C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 927–929

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique/Économie mathématique

Tests portmanteau multivariés d'adéquation de modèles VARMA faibles

Multivariate portmanteau tests of the adequacy of weak VARMA models

Yacouba Boubacar Mainassara

Université Lille III, EQUIPPE, BP 60 149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 22 avril 2010
Accepté après révision le 19 juillet 2010
Disponible sur Internet le 29 juillet 2010

Présenté par Paul Deheuvels

R É S U M É

Dans cette Note, nous considérons les tests portmanteau, aussi appelés tests d'autocorrélation, pour tester l'adéquation de modèles ARMA multivarié (VARMA) avec innovations linéaires non corrélées mais non nécessairement indépendantes (i.e. VARMA faibles). Nous relâchons l'hypothèse standard d'indépendance pour étendre le champ d'application des modèles VARMA, ceci permettra aussi de couvrir une large classe de processus non linéaires. Dans un premier temps, nous étudions la distribution asymptotique jointe de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (QMV) et des autocovariances empiriques du bruit. Ceci nous permet ensuite d'obtenir les distributions asymptotiques des autocovariances et autocorrelations résiduelles. Enfin, nous en déduisons le comportement asymptotique des statistiques portmanteau de Ljung–Box (ou Box–Pierce) de modèles VARMA faibles. Nous proposons une méthode pour ajuster les valeurs critiques de ces tests.

A B S T R A C T

In this Note, we consider portmanteau tests for testing the adequacy of vector autoregressive moving-average (VARMA) models under the assumption that the errors are uncorrelated but not necessarily independent. We relax the standard independence assumption to extend the range of application of the VARMA models, allowing us to treat linear representations of general nonlinear processes. We first study the joint distribution of the quasi-maximum likelihood estimator (QMLE) and the noise empirical autocovariances. We thus obtain the asymptotic distribution of residual empirical autocovariances and autocorrelations under weak assumptions on the noise. We deduce the asymptotic distribution of the Ljung–Box (or Box–Pierce) portmanteau statistics for VARMA models with nonindependent innovations. We propose a method to adjust the critical values of the portmanteau tests.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Le test portmanteau a été introduit par Box et Pierce [2] (noté **BP** dans la suite) afin de mesurer la qualité d'ajustement d'un modèle ARMA fort univarié. Ce test a été étendu au cas de modèles VARMA par Chitturi [3]. Comme dans le cas univarié, ce test est basé sur les résidus $\hat{\epsilon}_t$ résultant de l'estimation des paramètres du modèle (1). Hosking [6] a proposé plusieurs

Adresse e-mail : yacouba.boubacarmainassara@univ-lille3.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.017

formes équivalentes à la statistique de **BP** dont la plus basique est la suivante $P_m = n\sum_{h=1}^{m}\mathrm{Tr}(\hat\Gamma_\epsilon'(h)\hat\Gamma_\epsilon^{-1}(0)\hat\Gamma_\epsilon(h)\hat\Gamma_\epsilon^{-1}(0))$, où $\hat\Gamma_\epsilon$ est la fonction d'autocovariance résiduelle définie dans la section 2. La forme compliquée de la statistiques P_m est due au fait qu'elle s'applique à des séries multivariées. Dans cette Note, nous étudierons le comportement asymptotique du test portmanteau dans le cadre de modèles VARMA dont les termes d'erreur sont non corrélés mais peuvent contenir des dépendances non linéaires. Ainsi nous introduisons les coefficients de mélange fort d'un processus vectoriel $Z=(Z_t)$ définis par $\alpha_Z(h)=\sup_{A\in\sigma(Z_u:u\leqslant t),B\in\sigma(Z_u:u\geqslant t+h)}|P(A\cap B)-P(A)P(B)|$. Soit $X_t=(X_{1t},\dots,X_{dt})'$ un processus stationnaire au second ordre, vérifiant

$$A_{00}X_t-\sum_{i=1}^{p_0}A_{0i}X_{t-i}=B_{00}\epsilon_t-\sum_{j=1}^{q_0}B_{0i}\epsilon_{t-j},\quad \forall t\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

