C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 911–913

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique/Géométrie analytique

Un théorème de Torelli infinitésimal à coefficients

An infinitesimal Torelli theorem with twisted coefficients

Damien Mégy

Institut Fourier, 100, rue des maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 3 juin 2010
Accepté après révision le 12 juillet 2010
Disponible sur Internet le 1er août 2010

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

On généralise un théorème de Torelli infinitésimal pour des hypersurfaces de haut degré de M. Green (1985) [1] dans le cas de coefficients tordus.

ABSTRACT

We generalize an infinitesimal Torelli theorem for hypersurfaces of high degree of M. Green (1985) [1], for twisted coefficients.
© 2010 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Soit Y une variété complexe projective lisse de dimension $n+1$, plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}$, linéairement normale. On note L le fibré $\mathcal{O}_Y(1)$, $\mathbb{P}^\vee$ l'espace projectif dual de $\mathbb{P}$, et $\mathfrak{Y} := \{(y, H) \in Y \times \mathbb{P}^\vee, y \in H\}$ la section hyperplane universelle de Y, munie des projections π et a vers $\mathbb{P}^\vee$ et Y.

Soit $\mathbb{W}$ une variation de structure de Hodge complexe polarisée (VSH) de poids w sur Y, avec $W^{w,0} \neq 0$. On note $\mathbb{V}$ la VSH sur l'ouvert des valeurs régulières de π définie par $\mathbb{V} = R^n\pi_*(a^*\mathbb{W})$.

Théorème 1. *Si L est suffisamment ample, l'application des périodes de $\mathbb{V}$ a un rang supérieur ou égal à celui de l'application de Kodaira–Spencer de la famille de sections hyperplanes.*

Remarquons que si de plus $H^0(X, T_X) = 0$, alors l'application de Kodaira–Spencer est injective.

Lorsque $\mathbb{W} = \underline{\mathbb{C}}_Y$, la dérivée de l'application des périodes se factorise par l'application de Kodaira–Spencer de la famille d'hypersurfaces, et le second facteur est un morphisme de cup-produit par la classe de Kodaira–Spencer [2]. Ce morphisme est injectif par le théorème de Torelli infinitésimal de M. Green [1], theorem 0.1, p. 135, si L est suffisamment ample, ce dernier résultat étant une généralisation du théorème de Torelli infinitésimal de Griffiths [3] pour les hypersurfaces de degré $\geqslant n+2$ de $\mathbb{P}^{n+1}$.

Le théorème 1 découle des deux résultats suivants, qui utilisent des notations indépendantes :

Proposition 2. *Soit $\pi : X \to S$ un morphisme projectif lisse entre variétés complexes, de dimension relative n. Si $s \in S$, on note X_s la fibre de π au-dessus de s, et ρ_s l'application de Kodaira–Spencer en s. Soit $\mathbb{W}$ une VSH complexe polarisée de poids w sur X, $\mathbb{V} = R^n\pi_*\mathbb{W}$, qui est une VSH de poids $n+w$ sur S, et $V^{p,q}$ les fibrés de Hodge de $\mathbb{V}$. Soit enfin $\mathcal{P}^{n+w}$ la dernière composante de l'application des périodes de $\mathbb{V}$, qui à un point $s \in S$ associe $V_s^{n+w,0} \subset V_s$. Alors, il existe un diagramme commutatif*

Adresse e-mail : damien.megy@ujf-grenoble.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.013

$$\begin{tikzcd} T_{S,s} \arrow[r, "d\mathcal{P}^{n+w}"] \arrow[d, "\rho_s"'] & \mathrm{Hom}(V_s^{n+w,0}, V_s^{n+w-1,1}) \arrow[d] \\ H^1(X_s, T_{X_s}) \arrow[r, "\alpha \mapsto \alpha \cup -"] & \mathrm{Hom}(H^0(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}), H^1(X_s, \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0})) \end{tikzcd}$$

Proposition 3. *Soit Y une variété projective lisse de dimension $n+1>2$, F un fibré vectoriel holomorphe sur Y, L un fibré en droites holomorphe très ample sur Y. Quitte à remplacer L par $L^{\otimes k}$, pour toute section globale s de L dont le lieu d'annulation $Z \subset Y$ est lisse, le morphisme de cup-produit*

$$H^1(Z, T_Z) \to H^0(Z, K_Z \otimes F)^* \otimes H^1\big(Z, \Omega^{n-1}_Z \otimes F\big)$$

est injectif.

