C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 499–502

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbres de Lie

Formule des caractères des représentations simples de dimension finie de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(2,2)$

Character formula for finite-dimensional simple representations of the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(2,2)$

François Drouot

Laboratoire de mathématiques de Versailles, bâtiment Fermat, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 29 mars 2010
Accepté après révision le 6 avril 2010
Disponible sur Internet le 22 avril 2010

Présenté par Michel Duflo

RÉSUMÉ

L'objectif de cette Note est de donner une décomposition des $\mathfrak{gl}(2,2)$-modules simples de dimension finie en $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$-modules simples. Cette décomposition permet d'avoir une formule des caractères combinatoire pour de tels modules.

ABSTRACT

The goal of this Note is to decompose simple $\mathfrak{gl}(2,2)$-modules of finite dimension as a direct sum of simple $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$-modules. This decomposition gives us a combinatoric character formula for simple modules.

1. Introduction

En 1996, Serganova [6] démontre une formule des caractères pour les modules simples de dimension finie de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$. Pour cela elle détermine les sous-quotients simples d'une classe de modules indécomposables (dont les modules simples sont des quotients) appelés modules de Kac. Puis, grâce à une inversion formelle, elle donne une formule des caractères pour les modules simples. De même que la formule démontrée (de manière très différente) en 2003 par Brundan [2], cette formule consiste en une somme infinie, et n'est pas propice aux calculs. La recherche d'une formule des caractères a donné lieu a un nombre important d'articles, on ne citera que celui de Su et Zhang [7] où ils expriment le caractère d'un module simple de dimension finie comme une somme finie alternée de caractères de Bernstein–Leites (théorème 4.9 de [7]).

Un $\mathfrak{gl}(m,n)$-module simple est, par restriction, un $\mathfrak{gl}_m \times \mathfrak{gl}_n$-module, il est complètement réductible par rapport à cette algèbre de Lie réductive. Notons $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan des matrices diagonales et Δ le système de racines. Étant donné que $\mathfrak{h}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{gl}_m \times \mathfrak{gl}_n$ la connaissance de la décomposition d'un $\mathfrak{gl}(m,n)$-module en $\mathfrak{gl}_m \times \mathfrak{gl}_n$-modules simples permet d'obtenir une formule des caractères.

Notons $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Borel des matrices triangulaires supérieures. Soit λ un poids dominant de $\mathfrak{gl}(2,2)$ (i.e. dominant comme poids de $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$), le module de Kac correspondant, V_λ, est un module induit à plus haut poids dont on connaît le caractère. Une réécriture de celui-ci permet d'obtenir la décomposition de V_λ en $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$-modules simples (c'est la proposition 3.1).

Adresse e-mail : drouot@iecn.u-nancy.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.04.012

Le module simple L_λ est l'unique quotient simple de V_λ, sa $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$-décomposition est donc extraite de celle de V_λ. La connaissance des suites de compositions des modules de Kac, calculées par Serganova [6] et rappelées dans notre situation dans la proposition 3.2, permet d'obtenir la $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$-décomposition des modules simples (c'est l'objet du théorème 3.3). En corollaire on remarque qu'un module simple qui n'est pas de dimension 1 vérifie la conjecture de Bernstein et Leites [1].

Cette Note est extraite de la thèse de l'auteur [3] où les démonstrations sont plus détaillées.

2. Contexte et notations

On utilise les notations de [4]. Soit $\mathfrak{g}$ la super-algèbre de Lie (sur $\mathbb{C}$) $\mathfrak{gl}(2,2)$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation (rappelons que $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$).

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (et de $\mathfrak{g}_0$) constituée des matrices diagonales, elle contient le centre, de dimension 1, de $\mathfrak{g}$. On note Δ_0 le système de racine de $\mathfrak{g}_0$, Δ_1 l'ensemble des poids du $\mathfrak{g}_0$-module $\mathfrak{g}_1$ et on pose $\Delta = \Delta_0 \sqcup \Delta_1$ le système de racines.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$ la $\mathbb{Z}$-graduation suivante, elle est compatible avec la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0, \qquad \mathfrak{g}^{+1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), B \in \operatorname{Hom}\big(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2\big) \right\}, \qquad \mathfrak{g}^{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right), C \in \operatorname{Hom}\big(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2\big) \right\}.$$

