C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 739–742

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbres de Lie

« Trivialité » du problème de Kashiwara–Vergne pour les algèbres de Lie résolubles

“Triviality” of the Kashiwara-Vergne problem for solvable Lie algebras

François Rouvière

Laboratoire Dieudonné, université de Nice, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 17 avril 2010
Accepté le 25 juin 2010
Disponible sur Internet le 14 juillet 2010

Présenté par Michèle Vergne

RÉSUMÉ

Une note récente d'Alekseev et Torossian (2009) [4] donne une solution algébrique simple du problème de Kashiwara–Vergne pour les algèbres de Lie quadratiques. Nous montrons ici que leur méthode conduit aussi à une solution simple pour les algèbres de Lie résolubles.

ABSTRACT

In a recent note Alekseev and Torossian (2009) [4] give a simple algebraic solution of the Kashiwara–Vergne problem for quadratic Lie algebras. Their method also leads to a simple solution for solvable Lie algebras, as shown here.

1. Introduction

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et $Z(X,Y) = \log(\exp X \exp Y)$ pour X, Y voisins de l'origine de $\mathfrak{g}$. Dans toute la suite on notera $x = \operatorname{ad} X$, $y = \operatorname{ad} Y$, $z = \operatorname{ad} Z(X,Y)$ les endomorphismes adjoints de $\mathfrak{g}$. Le *problème de Kashiwara–Vergne* [6] pour $\mathfrak{g}$ s'énonce ainsi : établir l'existence de séries de Lie F et G en (X,Y) (séries de crochets convergentes au voisinage de l'origine) vérifiant les identités (KV1) et (KV2) :

$$Z(Y,X) = X + Y - \left(1 - e^{-x}\right)F(X,Y) - \left(e^{y} - 1\right)G(X,Y), \tag{KV1}$$

$$\operatorname{tr}(x \circ \partial_X F + y \circ \partial_Y G) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{y}{e^y - 1} - \frac{z}{e^z - 1} - 1\right), \tag{KV2}$$

où $\partial_X F$ et $\partial_Y G$ sont définis par

$$\partial_X F(X,Y)V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(X + tV, Y)\bigg|_{t=0}, \qquad \partial_Y G(X,Y)V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(X, Y + tV)\bigg|_{t=0}$$

pour $V \in \mathfrak{g}$ et les traces sont celles d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$.

L'équation (KV1) peut se voir comme une écriture particulière de la formule de Campbell–Hausdorff. Dans [8] p. 561, équation (8), est explicité un couple (F,G) solution de (KV1), mais il n'y a évidemment pas unicité : on peut par exemple

Adresse e-mail : frou@unice.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.06.023

ajouter $\lambda Z(X,Y)+\mu X$ à $F(X,Y)$ et $\lambda Z(X,Y)+\nu Y$ à $G(X,Y)$, où λ,μ,ν sont des scalaires, sans altérer le second membre de (KV1). On renvoie à Burgunder [5] pour une étude détaillée de cette non-unicité.

L'article [6] révèle des conséquences remarquables de (KV1) et (KV2) pour l'analyse invariante sur un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{g}$: convolution des distributions centrales sur le groupe ramenée, via l'application exponentielle, à une convolution sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, isomorphisme de Duflo pour les opérateurs différentiels bi-invariants.

Rappelons brièvement que le problème de Kashiwara–Vergne a été résolu en 1978 dans l'article originel [6] pour les algèbres de Lie résolubles, par une construction assez complexe et mystérieuse de F et G. Ensuite, mis à part le cas élémentaire de l'algèbre $sl(2,\mathbb{R})$ [7], aucun progrès n'est intervenu jusqu'à la note [10] de M. Vergne en 1999, qui résout le problème pour les algèbres de Lie quadratiques (et notamment semi-simples). Le cas des algèbres de Lie quelconques n'a été complètement réglé qu'en 2006 par A. Alekseev et E. Meinrenken (voir [9] et les références de cet article). En 2008 A. Alekseev et C. Torossian [3] en ont donné une nouvelle preuve. Ces deux démonstrations font appel à de puissants outils extérieurs à la théorie de Lie proprement dite (quantification par déformation de Kontsevitch, resp. existence d'associateurs de Drinfeld).