où le terme d'erreur $\epsilon_t=(\epsilon_{1t},\dots,\epsilon_{dt})'$ est un bruit blanc faible, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires centrées ($E\epsilon_t=0$), non corrélées, avec une matrice de covariance non singulière Σ_0. Pour l'estimation des paramètres du modèle (1), nous utiliserons la paramétrisation ainsi que la méthode du QMV définies dans Boubacar Mainassara et Francq [1], noté BMF dans la suite. Ces auteurs ont établi la convergence forte et la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat\theta_n$ du QMV, sous les hypothèses essentielles d'ergodicité et de mélange suivantes : **A1 :** Le processus (ϵ_t) est stationnaire et ergodique ; **A2 :** Il existe un réel $\nu>0$ tel que $E\|\epsilon_t\|^{4+2\nu}<\infty$ et les coefficients de mélange du processus (ϵ_t) vérifient $\sum_{k=0}^{\infty}\{\alpha_\epsilon(k)\}^{\frac{\nu}{2+\nu}}<\infty$. Soit les polynômes $A_\theta(z)=A_0-\sum_{i=1}^{p_0}A_iz^i$ et $B_\theta(z)=B_0-\sum_{i=1}^{q_0}B_iz^i$. Nous ferons également les hypothèses **A3 :** $\det A(z)\det B(z)=0\Rightarrow|z|>1$; **A4 :** pour tout $\theta\in\Theta$ tel que $\theta\neq\theta_0$, soit les fonctions de transfert $A_0^{-1}B_0B_\theta^{-1}(z)A_\theta(z)\neq A_{00}^{-1}B_{00}B_{\theta_0}^{-1}(z)A_{\theta_0}(z)$ pour un $z\in\mathbb{C}$ ou alors $A_0^{-1}B_0\Sigma B_0'A_0^{-1'}\neq A_{00}^{-1}B_{00}\Sigma_0B_{00}'A_{00}^{-1'}$; **A5 :** Nous avons $\theta_0\in\overset{\circ}{\Theta}$, où $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur du sous espace compact Θ de l'espace des paramètres.

2. Comportement asymptotique

Définissons les fonctions d'autocovariances empiriques du bruit et résiduelles $\gamma(h)=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\epsilon_t\epsilon_{t-h}'$ et $\hat\Gamma_\epsilon(h)=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\hat\epsilon_t\hat\epsilon_{t-h}'$ pour $0\leqslant h<n$. Nous considérons des vecteurs des $m\geqslant1$ premières autocovariances empiriques $\gamma_m=(\{\mathrm{vec}\,\gamma(1)\}',\dots,\{\mathrm{vec}\,\gamma(m)\}')'$. Soit $\Gamma(\ell,\ell')=\sum_{h=-\infty}^{\infty}E(\{\epsilon_{t-\ell}\otimes\epsilon_t\}\{\epsilon_{t-h-\ell'}\otimes\epsilon_{t-h}\}')$, pour $(\ell,\ell')\neq(0,0)$. Posons $Y_n=-2n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\partial\epsilon_t'(\theta_0)/\partial\theta\,\Sigma_{00}^{-1}\epsilon_t(\theta_0)$, où $\Sigma_{00}=A_{00}^{-1}B_{00}\Sigma_0B_{00}'A_{00}^{-1'}$. Le Théorème suivant, qui est une extension directe du résultat donné dans Francq, Roy et Zakoïan [4], donne la distribution asymptotique jointe de $\hat\theta_n$ et γ_m :

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* **A1–A5**, *quand* $n\to\infty$, *nous avons* $\sqrt{n}(\gamma_m,\hat\theta_n-\theta_0)'\overset{d}{\Rightarrow}\mathcal{N}(0,\Xi)$ *où* $\Xi=\begin{pmatrix}\Sigma_{\gamma_m} & \Sigma_{\gamma_m,\hat\theta_n}\\ \Sigma_{\gamma_m,\hat\theta_n}' & \Sigma_{\hat\theta_n}\end{pmatrix}$, *avec* $\Sigma_{\gamma_m}=\{\Gamma(\ell,\ell')\}_{1\leqslant\ell,\ell'\leqslant m}$, $\Sigma_{\gamma_m,\hat\theta_n}'=\mathrm{Cov}_{as}(\sqrt{n}J^{-1}Y_n,\sqrt{n}\gamma_m)$ *et* $\Sigma_{\hat\theta_n}=J^{-1}IJ^{-1}$, *où* $\Sigma_{\hat\theta_n}$ *est la variance asymptotique de* $\hat\theta_n$ *définie dans BMF* [1].

