de l'unité q_v, disons d'ordre κ_v. Soit ϕ_v le polynôme minimal de q_v sur k. Dans ce cadre, le Théorème 3 se traduit par :

[1] *I.e.* défini par une famille de polynomes différentiels.

Théorème 5. *(Voir [2, Thm. 4.5 and 5.11].) Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϕ_v, pour presque toute place cyclotomique v.*

Cet énoncé nécessite encore des explications. Notons qu'il existe une algèbre $\mathcal{A}$, munie d'une action de σ_q, de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_K[x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \ldots]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, et un $\mathcal{A}$-réseau M de $M_{K(x)}$ stable par Σ_q. Le $\mathcal{A}$-réseau M induit un $\mathcal{A}$-réseau V sur tout module aux q-différences $\mathcal{V}_{K(x)}$ contenu dans une construction différentielle de $\mathcal{M}_{K(x)}$. Alors, le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$-stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$.

(3) *q est algébrique, mais pas une racine de l'unité.* Soit Q la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K et $\mathcal{O}_Q$ son anneau des entiers. Pour presque toute place finie v de Q, la réduction de q modulo v est une racine de l'unité d'ordre κ_v. Pour chaque v, on fixe un uniformisant v-adique et une puissance entière ϕ_v de cet uniformisant, telle que $\varpi_v^{-1}(1 - q^{\kappa_v})$ soit un entier inversible de $\mathcal{O}_Q$. Nous avons donc :

Théorème 6. *(Voir [1, Thm. 10.2.1] pour un groupe de Galois générique algébrique, si K est un corps de nombres, et [2, Thm. 8.8] sinon.) Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϖ_v, pour presque toute place finie v de Q.*

L'énoncé précédent a exactement la même signification que le Théorème 5 en termes de droites stabilisées par les groupes de Galois génériques. Notamment, il existe une base de transcendance $\underline{a}$ de K/Q, un élément primitif b de $K/Q(\underline{a})$ et une algèbre de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Q[\underline{a}, b, x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \ldots]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_Q[\underline{a}, b, x]$, tels qu'il existe un $\mathcal{A}$-réseau Σ_q-stable M de $M_{K(x)}$ qui induit, comme dans le cas précédent des $\mathcal{A}$-réseaux sur les sous-modules des constructions de $M_{K(x)}$. Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est ainsi le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$-stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$.

Les théorèmes précédents se déduisent, suivant l'idée de [8], du Théorème de Chevalley (et de son analogue différentiel [10]) et du critère suivant :

Théorème 7. *(Voir [1, Thm. 7.1.1], [2, Thms. 3.1 et 8.1].) Le module aux q-différences $\mathcal{M}_{K(x)}$ est banal (i.e. il est isomorphe à $K(x)^\nu$ avec l'action de σ_q définie composante par composante) si et seulement s'il existe un ensemble non vide et cofini de courbures égales à l'identité.*

Cela signifie que Σ_q^{κ} est l'identité, dans le premier cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$ pour presque toute place cyclotomique v dans le deuxième cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ pour presque toute place finie v de Q dans le troisième cas.

4. Application aux *D*-groupoïdes de Malgrange–Granier

Considérons maintenant un système aux q-différences linéaire (*) $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $A(x) \in Gl_\nu(\mathbb{C}(x))$. Soient $A_k(x) := A(q^{k-1}x) \ldots A(qx)A(x)$, pour $k \in \mathbb{Z}_{>0}$; $A_0(x) = Id_\nu$; $A_k(x) := A(q^k x)^{-1} A(q^{k+1}x)^{-1} \ldots A(q^{-1}x)^{-1}$, pour $k \in \mathbb{Z}_{<0}$. Nous allons noter $\mathcal{M}^{(A)}$ le module aux q-différences associé a ce système, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathbb{C}(x)^\nu$ muni de la bijection σ_q-semilinéaire $\Sigma_q : \mathbb{C}(x)^\nu \to \mathbb{C}(x)^\nu$, $\Sigma_q(X) = A(x)^{-1} X^{\sigma_q}$. Pour la définition du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ de $(*)$ et pour la définition de D-groupoïde tout court, nous nous référons à [4]. On note $M = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^\nu$ et $J^*(M, M)$ l'espace des jets inversibles de M. Soit $Dyn(A(x)) = \{(x, X) \mapsto (q^k x, A_k(x)X) \colon k \in \mathbb{Z}\} \subset Aut(M)$ la dynamique du système $(*)$.