Cette dernière proposition est une version légèrement plus générale de [1], theorem 0.1, et se démontre de manière similaire. Nous donnons ici une preuve de la proposition 2.

Démonstration de la proposition 2. Commençons par construire la flèche

$$\mathrm{Hom}\big(V_s^{n+w,0}, V_s^{n+w-1,1}\big) \to \mathrm{Hom}\big(H^0\big(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}\big), H^1\big(X_0, \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0}\big)\big).$$

Soit W le fibré différentiable sous-jacent à $\mathbb{W}$. Écrivons sa connexion plate D sous la forme $D = \underbrace{\partial + \bar\theta}_{D'} + \underbrace{\bar\partial + \theta}_{D''}$, avec les notations de [4] :

$$\begin{aligned} &\partial\big(\mathcal{A}^{r,s}\big(W^{p,q}\big)\big) \subset \mathcal{A}^{r+1,s}\big(W^{p,q}\big),\\ &\bar\partial\big(\mathcal{A}^{r,s}\big(W^{p,q}\big)\big) \subset \mathcal{A}^{r,s+1}\big(W^{p,q}\big),\\ &\theta\big(\mathcal{A}^{r,s}\big(W^{p,q}\big)\big) \subset \mathcal{A}^{r+1,s}\big(W^{p-1,q+1}\big),\\ &\bar\theta\big(\mathcal{A}^{r,s}\big(W^{p,q}\big)\big) \subset \mathcal{A}^{r,s+1}\big(W^{p+1,q-1}\big). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}(W)^{P,Q} = \bigoplus_{p+r=P, s+q=Q} \mathcal{A}^{r,s}(W^{p,q})$. Alors D' est de type $(1,0)$ et D'' de type $(0,1)$. De plus, on a $D''^2 = 0$.

On peut définir la même bigraduation sur X_s, par restriction. Soit $K^\bullet_{P,Q}$ le complexe $K^i_{P,Q} = \mathcal{A}_{X_s}(W)^{P,Q-n+i}$, muni de la différentielle D''. Deligne a montré (voir [5]) que $H^n(X_s, \mathbb{W})$ admet une structure de Hodge

$$H^n(X_s, \mathbb{W}) = \bigoplus_{P+Q=n+w} H^n(X_s, \mathbb{W})^{P,Q},$$

avec

$$H^n(X_s, \mathbb{W})^{P,Q} := \mathbb{H}^n\big(X_s, K^\bullet_{P,Q}\big).$$

De plus, le complexe $K^\bullet_{n+w,0}[n]$ coïncide avec la résolution de Dolbeault de $\Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}$, donc on a un isomorphisme

$$V_s^{n+w,0} := H^n(X_s, \mathbb{W})^{n+w,0} \simeq H^0\big(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}\big). \tag{1}$$

Enfin, le morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0} \arrow[d, "D''=\bar\partial+\theta"] & \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0} \arrow[d, "\bar\partial"] \\ \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w-1,1} \oplus \mathcal{A}^{n-1,1}_{X_s} \otimes W^{w,0} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial+\theta"] & \mathcal{A}^{n-1,1}_{X_s} \otimes W^{w,0} \arrow[d, "\bar\partial"] \\ \mathcal{A}^{n,1}_{X_s} \otimes W^{w-1,1} \oplus \mathcal{A}^{n-1,2}_{X_s} \otimes W^{w,0} & \mathcal{A}^{n-1,2}_{X_s} \otimes W^{w,0} \end{tikzcd}$$

donne en hypercohomologie un morphisme

$$V_s^{n+w-1,1} := H^n(X_s, \mathbb{W})^{n+w-1,1} \quad\to\quad \mathbb{H}^n\big(X_s, \mathcal{A}^{n-1,\bullet}\big(W^{w,0}\big)[1-n]\big) \simeq H^1\big(X_s, \Omega^{n-1} \otimes W^{w,0}\big). \tag{2}$$

Les morphismes (1) et (2) donnent par composition une flèche

$$\mathrm{Hom}\big(V_s^{n+w,0}, V_s^{n+w-1,1}\big) \to \mathrm{Hom}\big(H^0\big(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}\big), H^1\big(X_s, \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0}\big)\big).$$

En composant à droite par $d\mathcal{P}^{n+w}$, on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_{S,s} \arrow[r, "d\mathcal{P}_s^{n+w}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathrm{Hom}(V_s^{n+w,0}, V_s^{n+w-1,1}) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}(H^0(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}), H^1(X_s, \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0})). \end{tikzcd}$$