Dans la note [4] Alekseev et Torossian, reprenant le formalisme algébrique développé dans [3], « trivialisent » le problème dans le cas quadratique : de leur Théorème 1 (ci-dessous) résulte que, dans ce cas, tout couple (F,G) solution de (KV1) vérifie aussi (KV2).

La présente Note établit un résultat de même type pour les algèbres de Lie résolubles, « trivialisant » ainsi le problème dans le cas considéré dans l'article de 1978. Plus précisément nous montrons, grâce à ce même Théorème 1, qu'à partir d'un couple quelconque (F_0,G_0) solution de (KV1) on peut, par une modification simple et quelques calculs élémentaires, obtenir un couple (F,G) solution de (KV1) et (KV2) dans le cas résoluble (Théorème 4). Ce résultat repose sur une étude de parité (Proposition 3) : le second membre de (KV2) étant fonction paire de (X,Y) le premier doit l'être aussi, ce qui motive notre construction de (F,G) pour les algèbres résolubles.

2. Un résultat d'Alekseev et Torossian

Pour X,Y donnés dans $\mathfrak{g}$ on note $\mathcal{A}$ l'algèbre des séries formelles en les variables (non commutatives) $x=\operatorname{ad}X$, $y=\operatorname{ad}Y$, et $\mathcal{I}$ l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par $xy-yx$. On note $\sim$ une égalité modulo $\mathcal{I}$ ou modulo le sous-espace $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\subset\mathcal{I}$, ce qui sera précisé à chaque fois. Soit enfin τ l'anti-involution de $\mathcal{A}$ définie par $\tau(x)=-x$, $\tau(y)=-y$.

Du Theorem 2.1 de [4] on déduit, en appliquant ad aux deux membres d'une égalité de « traces quadratiques », l'énoncé suivant (voir Remark 5.2 de [3]).

Théorème 1. *(Voir [4].) Soit (F,G) un couple de séries de Lie en (X,Y) vérifiant l'équation* (KV1)*. Il existe alors $a\in\mathcal{A}$ tel que, modulo $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$,*

$$x\circ\partial_X F+y\circ\partial_Y G\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^x-1}+\frac{y}{e^y-1}-\frac{z}{e^z-1}-1\right)+a-\tau(a). \tag{1}$$

Ce résultat s'obtient en exploitant habilement l'associativité $Z(Z(X,Y),V)=Z(X,Z(Y,V))$ dans la formule de Campbell–Hausdorff écrite sous la forme (KV1) et en montrant la nullité d'un certain groupe de cohomologie. La forme précise du second membre de (1) est établie en reprenant une méthode d'Alekseev et Petracci [2].

L'application aux algèbres de Lie quadratiques est immédiate : d'une part $\operatorname{tr}[\mathcal{A},\mathcal{A}]=0$ et (1) entraîne une égalité de traces, d'autre part $x=\operatorname{ad}X$ et $y=\operatorname{ad}Y$ sont antisymétriques par rapport à une forme quadratique non dégénérée, soit ${}^tx=-x$, ${}^ty=-y$, d'où ${}^ta=\tau(a)$ et $\operatorname{tr}(a-\tau(a))=0$. Par suite (KV2) est alors conséquence de (1).

3. Modification d'un couple solution

La résolution du problème de Kashiwara–Vergne pour les algèbres de Lie résolubles s'obtiendra en joignant au Théorème 1 la Proposition 3 ci-dessous (valable elle aussi pour toute algèbre de Lie). Étant donné un couple quelconque (F,G) solution de (KV1) on note

$$f=\left(1-e^{-x}\right)F,\qquad g=\left(e^y-1\right)G,\qquad A=f-g, \tag{2}$$

de sorte que (KV1) s'écrit

$$Z(Y,X)-X-Y=-f-g=A-2f=-A-2g. \tag{3}$$

En reprenant les calculs de [6] pp. 263–264 on peut exprimer le premier membre de (KV2) à l'aide de A.