Nous considérons d'abord la plus petite sous-variété différentielle $\mathcal{K}ol(A)$ de $Gl_{\nu+1}(\mathbb{C}(x))$, contenant $\{diag(q^k, A_k(x)) := \begin{pmatrix} q^k & 0 \\ 0 & A_k(x) \end{pmatrix} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ et telle que si $diag(\alpha, \beta(x)), diag(\gamma, \delta(x))$ appartiennent à $\mathcal{K}ol(A)$ alors $diag(\alpha\gamma, \delta(x)\beta(\gamma x))$ appartient à $\mathcal{K}ol(A)$, et son idéal $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ dans l'algèbre différentielle $\mathbb{C}(x)\{T, \det T^{-1}\}_\partial$, avec $T = (T_{i,j})_{i,j=0,\ldots,\nu}$. Nous appellerons $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ le D-groupoïde engendré au sens de [9, Thm. 4.4.1] par $\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial X^2}, \frac{\partial \overline{X}}{\partial X} X - \overline{X}, \frac{\partial^2 \overline{X}}{\partial X^2} \rangle$ (*cf.* [4, Thm. 2.2]) et l'image par τ de $I_{\mathcal{K}ol(A)}$:

$$\tau : \mathbb{C}(x)\left\{T, \frac{1}{\det T}\right\}_{\partial_x} \to H^0(M \times_{\mathbb{C}} M, \mathcal{O}_{J^*(M,M)}),$$

$$(T_{i,j})_{i,j=0,\ldots,\nu} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial X_j}\right)_j \\ \left(\frac{\partial \overline{X_i}}{\partial x}\right)_j & \left(\frac{\partial \overline{X_i}}{\partial X_j}\right)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Les déclinaisons, selon la nature de q, du Théorème 3 permettent de montrer l'égalité entre l'idéal de définition de $Gal^{\partial}(\mathcal{M}^{(A)})$ et l'idéal différentiel engendré par $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ et $T_{0,0} - 1$. On obtient ainsi l'analogue aux q-différences de [9, Cor. 5.3.6].

Théorème 8. *(Voir [2, §9].) Les D-groupoïdes $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ ont les mêmes solutions, i.e. des diffeomorphismes obtenus de la façon suivante :*

$$(x, X) \mapsto \big(\alpha x, \beta(x)X\big), \quad \textit{avec } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{pmatrix} \textit{ solutions de } I_{\mathcal{K}ol(A)}.$$

Les solutions des D-groupoïdes $\widetilde{\mathcal{G}al(A)}$ et $\widetilde{\mathcal{G}al^{alg}}(A)$, intersections respectives de $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ avec le D-groupoïde engendré par $\langle x - \bar{x}\rangle$, sont les difféomorphismes construits de la façon suivante :

$$(x, X) \mapsto \big(x, \beta(x)X\big), \quad \textit{avec } \beta(x) \textit{ solution des équations différentielles définissant } Gal^{\partial}\big(\mathcal{M}^{(A)}\big).$$

Le théorème précédent généralise un résultat analogue de A. Granier établi pour les systèmes aux q-différences $Y(qx) = AY(x)$, avec $A \in Gl_{\nu}(\mathbb{C})$ et $q \in \mathbb{C}$, avec $|q| \neq 1$. Dans [2, Cor. 6.15], on compare le groupe générique différentiel d'un module aux q-différences avec le groupe différentiel de Hardouin–Singer qui, dans le cas d'un système à coefficients constants, coïncide avec le groupe de Galois usuel.

Références

[1] L. Di Vizio, Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck–Katz's conjecture on p-curvatures, Inventiones Mathematicae 150 (3) (2002) 517–578, arXiv:math.NT/0104178.

[2] L. Di Vizio, C. Hardouin, Algebraic and differential generic galois groups for q-difference equations, followed by the appendix 'The Galois D-groupoid of a q-difference system' by Anne Granier, arXiv:1002.4839, soumis pour publication.

[3] A. Granier, A local D-groupoid for fuchsian q-difference equations, 2009, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[4] A. Granier, Un D-groupoïde de galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens, Comptes Rendus Mathématique 348 (5–6) (2010) 263–265.

[5] C. Hardouin, M.F. Singer, Differential Galois theory of linear difference equations, Mathematische Annalen 342 (2) (2008) 333–377.

[6] P. Hendriks, Algebraic aspects of linear differential and difference equations, Ph.D. thesis, University of Groningen, 1996.

[7] I. Kaplansky, An Introduction to Differential Algebra, Hermann, Paris, 1957.

[8] N.M. Katz, A conjecture in the arithmetic theory of differential equations, Bulletin de la Société Mathématique de France 110 (2) (1982) 203–239.

[9] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, in: Essays on Geometry and Related Topics, vols. 1, 2, in: Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, pp. 465–501.

[10] A. Minchenko, A. Ovchinnikov, Zariski closures of reductive linear differential algebraic groups, arXiv:1005.0042.

[11] A. Peón Nieto, On sigmadelta-picard-vessiot extensions, Communications in Algebra (2009), in press.