Soit $\mathfrak{b}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, si on note $\mathfrak{b}_0$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_0$ composée des matrices triangulaires supérieures par blocs, on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$. C'est la sous-algèbre de Borel distinguée de $\mathfrak{g}$ (correspondante à $\mathfrak{b}_0$) introduite par Kac dans [5]. Elle permet de séparer les racines en racines positives et en racines négatives. On a alors pour la base standard $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2\}$ de $\mathfrak{h}^\star$ (i.e. pour $H = \operatorname{Diag}(h_1, \dots, h_4)$ on a $\varepsilon_i(H) = h_i$ et $\delta_i(H) = h_{2+i}$ pour tout i) :

$$\Delta_0^+ = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \delta_1 - \delta_2\}, \qquad \Delta_1^+ = \{\varepsilon_i - \delta_j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}.$$

Notons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ dominant (i.e. dominant pour $\mathfrak{g}_0$), notons $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$ le $\mathfrak{g}_0$-module simple de plus haut poids λ (il est de dimension finie). On l'étend trivialement à $\mathfrak{g}^{+1}$ (en gardant la même notation). On définit le module de Kac de plus hauts poids λ par :

$$V_\lambda = \operatorname{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_\lambda(\mathfrak{g}_0).$$

Une représentation de dimension finie $\mathfrak{h}$-diagonalisable M possède un caractère qui est par définition $\operatorname{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^\star} \operatorname{sdim} M_\mu e^\mu$, où M_μ désigne le sous-espace de M des vecteurs de poids μ et $\operatorname{sdim} M_\mu = \dim(M_\mu)_0 + \varepsilon \dim(M_\mu)_1$ avec ε une indéterminée de carré 1.

L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}^{-1}$ étant isomorphe (comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel) à l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}^{-1}$, le module de Kac est donc de dimension finie, de plus il est isomorphe, comme $\mathfrak{g}_0$-module à $\Lambda(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$. On connaît donc son caractère (en utilisant la formule des caractères de Weyl pour l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}_0$) :

$$\operatorname{ch}(V_\lambda) = \left(\prod_{\beta \in \Delta_1^+} \big(1 + \varepsilon e^{-\beta}\big) \right) . \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w \cdot \lambda} \quad \text{où } D := \prod_{\alpha \in \Delta_0^+} \big(1 - e^{-\alpha}\big),$$

où W est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}_0$ et $w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$ avec $\rho = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha \in \Delta_0^+} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} \alpha)$. De plus V_λ possède un unique quotient simple L_λ (c'est le module simple de plus haut poids λ).

La supertrace $\operatorname{str} = E_{1,1}^\star + E_{2,2}^\star - E_{3,3}^\star - E_{4,4}^\star$ (où $E_{i,j}^\star$ associe à une matrice M son coefficient en position (i,j)) produit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ ($B(x,y) = \operatorname{str}(xy)$) dont la restriction à $\mathfrak{h}$ reste non dégénérée, on en déduit donc un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{h}^\star$. On rappele qu'un poids $\lambda = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\delta_1 + d\delta_2$ (on le note $(a,b|c,d)$) est dominant si et seulement si $a - b \in \mathbb{N}$, $c - d \in \mathbb{N}$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$.

On appelle degré d'atypie le cardinal de l'ensemble $A(\lambda) := \{\alpha \in \Delta_1^+,\ \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0\}$. Kac a démontré dans [5] que si λ est de degré d'atypie 0 (on parle de poids typique) alors V_λ est simple. Pour $\mathfrak{gl}(2,2)$ le degré d'atypie d'un poids dominant est 0, 1 (on dit simplement atypique) ou 2 (on dit maximalement atypique) et dans ce dernier cas $a = -d$ et $b = -c$.

3. Décompositions et formule des caractères

Pour un poids λ dominant et un sous ensemble I de Δ_1^+ on pose $\lambda_I = \lambda - \sum_{\beta \in I} \beta$ (et $\lambda_\emptyset = \lambda$). On dit que λ_I est ρ-régulier s'il existe $w_I \in W$ tel que $w_I \cdot \lambda_I$ soit dominant.

Proposition 3.1. *Soit $\lambda = (a,b|c,d)$ un poids dominant. Posons $\tilde{J}_1 := \{\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_2 - \delta_2\}$ et $\tilde{J}_2 := \{\varepsilon_1 - \delta_2, \varepsilon_2 - \delta_1\}$.*

Si $\langle \lambda + \rho, \varepsilon_2 - \delta_2 \rangle = 0$ (resp. $\neq 0$) posons : $J_1 := \tilde{J}_2$ (resp. $\tilde{J}_1$) et $J_2 := \tilde{J}_1$ (resp. $\tilde{J}_2$).