Lemme 2. *Pour toute solution (F,G) de* (KV1) *on a, modulo $\mathcal{I}$,*

$$x\circ\partial_X F+y\circ\partial_Y G\sim\frac{x}{4}\coth\frac{x}{2}(\partial_X A+1)-\frac{y}{4}\coth\frac{y}{2}(\partial_Y A-1)-\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}+\operatorname{ad}\left(F+G+\frac{X-Y}{4}\right).$$

Preuve. D'abord $\partial_X(x^{n+1}F)=x^{n+1}\partial_X F-x^n\,\mathrm{ad}\,F-\sum_{k=1}^n x^{n-k}\,\mathrm{ad}(x^kF)$ pour tout $n\geqslant 0$ et le terme $\sum_{k=1}^n$ appartient à $\mathcal{I}$, d'où par sommation

$$\partial_X f=\partial_X\big(\big(1-e^{-x}\big)F\big)\sim\big(1-e^{-x}\big)\partial_X F-\frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{ad}\,F.$$

En multipliant par $x/(1-e^{-x})$ on obtient

$$x\partial_X F\sim\frac{x}{1-e^{-x}}\partial_X f+\mathrm{ad}\,F.$$

Notons $Z=Z(X,Y)$, $\overline{Z}=Z(Y,X)=e^{-x}Z$ pour abréger, d'où $z=\mathrm{ad}\,Z$, $\bar{z}=\mathrm{ad}\,\overline{Z}=e^{-x}ze^{x}$. Au second membre on remplace f, d'après (3), par $\frac{1}{2}(A-\overline{Z}+X+Y)$ et on utilise l'égalité (déduite de la différentielle de l'exponentielle)

$$\partial_X\overline{Z}=\frac{\bar{z}}{1-e^{-\bar{z}}}\frac{1-e^{-x}}{x}\sim\frac{1-e^{-x}}{x}\frac{z}{1-e^{-z}}.$$

Modulo $\mathcal{I}$ on calcule ici comme dans une algèbre commutative. Ainsi

$$x\partial_X F\sim\frac{1}{2}\frac{x}{1-e^{-x}}(\partial_X A+1)-\frac{1}{2}\frac{z}{1-e^{-z}}+\mathrm{ad}\,F.$$

De même

$$y\partial_Y G\sim\frac{1}{2}\frac{y}{e^{y}-1}(-\partial_Y A+1)-\frac{1}{2}\frac{z}{e^{z}-1}+\mathrm{ad}\,G.$$

En ajoutant, le résultat peut s'écrire

$$x\partial_X F+y\partial_Y G\sim\frac{x}{4}\coth\frac{x}{2}(\partial_X A+1)-\frac{y}{4}\coth\frac{y}{2}(\partial_Y A-1)-\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}+\frac{x}{4}(\partial_X A+1)+\frac{y}{4}(\partial_Y A-1)+\mathrm{ad}(F+G).$$

Or $x\partial_X A+y\partial_Y A\sim\partial_X A\circ x+\partial_Y A\circ y=\mathrm{ad}\,A$, ce qui appartient à $\mathcal{I}$ puisque $A=f-g$ est de la forme $[X,\ldots]+[Y,\ldots]$. Ces termes disparaissent donc, d'où le lemme. $\square$

Proposition 3. *Soit* (F_0,G_0) *une solution de* (KV1) :

$$Z(Y,X)=X+Y-\big(1-e^{-x}\big)F_0(X,Y)-\big(e^{y}-1\big)G_0(X,Y).$$

Alors le couple (F,G) *défini par*

$$\begin{cases} F(X,Y)=\dfrac{1}{4}\big(F_0(X,Y)+G_0(-Y,-X)+e^{x}F_0(-X,-Y)+e^{x}G_0(Y,X)+Z(X,Y)-X\big)\\ G(X,Y)=F(-Y,-X)\end{cases}\tag{4}$$

est solution de (KV1). *De plus* $x\circ\partial_X F+y\circ\partial_Y G$ *est pair en* (X,Y) *modulo* $\mathcal{I}$.

