C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 549–552

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

# Nouveaux résultats pour les équations de la neutronique (II)

## *New results for neutronic equations (II)*

Mohamed Boulanouar

*LMCM-RMI, 22, rue des canadiens, 86000 Poitiers, France*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 10 août 2009
Accepté le 31 mars 2010
Disponible sur Internet le 24 avril 2010

Présenté par Jean-Michel Bony

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous étudions l'équation de transport munie des conditions aux limites générales. Grâce à une hypothèse de petitesse sur l'opérateur de bords, nous montrons que cette équation est gouvernée, sur son espace naturel $L_1$, par un $C_0$-semi-groupe.



ABSTRACT

This Note deals with the transport equation endowed with general boundary conditions. Thanks to a smallness hypothesis upon the boundary operator, we prove this equation is governed by a $C_0$-semigroup into its natural space $L_1$.



### 1. Introduction

Nous considérons un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ de frontière $\partial X$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et une mesure de Radon $\mu$ positive sur $\mathbb{R}^n$ de support $V$. Dans ce contexte, nous introduisons l'équation de transport

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = -v \cdot \nabla_x f(t) \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

où, $f = f(t,x,v)$ avec $(x,v) \in \Omega \overset{def}{=} X \times V$, désigne la densité des particules. Si l'on désigne par $n(x)$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à $X$ en $x \in \partial X$ et l'on pose

$$\Gamma_\pm = \big\{(x,v) \in \partial X \times V,\ \pm v \cdot n(x) > 0\big\}$$

alors les flux entrant $f(t)|_{\Gamma_-}$ et sortant $f(t)|_{\Gamma_+}$ des particules sont liés par la condition aux limites générales

$$f(t)|_{\Gamma_-} = K\big(f(t)|_{\Gamma_+}\big) \tag{2}$$

où, $K$ est un opérateur linéaire borné de $L^p(\Gamma_+)$ $(p \geqslant 1)$ dans $L^p(\Gamma_-)$. Ces conditions aux limites généralisent naturellement toutes les conditions aux limites connues (absorption, réflexion, spéculaire, périodique, ...).

Quand $\|K\| < 1$, alors des études complètes ont été faites dans [1,9,10] où l'on a prouvé que le modèle (1)–(2) est gouverné par un $C_0$-semi-groupe de contractions dans $L^p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$. Cependant le cas $\|K\| \geqslant 1$ a été rarement étudié mais néanmoins, des contributions substantielles ont été apportées dans [2–5]. Autres contributions sont données dans [6,7], [8, Ch. V] (voir les remarques 2.1 et 2.2).

*Adresse e-mail :* boulanouar@free.fr.

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2010.04.005

Le cas $\|K\| > 1$ présente d'énormes difficultés physiques liées étroitement à l'absence totale du contrôle du flux croissant des particules rentrantes et de ce fait, le temps de passage d'une particule rentrante

$$\tau(x,v) = \inf\{t, x - tv \notin X\} \quad (x,v) \in \Gamma_+$$

et celui d'une particule dans $X$

$$t(x,v) = \inf\{t, x - tv \notin X\} \quad (x,v) \in \Omega$$

peuvent être arbitrairement petits ou grands. Ainsi, l'existence d'un $C_0$-semi-groupe résolvant le modèle (1)–(2) ne peut avoir lieu qu'en présence des hypothèses, sur la géométrie de $(X,V)$, qui permettent de contrôler $\tau(x,v)$ (voir [3]) ou bien $t(x,v)$ (voir [5]).

En s'inspirant de [4], une autre approche consiste à trouver des hypothèses convenables, sur l'opérateur de bords $K$, qui permettent de contrôler les temps de passage $\tau(x,v)$ des particules rentrantes. Ainsi, nous sommes conduits à notre définition,

**Définition 1.1.** Soit $K$ un opérateur linéaire borné de $L^p(\Gamma_+)$ $(p \geqslant 1)$ dans $L^p(\Gamma_-)$. Alors, $K$ est un opérateur *admissible* si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel qu'on ait} \quad \|K\mathbb{1}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Gamma_+),L^p(\Gamma_-))} < 1$$

où, $\mathbb{1}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_+))$ est l'opérateur de restriction défini par

$$\mathbb{1}_\varepsilon\psi(x,v) = \begin{cases} \psi(x,v) & \text{si } \tau(x,v) \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

Nous appelons $\varepsilon_K = \sup\{\varepsilon > 0,\ \|K\mathbb{1}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Gamma_+),L^p(\Gamma_-))} < 1\}$ *l'abscisse d'admissibilité* de l'opérateur $K$.