On définit l'ensemble $N\Pi_{V_\lambda}$ par $N\Pi_{V_\lambda} = \{J_1, J_2\}$ si $a = b$ et $c = d$, par $N\Pi_{V_\lambda} = \{J_1\}$ (resp. $\{J_2\}$) si $a = b$ (resp. $c = d$), et par $N\Pi_{V_\lambda} = \emptyset$ sinon

Posons $\Pi_{V_\lambda} = \{\lambda_I,\ I \subset \Delta_1^+,\ \lambda_I \rho\text{-régulier},\ \lambda_I \notin N\Pi_{V_\lambda}\}$.

On a alors l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$*-modules* :

$$V_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda_I \in \Pi_{V_\lambda}} L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

Démonstration. En notant 0 le poids trivial, la formule des caractères de l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}^{-1}$ s'écrit :

$$\mathrm{ch}\big(\Lambda\big(\mathfrak{g}^{-1}\big)\big) = \prod_{\alpha \in \Delta_1^+} \big(1 + \varepsilon e^{-\alpha}\big) = \sum_{I \subset \Delta_1^+} \varepsilon^{\sharp I} e^{0_I}.$$

En insérant cette égalité dans la formule des caractères du module de Kac, on montre après simplifications que (où sgn désigne la signature) :

$$\mathrm{ch}(V_\lambda) = \sum_{I \subset \Delta_1^+, \lambda_I \rho\text{-régulier}} \mathrm{sgn}(w_I) \varepsilon^{\sharp I} \mathrm{ch} L_{w_I \cdot \lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

On montre ensuite que pour $I \subset \Delta_1^+$ tel que λ_I ρ-régulier avec $\mathrm{sgn}(w_I) = -1$, il existe $J \subset \Delta_1^+$ tel que λ_J ρ-régulier avec $\mathrm{sgn}(w_J) = +1$ et $w_I \cdot \lambda_I = w_J \cdot \lambda_J$. Si un tel I existe, on est nécessairement dans le cas $a = b$ (ou $c = d$) avec $I = I_1$ ou $I = I_2$, où $I_1 := \{\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_1 - \delta_2\}$ et $I_2 := \{\varepsilon_1 - \delta_2, \varepsilon_2 - \delta_2\}$. Une simple vérification permet de voir que les ensembles J_1 et J_2 de la proposition sont les ensembles cherchés.

On remarque aussi que si λ_I est ρ-régulier avec $\mathrm{sgn}(w_I) = +1$ alors $w_I = \mathrm{Id}$. D'où la proposition. □

En utilisant le théorème 2.2 de [6] on montre que :

Proposition 3.2. *Soit* $\lambda = (a, b|-b, -a)$ *un poids dominant maximalement atypique. Les sous-quotients simples du module de Kac de plus haut poids* λ *sont isomorphes à* :

- $L_{(a,a|-a,-a)}$, $L_{(a,a-1|1-a,-a)}$ *et* $L_{(a-2,a-2|2-a,2-a)}$ *si* $a = b$.
- $L_{(b+1,b|-b,-1-b)}$, $L_{(b-1,b-1|1-b,1-b)}$, $L_{(a,a|-b,-b)}$, $L_{(b+1,b-1|1-b,-1-b)}$ *et* $L_{(b,b-1|1-b,-b)}$ *si* $a = b + 1$.
- $L_{(a,b|-b,-a)}$, $L_{(a-1,b|-b,1-a)}$, $L_{(a,b-1|1-b,-a)}$ *et* $L_{(a-1,b-1|1-b,1-a)}$ *si* $a \geqslant b + 2$.

Théorème 3.3. *Soit* $\lambda = (a, b|c, d)$ *un poids dominant. En utilisant les notations de la proposition* 3.1 *on a l'isomorphisme de* $\mathfrak{g}_0$*-modules suivant* :

$$L_\lambda \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda_I \in \Pi_{V_\lambda} \\ I \text{ t.q. } \forall \beta \in I \langle \lambda + \rho, \beta \rangle \neq 0}} L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

Corollaire 3.4. *Si* $a = b = -c = -d$ *on a* : $\mathrm{ch}(L_\lambda) = e^\lambda$.