Preuve. On note Γ le groupe formé de l'identité et des trois involutions définies par

$$\widehat{f}(X,Y)=f(-X,-Y),\qquad\overline{f}(X,Y)=f(Y,X),\qquad\widetilde{f}(X,Y)=f(-Y,-X)$$

et f^{γ} le transformé de f par l'involution $\gamma\in\Gamma$.

Si (F,G) est une solution symétrique de (KV1), i.e. $G=\widetilde{F}$, on a $g=(e^{y}-1)G=-\widetilde{f}$. Les dérivées de $A=f+\widetilde{f}$ dans le Lemme 2 seront alors paires si A est impair, c'est-à-dire $f+\widetilde{f}+\widehat{f}+\overline{f}=\sum_{\gamma\in\Gamma}f^{\gamma}=0$, ce qu'on va obtenir par une modification simple de (F_0,G_0).

(i) D'abord $\widetilde{\overline{Z}}=\widehat{Z}=\log(\exp(-X)\exp(-Y))=-\overline{Z}$, donc le couple $(\widetilde{G_0},\widetilde{F_0})$ est encore solution de (KV1) et aussi le couple symétrique (F_1,G_1) défini par $F_1=\frac{1}{2}(F_0+\widetilde{G_0})$, $G_1=\widetilde{F_1}=\frac{1}{2}(G_0+\widetilde{F_0})$. Notons $f_1=(1-e^{-x})F_1$ et

$$f=f_1-\frac{1}{4}\sum_{\gamma\in\Gamma}f_1^{\gamma}.\tag{5}$$

Alors $f-f_1=\widetilde{f}-\widetilde{f_1}$ d'où

$$\overline{Z}=X+Y-f_1+\widetilde{f_1}=X+Y-f+\widetilde{f}.\tag{6}$$

D'autre part

$$f=\big(1-e^{-x}\big)F\quad\text{avec}\quad F=\frac{1}{2}\big(F_1+e^{x}\widehat{F_1}\big)+\frac{1}{4}(Z+\lambda X),\tag{7}$$

où le scalaire λ sera choisi plus bas. En effet $(1-e^{-x})F = \frac{1}{2}(f_1 - \widehat{f_1}) + \frac{1}{4}(Z - \overline{Z})$ (puisque $\overline{Z} = e^{-x}Z$) et $Z = X + Y - \overline{f_1} + \widehat{f_1}$ en échangeant X et Y dans (6), d'où $(1-e^{-x})F = f$ grâce à (5) et (6).

Par suite le couple $(F, \widetilde{F})$ de (4) est solution de (KV1) avec $A = f + \widetilde{f}$ impair puisque (5) entraîne $\sum_{\gamma\in\Gamma} f^\gamma = 0$.

(ii) Or F_1 est de la forme $F_1 = aX + bY + (\cdots)$ où a et b sont des scalaires et $(\cdots)$ une somme de crochets de Lie, et $Z = X + Y + (\cdots)$. De (7) on déduit $F = \frac{1}{4}((\lambda+1)X + Y) + (\cdots)$ d'où

$$F + \widetilde{F} + \frac{X-Y}{4} = \frac{1}{4}(\lambda+1)(X-Y) + (\cdots).$$

Le terme $\operatorname{ad}(\cdots)$ du Lemme 2 avec $G = \widetilde{F}$ est donc dans $\mathcal{I}$ si on choisit $\lambda = -1$. Enfin le terme en z de ce lemme est pair modulo $\mathcal{I}$, car $\widehat{Z} = -e^{-x}Z$ donne $\widehat{z} = \operatorname{ad}\widehat{Z} = -e^{-x}ze^{x} \sim -z$. Ainsi $x\partial_X F + y\partial_Y G$ est pair modulo $\mathcal{I}$ par le Lemme 2, d'où la proposition. $\square$

4. Application aux algèbres résolubles

Théorème 4. *Soit* (F_0, G_0) *un couple solution de* (KV1) *pour une algèbre de Lie résoluble. Le couple* (F, G) *défini par* (4) *est alors solution du problème de Kashiwara–Vergne* (KV1), (KV2).