Voici quelque exemples d'opérateurs admissibles :

**Lemme 1.1.** *Soit $K$ un opérateur linéaire borné de $L^p(\Gamma_+)$ $(p \geqslant 1)$ dans $L^p(\Gamma_-)$. Si l'une des conditions suivantes* :

(1) $\|K\| < 1$ ;
(2) *L'opérateur $K$ est compact* ;
(3) *L'opérateur $K$ vérifie* (8) ;
(4) *Le couple $(X,V)$ vérifie* (9)

*est satisfaite, alors $K$ est un opérateur admissible.*

Les points (2) et (3) sont intéressants seulement quand $\|K\| \geqslant 1$. Si le point (4) est vérifié, alors tous les opérateurs bornés $K$ deviennent admissibles.

Dans cette Note, nous allons nous placer dans le cadre naturel, $L^1(\Omega)$, du modèle (1)–(2), puisque $\|f(t,\cdot,\cdot)\|_1$ exprime le nombre de particules à l'instant $t \geqslant 0$. Dans la suite, nous allons montrer que le modèle (1)–(2) est gouverné par un $C_0$-semi-groupe sur $L^1(\Omega)$. En guise de conséquences, nous retrouverons tous les résultats connus [1–5,9,10]. Ainsi, nous aurons fourni, pour les équations du transport, un nouveau résultat d'une portée générale.

## 2. Théorème de génération

Considérons l'espace des phases, $L^1(\Omega)$, muni de sa norme naturelle

$$\|\varphi\|_1 = \int_\Omega |\varphi(x,v)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(v) \tag{4}$$

ainsi que $W^1(\Omega) = \{\varphi \in L^1(\Omega),\ v\cdot\nabla_x\varphi \in L^1(\Omega), \theta^{-1}\varphi \in L^1(\Omega)\}$ muni de la norme $\|\varphi\|_{W^1(\Omega)} = \|v\cdot\nabla_x\varphi\|_1 + \|\theta^{-1}\varphi\|_1$ où, $\theta$ étant la corde de séjour définie par $\theta(x,v) = t(x,v) + t(x,-v)$. Nous introduisons également les espaces naturels de traces, $L^1(\Gamma_\pm)$, munis de leur normes

$$\|\psi\|_{L^1(\Gamma_\pm)} = \int_{\Gamma_\pm} |\psi(x,v)|\,\mathrm{d}\xi$$

où, $\mathrm{d}\xi = |v\cdot n(x)|\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\mu(v)$ avec $\mathrm{d}\gamma$ étant la mesure de surface sur $\partial X$. Dans ce contexte, nous énonçons notre nouveau résultat, concernant les applications de traces, comme suit

**Lemme 2.1.** *(Voir [5, Th. 2.1].) Les applications de traces,* $\gamma_\pm : \varphi \to \varphi\,|_{\Gamma_\pm}$ *sont linéaires continues de* $W^1(\Omega)$ *dans* $L^1(\Gamma_\pm)$.

Soit $K \in \mathcal{L}(L^1(\Gamma_+), L^1(\Gamma_-))$ un opérateur de bords donné. Le lemme précédent permet de donner un sens à l'opérateur de transport suivant :

$$\begin{cases} T_K\varphi = -v \cdot \nabla_x\varphi \quad \text{sur le domaine}, \\ D(T_K) = \{\varphi \in W^1(\Omega),\ \gamma_-\varphi = K\gamma_+\varphi\}. \end{cases} \tag{5}$$

Avant d'étudier les propriétés de (5), montrons le lemme fondamental suivant :

**Lemme 2.2.** *Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$*. Si K est admissible dont l'abscisse d'admissibilité est* $\varepsilon_K$*, alors, nous avons*

$$\left]\frac{1}{\varepsilon_K}(\ln\beta), \infty\right[ \subset \rho(T_K) \quad \text{où}, \quad \beta = \max\{1, \|K\|\}. \tag{6}$$