Sinon, la formule de Bernstein–Leites est vérifiée :

$$\mathrm{ch}(L_\lambda) = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \mathrm{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_1^+, \langle \lambda+\rho, \alpha \rangle \neq 0} \big(1 + \varepsilon e^{-w(\alpha)}\big).$$

Remarque 1. Ce théorème 3.3 produit une formule des caractères combinatoire. Son corollaire est identique aux corolaires 4.13 et 4.15 de [7], en effet pour $\mathfrak{gl}(2,2)$ un poids maximalement atypique est soit «totalement connecté» (dans le cas où $a = b$) soit «totalement déconnecté» (au sens de [7]).

Démonstration. Concentrons nous sur le cas maximalement atypique. En effet si λ est typique le module de Kac est simple, on retrouve donc la proposition 3.1, si λ est simplement atypique on se rapporte à [3] (c'est une conséquence directe de [1]).

Soit $\lambda = (a, b|-b, -a)$ un poids maximalement atypique. Notons S_b le module simple (de dimension 1) de plus haut poids $(b, b|-b, -b)$, et remarquons l'isomorphisme $L_\lambda = L_{(a-b,0|0,b-a)} \otimes S_b$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $\lambda = (c, 0|0, -c)$ pour tout entier positif c.

Pour $c = 0$ on a $L_{(0,0|0,0)} \simeq L_{(0,0|0,0)}(\mathfrak{g}_0)$ (c'est la représentation triviale).

Pour $c = 1$, on sait, d'après la proposition 3.2, que les sous-quotients simples de $V_{(1,1|-1,-1)}$ sont isomorphes à $L_{(1,1|-1,-1)}$, $L_{(1,0|0,-1)}$ et $L_{(-1,-1|1,1)}$. Ceci nous donne un isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$-modules. Or on connaît les $\mathfrak{g}_0$-facteurs du module de Kac et des deux modules de dimension 1, ce qui permet de montrer le théorème pour $c = 1$.

Montrons maintenant par récurrence sur $c \geqslant 2$ que :

$$L_{(c,0|0,-c)} \simeq L_{(c,0|0,-c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(c-1,0|1,-c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(c,-1|0,1-c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(c-1,-1|1,1-c)}(\mathfrak{g}_0).$$

Pour $c = 2$, toujours d'après la proposition 3.2, les sous-quotients simples de $V_{(2,1|-1,-2)}$ sont isomorphes à $L_{(2,1|-1,-2)}$, $L_{(1,1|-1,-1)}$, $L_{(0,0|0,0)}$, $L_{(2,0|0,-2)}$ et $L_{(1,0|0,-1)}$. De même que pour $c = 1$ on peut vérifier le résultat.

Pour c quelconque supérieur ou égal à 3, toujours d'après la proposition 3.2, on sait que les sous-quotients simples de $V_{(c,1|-1,-c)}$ sont isomorphes à $L_{(c,1|-1,-c)}$, $L_{(c-1,1|-1,1-c)}$, $L_{(c,0|0,-c)}$ et à $L_{(c-1,0|0,-c-1)}$. On en déduit la $\mathfrak{g}_0$-décomposition de $L_{(c,0|0,-c)}$ dès que l'on connaît celle de $L_{(c-1,0|0,1-c)}$, $L_{(c-2,0|0,2-c)}$ et de $V_{(c,1|-1,-c)}$, une simple vérification permet de conclure cette récurrence, ainsi que la démonstration du théorème. $\square$

Références

[1] J. Bernstein, D. Leites, A formula for the character of the irreducible finite dimensional representations of Lie superalgebras of series $\mathfrak{gl}$ and $\mathfrak{sl}$, C. R. Acad. Bulgare Sci. 33 (1980) 1049–1051.

[2] J. Brundan, Kazhdan–Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m,n)$, J. Amer. Math. Soc. 16 (1) (2003) 185–231.

[3] F. Drouot, Quelques propriétés des représentations de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m,nb)$, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, 2008.

[4] C. Gruson, Sur les représentations de dimension finie de la super algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$ (d'après Serganova), in : Séminaire Bourbaki, Exp. No. 963, ix, Astérisque 311 (2007) 321–340.

[5] V. Kac, Characters of typical representations of classical Lie superalgebras, Comm. Algebra 5 (8) (1977) 889–897.

[6] V. Serganova, Kazhdan–Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m,n)$, Selecta Math. 2 (4) (1996) 607–651.

[7] Y. Su, R.B. Zhang, Character and dimension formulae for general linear superalgebra, Adv. Math. 211 (1) (2007) 1–33.