Soit $\hat S_\epsilon=\mathrm{diag}(\hat\sigma_\epsilon(1),\dots,\hat\sigma_\epsilon(d))$, où $\hat\sigma_\epsilon(i)=\sqrt{n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat\epsilon_{it}^2}$. Définissons les autocorrélations résiduelles de retard ℓ par $\hat R_\epsilon(\ell)=\hat S_\epsilon^{-1}\hat\Gamma_\epsilon(\ell)\hat S_\epsilon^{-1}$. Nous considérons des vecteurs des $m\geqslant1$ premières autocorrélations résiduelles $\hat\rho_m=(\{\mathrm{vec}\,\hat R_\epsilon(1)\}',\dots,\{\mathrm{vec}\,\hat R_\epsilon(m)\}')'$. Soit la matrice $\Phi_m=E\{(\epsilon_{t-1}',\dots,\epsilon_{t-m}')'\otimes\partial\epsilon_t(\theta_0)/\partial\theta'\}$. Le résultat suivant donne le comportement asymptotique des autocorrélations résiduelles :

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *nous avons*

$$\sqrt{n}\hat\rho_m\Rightarrow\mathcal{N}(0,\Sigma_{\hat\rho_m}),\quad \text{où } \Sigma_{\hat\rho_m}=\{I_m\otimes(S_\epsilon\otimes S_\epsilon)^{-1}\}\Sigma_{\hat\Gamma_m}\{I_m\otimes(S_\epsilon\otimes S_\epsilon)^{-1}\},$$

avec $\Sigma_{\hat\Gamma_m}=\Sigma_{\gamma_m}+\Phi_m\Sigma_{\hat\theta_n}\Phi_m'+\Phi_m\Sigma_{\hat\theta_n,\gamma_m}+\Sigma_{\hat\theta_n,\gamma_m}'\Phi_m'$.

Nous en déduisons la loi asymptotique exacte de la statistique P_m.

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.2, *la statistique* P_m *converge en loi, quand* $n\to\infty$, *vers* $Z_m(\xi_m)=\sum_{i=1}^{d^2m}\xi_{i,d^2m}Z_i^2$ *où* $\xi_m=(\xi_{1,d^2m},\dots,\xi_{d^2m,d^2m})'$ *est le vecteur des valeurs propres de la matrice*

$$\Omega_m=\left(I_m\otimes\Sigma_\epsilon^{-1/2}\otimes\Sigma_\epsilon^{-1/2}\right)\Sigma_{\hat\Gamma_m}\left(I_m\otimes\Sigma_\epsilon^{-1/2}\otimes\Sigma_\epsilon^{-1/2}\right),$$

où $\Sigma_\epsilon=A_0^{-1}B_0\Sigma B_0'A_0^{-1'}$ *et les* $Z_1,\dots,Z_{d^2m}$ *sont des variables indépendantes, centrées et réduites normalement distribuées.*

Ainsi quand le processus d'erreurs est un bruit blanc faible, la distribution asymptotique de la statistique P_m est une somme pondérée de chi-deux. Cette distribution peut être très différente de l'approximation chi-deux usuelle du cas fort.

Soit $\hat{\Omega}_m$ la matrice obtenu en remplaçant Ξ par son estimateur $\hat{\Xi}$ et Σ_ϵ par $\hat{\Sigma}_\epsilon$ dans la matrice Ω_m. Nous définissons $\hat{\xi}_m = (\hat{\xi}_{1,d^2m}, \dots, \hat{\xi}_{d^2m,d^2m})'$ le vecteur des valeurs propres de $\hat{\Omega}_m$. Pour un niveau asymptotique de risque α, le test de **BP** que nous proposons consiste à rejeter l'hypothèse d'adéquation de modèles VARMA(p_0, q_0) faibles quand la p-valeur $P(Z_m(\hat{\xi}_m) > P_m)$ est inférieure à α. Dans la pratique, cette p-valeur est évaluée en utilisant l'algorithme de Imhof [7]. Notons que ces résultats sont aussi valides pour la version modifié de la statistique du test portmanteau de Ljung et Box étendu par Hosking [5].

Références

[1] Y. Boubacar Mainassara, C. Francq, Estimating structural VARMA models with uncorrelated but non-independent error terms, Working papers, http://perso.univ-lille3.fr/~cfrancq/pub.html, 2009.

[2] G.E.P. Box, D.A. Pierce, Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models, Journal of the American Statistical Association 65 (1970) 1509–1526.

[3] R.V. Chitturi, Distribution of residual autocorrelations in multiple autoregressive schemes, Journal of the American Statistical Association 69 (1974) 928–934.

[4] C. Francq, R. Roy, J.-M. Zakoïan, Diagnostic checking in ARMA models with uncorrelated errors, Journal of the American Statistical Association 100 (2005) 532–544.

[5] J.R.M. Hosking, The multivariate portmanteau statistic, Journal of the American Statistical Association 75 (1980) 602–608.

[6] J.R.M. Hosking, Equivalent forms of the multivariate portmanteau statistic, Journal of the Royal Statistical Society B 43 (1981) 261–262.

[7] J.P. Imhof, Computing the distribution of quadratic forms in normal variables, Biometrika 48 (1961) 419–426.