Maintenant, grâce au lemme précédent et au théorème de Hille–Yosida, nous somme en mesure de formuler notre nouveau résultat comme suit,

**Théorème 2.1.** *Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$*. Si K est admissible dont l'abscisse d'admissibilité est* $\varepsilon_K$*, alors, l'opérateur* $T_K$ *engendre, sur* $L^1(\Omega)$*, un* $C_0$*-semi-groupe* $(U_K(t))_{t\geqslant 0}$ *vérifiant*

$$\|U_K(t)\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega))} \leqslant \beta e^{(\frac{1}{\varepsilon_K}\ln\beta)t} \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

*où,* $\beta$ *est donné par* (6).

Dans la suite, grâce au Lemme 1.1 et au théorème précédent, nous allons déduire tous les résultats connus sur la génération de semi-groupes pour les équations du transport. Le plus classique de ces résultat est le suivant :

**Corollaire 2.1.** *(Voir [1,9,10].) Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$ *vérifiant* $\|K\| < 1$*. Alors l'opérateur* $T_K$ *engendre, sur* $L^1(\Omega)$*, un* $C_0$*-semi-groupe de contractions.*

Quant au cas $\|K\| \geqslant 1$, nous commençons tout d'abord par améliorer notre résultat [5, Corollaire 2.3], comme suit

**Corollaire 2.2.** *(Voir [5, Cor. 2.3].) Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$ *vérifiant* $\|K\| \geqslant 1$*. Si K est compact, alors, l'opérateur* $T_K$ *engendre, sur* $L^1(\Omega)$*, un* $C_0$*-semi-groupe vérifiant* (7).

Ensuite, nous apportons une correction substantielle à [6, Th. 5.2], [7, Th. 1.3], [8, Ch. V, Th. 2.8] (voir remarque 2.1 et 2.2), comme suit

**Corollaire 2.3.** *Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$ *vérifiant* $\|K\| \geqslant 1$*. Si*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|K\mathbb{1}_\varepsilon\| < 1 \tag{8}$$

*alors, l'opérateur* $T_K$ *engendre, sur* $L^1(\Omega)$*, un* $C_0$*-semi-groupe vérifiant* (7).

Cependant, en tenant compte uniquement des hypothèses sur la géométrie $(X, V)$, nous avons aussi

**Corollaire 2.4.** *(Voir [2,3].) Soit K un opérateur linéaire borné de* $L^1(\Gamma_+)$ *dans* $L^1(\Gamma_-)$ *vérifiant* $\|K\| \geqslant 1$*. Si*

$$\inf_{(x,v)\in\Gamma_+} \tau(x, v) > 0 \tag{9}$$

*alors, l'opérateur* $T_K$ *engendre, sur* $L^1(\Omega)$*, un* $C_0$*-semi-groupe vérifiant* (7).

Nous finissons cette Note par les remarques suivantes :

**Remarque 2.1.** Notons que notre Corollaire 2.3 est la formulation correcte de [7, Th. 1.3], [8, Ch. V, Th. 2.8]. En effet les démonstrations sont incorrectes pour, entre autres, les raisons suivantes

1) Il est bien connu que l'application du théorème de Hille–Yosida fait appel à une relation du type (6). Or, aucune relation de ce genre n'a été prouvée.
2) Les démonstrations font appel à la continuité de l'opérateur linéaire suivant :

$$B_q^{-1}\varphi(x,v) = q^{-t_k(x,v)}\varphi(x,v) \quad (x,v)\in\Omega$$

où, $0<q<1$ et $t_k(x,v)=\max\{t(x,v),k\}$ avec $k\geqslant 0$. Cependant, cet opérateur n'est pas toujours continu. En effet, si l'on considère la configuration de [8, Ch. V, Exemple 2.13], i.e., $\Omega=(0,1)\times(0,\infty)$, alors, nous avons

$$\left\|B_q^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega))} = q^{-\sup_{(x,v)} t_k(x,v)} \geqslant q^{-\sup_{(x,v)} t(x,v)} = q^{-\sup_{(x,v)} \frac{x}{v}} = \infty.$$

3) Enfin, réécrivons par exemple la relation [8, Ch. V, Rel. (2.10)]

$$e^{\varepsilon \ln q} < \frac{1-\|K\mathbb{1}_\varepsilon\|}{\|K\|}.$$

En utilisant (8), il vient que $\|K\|\leqslant 1-\limsup_{\varepsilon\to 0}\|K\mathbb{1}_\varepsilon\|\leqslant 1$. Ainsi $\|K\|\leqslant 1$, alors que [7, Th. 1.3], [8, Th. V.2.8] devaient traiter le cas $\|K\|>1$.