Montrons que ce diagramme se complète en

$$\begin{tikzcd} T_{S,s} \arrow[r, "d\mathcal{P}^{n+w}"] \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[d, "\rho_s"'] & \mathrm{Hom}(V_s^{n+w,0}, V_s^{n+w-1,1}) \arrow[d] \\ H^1(X_s, T_{X_s}) \arrow[r, "\alpha \mapsto \alpha \cup -"] & \mathrm{Hom}(H^0(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0}), H^1(X_0, \Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0})) \end{tikzcd}$$

Il s'agit donc de montrer que pour tout $u \in T_{S,s}$, l'endomorphisme $\Phi(u)$ est le cup-produit $\rho_s(u) \cup -$.

La preuve, qui repose sur un calcul explicite de dérivée de Lie, est essentiellement la même que celle de Griffiths [2] dans le cas classique. Soit $\sigma \in H^0(X_s, \Omega^n_{X_s} \otimes W^{w,0})$, $\tilde{u}$ un champ de vecteurs de type $(1,0)$ sur X défini au voisinage de X_s et tel que $\pi_* \tilde{u}|_{X_s} = u$, et $\tilde{\sigma}$ une n-forme sur X à valeurs dans $W^{w,0}$, définie au voisinage de X_s, dont la restriction aux fibres proches de X_s est D-fermée. On suppose aussi que la classe de la composante de type $(n+w,0)$ de $\tilde{\sigma}|_{X_s}$ est égale à σ. Alors, on a

$$d\mathcal{P}^{n+w}(u)(\sigma) = \big[\big(int(\tilde{u})(D\tilde{\sigma})|_{X_s}\big)^{n+w-1,1}\big].$$

La composition par $H^n(X_s, \mathbb{W})^{n+w-1,1} \to H^1(\Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0})$ consiste à projeter les représentants dans $\mathcal{A}^{n-1,1}_{X_s} \otimes W^{w,0}$ avant de prendre leur classe de Dolbeault classique (pour $\bar{\partial}$). En écrivant $D = \partial + \bar{\partial} + \theta + \bar{\theta}$, on voit que l'image de $[(int(\tilde{u})(D\tilde{\sigma})|_{X_s})^{n+w-1,1}]$ dans $H^1(\Omega^{n-1}_{X_s} \otimes W^{w,0})$ est pour des raisons de type $[int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_s}]$. Donc

$$\Phi(u)(\sigma) = \big[int(\tilde{u})\big(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0}\big)\big|_{X_s}\big].$$

Soit $int(\bar{\partial}\tilde{u})(-)$ l'opérateur qui combine le produit extérieur pour la partie covariante et la contraction pour la partie contravariante. En dérivant terme à terme, on obtient

$$\bar{\partial}\big(int(v)\big(\tilde{\sigma}^{n+w,0}\big)\big) = int(\bar{\partial}\tilde{u})\big(\tilde{\sigma}^{n+w,0}\big) - int(\tilde{u})\big(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0}\big).$$

Ceci implique l'égalité de classes de Dolbeault $[int(\tilde{u})(\bar{\partial}\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_s}] = [int(\bar{\partial}\tilde{u})(\tilde{\sigma}^{n+w,0})|_{X_s}]$. Enfin, $\bar{\partial}\tilde{u}|_{X_s}$ est précisément un représentant de Dolbeault de la classe de Kodaira–Spencer $\rho_s(u)$ du vecteur u. On a donc :

$$\Phi(u)(\sigma) = \big[int(\bar{\partial}\tilde{u}|_{X_s})\big(\tilde{\sigma}|^{n+w,0}_{X_s}\big)\big] = \rho_s(u) \cup \big[\tilde{\sigma}|^{n+w,0}_{X_s}\big] = \rho_s(u) \cup \sigma.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

Remerciements

Je remercie Philippe Eyssidieux, ainsi que le rapporteur, pour m'avoir aidé à améliorer cette Note.

Références

[1] M. Green, The period map for hypersurface sections of high degre of an arbitrary variety, Compos. Math. 55 (2) (1985) 135–156.
[2] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds, II. Local study of the period mapping, Amer. J. Math. 90 (1968) 805–865.
[3] P. Griffiths, On the periods of certain rational integrals, I, Ann. of Math. 90 (1969) 460–495.
[4] C. Simpson, Higgs bundles and local systems, Publ. Math. IHES 75 (1992) 5–95.
[5] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients: L^2-cohomology in the Poincaré metric, Ann. of Math. 109 (1979) 415–476.