Preuve. Puisque $\mathfrak{g}$ est résoluble, sa complexifiée admet une base dans laquelle x et y sont représentées par des matrices triangulaires supérieures et les éléments de $\mathcal{I}$ par des triangulaires supérieures strictes, d'où $\operatorname{tr}\mathcal{I} = 0$. Si (F, G) est choisi comme dans la Proposition 3, $\operatorname{tr}(x \circ \partial_X F + y \circ \partial_Y G)$ est donc fonction paire de (X, Y).

D'autre part, si $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux à x ou y on a

$$\tau(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1 \sim (-1)^n x_1 \cdots x_n$$

modulo $\mathcal{I}$. Par suite

$$x_1 \cdots x_n - \tau(x_1 \cdots x_n) \sim \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\, x_1 \cdots x_n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'égalité (1) modulo $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ du Théorème 1 entraîne une égalité modulo $\mathcal{I}$, dans laquelle on pourra donc supposer a impair et remplacer $a - \tau(a)$ par $2a$, d'où

$$\operatorname{tr}(x\partial_X F + y\partial_Y G) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{y}{e^y - 1} - \frac{z}{e^z - 1} - 1\right) = 2\operatorname{tr} a. \tag{8}$$

Enfin $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{2}\coth\frac{x}{2} - \frac{x}{2}$ et de même avec y ou z, et l'égalité $e^z = e^x e^y$ donne $\operatorname{tr}(x + y - z) = 0$. On en déduit (comme à la fin du paragraphe 3) que le premier membre de (8) est pair, d'où la conclusion, le second membre étant impair. $\square$

Remarque. On pourrait espérer que le couple (F, G) construit en (4) soit solution du problème de Kashiwara–Vergne pour toute algèbre de Lie. Mais en prenant pour (F_0, G_0) le couple proposé dans l'équation (8) de [8] p. 561, le (F, G) obtenu donne même fonction A que la solution de Kashiwara–Vergne du cas résoluble (voir [8] pp. 562 et 580) donc, par le Lemme 2, même expression à $x\partial_X F + y\partial_Y G$ modulo $\mathcal{I}$. Les calculs sur ordinateur d'Albert, Harinck et Torossian [1] montrent que ce n'est pas une solution du cas général : pour certaines algèbres de Lie un désaccord apparaît entre les deux membres de (KV2) sur les termes de degré 8 en (X, Y).

Remerciements

Je suis reconnaissant à Michèle Vergne, Anton Alekseev et Charles Torossian pour leurs remarques et suggestions sur une première version de cette Note.

Références

[1] L. Albert, P. Harinck, C. Torossian, Solution non universelle pour le problème KV 78, J. Lie Theory 18 (2008) 617–626, arXiv:0802.2049.
[2] A. Alekseev, E. Petracci, Low order terms of the Campbell–Hausdorff series and the Kashiwara–Vergne conjecture, J. Lie Theory 16 (2006) 531–538, arXiv:math.QA/0508077.
[3] A. Alekseev, C. Torossian, The Kashiwara–Vergne conjecture and Drinfeld's associators, arXiv:0802.4300, 2008.
[4] A. Alekseev, C. Torossian, On triviality of the Kashiwara–Vergne problem for quadratic Lie algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 347 (2009) 1231–1236, arXiv:0909.3743.
[5] E. Burgunder, Eulerian idempotent and Kashiwara–Vergne conjecture, Ann. Inst. Fourier 58 (2008) 1153–1184, arXiv:math.QA/0612548, 2006.
[6] M. Kashiwara, M. Vergne, The Campbell–Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. 47 (1978) 249–272.
[7] F. Rouvière, Démonstration de la conjecture de Kashiwara–Vergne pour l'algèbre *sl*(2), C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 292 (1981) 657–660.
[8] F. Rouvière, Espaces symétriques et méthode de Kashiwara–Vergne, Ann. Sci. École Norm. Sup. 19 (1986) 553–581.
[9] C. Torossian, La conjecture de Kashiwara–Vergne [d'après Alekseev et Meinrenken], Séminaire Bourbaki n° 980, Astérisque 317 (2008) 441–466.
[10] M. Vergne, Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell–Hausdorff, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (1999) 767–772.