**Remarque 2.2.** Notons également que notre Corollaire 2.3 est la formulation correcte [6, Th. 5.2]. En effet, dans [6, page 288, line 14], les auteurs annoncent que si $\varphi\in\mathcal{W}^1=\{\varphi\in L^1(\Omega),\, v\cdot\nabla_x\varphi\in L^1(\Omega)\}$, alors $\gamma_\pm\psi\in L^p(\Gamma_\pm)$. Cependant, cet argument est incorrect en raison de [5, Prop. 1].

Outre la relation (8), les auteurs supposent que l'opérateur $K$ est positif et

$$\|K\psi\|_{L^1(\Gamma_-)} \geqslant \|\psi\|_{L^1(\Gamma_+)} \tag{10}$$

pour tout $\psi\in(L^1(\Gamma_+))_+$. Cependant, (8) et (10) sont incompatibles. En effet, soit $\psi\in(L^1(\Gamma_+))_+$ tel que $\psi(x,v)>0$ p.p. $(x,v)\in\Gamma_+$. Comme, pour tout $\varepsilon>0$, nous avons $\mathbb{1}_\varepsilon^2\psi=\mathbb{1}_\varepsilon\psi\neq 0$, alors (10) entraînerait

$$\|K\mathbb{1}_\varepsilon\|\|\mathbb{1}_\varepsilon\psi\|_{L^1(\Gamma_+)} \geqslant \left\|K\left(\mathbb{1}_\varepsilon^2\psi\right)\right\|_{L^1(\Gamma_-)} \geqslant \left\|\mathbb{1}_\varepsilon^2\psi\right\|_{L^1(\Gamma_+)} = \|\mathbb{1}_\varepsilon\psi\|_{L^1(\Gamma_+)}$$

d'où $\|K\mathbb{1}_\varepsilon\|\geqslant 1$ pour tout $\varepsilon>0$. Ainsi $\limsup_{\varepsilon\to 0}\|K\mathbb{1}_\varepsilon\|\geqslant 1$ ce qui contredit clairement (8). Ainsi, il n'y a pas d'opérateurs de bords $K$ vérifiant simultanément (8) et (10).

## Remerciements

Ce projet est entièrement financé par LMCM-RMI.

## Références

[1] R. Beals, V. Protopopescu, Abstract time dependent transport equations, J. Math. Anal. Appl. 121 (1987) 370–405.
[2] G. Borgioli, S. Borgioli, 3D-streaming operator with multiplying boundary conditions: Semigroup generation properties, Semigroup Forum 55 (1997) 10–117.
[3] M. Boulanouar, Opérateur d'advection : Existence d'un semi-groupe (I), Transp. Theory Stat. Phys. 31 (2002) 169–176.
[4] M. Boulanouar, Opérateur d'advection : Existence d'un semi-groupe (II), Transp. Theory Stat. Phys. 32 (2003) 185–197.
[5] M. Boulanouar, Nouveaux resultats pour les equations de la neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 623–626.
[6] K. Latrach, M. Mokhtar-Kharroubi, Spectral analysis and generation results for streaming operators with multipliying boundary conditions, Positivity 3 (1999) 273–296.
[7] B. Lods, A generation theorem for kinetic equations with non-contractive boundary operators, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 655–660.
[8] B. Lods, Théorie spectrale des équations cinétique. Doctorat de l'Université de Franche-Comté. Soutenu le 05 juillet 2002 à Besançon.
[9] W. Greenberg, C.V.M. van der Mee, V. Protopopescu, Bondary Value Problem in Abstract Kinetic Theory, Birkhäuser, Basel, 1987.
[10] J. Voigt, Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases, Habilitationsschrift, Universität München, 1981.