



Équations aux dérivées partielles

Homogénéisation d'un matériau périodique faiblement perturbé aléatoirement

Homogenization of a weakly randomly perturbed periodic material

Arnaud Anantharaman¹, Claude Le Bris

Université Paris Est, CERMICS, Équipe projet MICMAC, INRIA-École des ponts, 6 & 8 avenue Pascal, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 12 juin 2009

Accepté le 3 mars 2010

Disponible sur Internet le 31 mars 2010

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

Nous proposons dans la présente Note une méthode pour calculer au premier ordre le comportement homogénéisé d'un milieu consistant en un matériau périodique de référence perturbé de manière stochastique. L'approche, très efficace en termes de coût calcul, admet une justification rigoureuse dans certains cas, et a été testée numériquement avec succès pour des cas plus généraux.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We present in this Note an approach aiming at computing the first-order homogenized behaviour of a medium consisting of a randomly perturbed periodic reference material. The approach, which proves to be very efficient from a computational point of view, is rigorously founded in a certain class of settings and has been successfully numerically tested for more general settings.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We study in this Note the homogenization of the following elliptic problem:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + b_{\eta}\left(\frac{x}{\epsilon}, \omega\right)C_{\text{per}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\nabla u_{\epsilon}\right) = f(x) & \text{in } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, \\ u_{\epsilon} = 0 & \text{on } \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

where the tensor A_{per} models a reference \mathbb{Z}^d -periodic material. The latter is randomly perturbed by the \mathbb{Z}^d -periodic tensor C_{per} , the stochastic perturbation being encoded in the stationary ergodic scalar field b_{η} . The real scalar parameter η quantifies the size of the perturbation, and we shall assume that b_{η} is small “in probability” (in a sense to be defined) when η is small, but has the same order of magnitude as A_{per} . This setting is detailed in Section 1.

Our model follows the lines of previous works addressing perturbative approaches in homogenization. It differs from [4] in that we consider truly random perturbations, and from [9] in that these perturbations are not necessarily gaussian. Our work is actually inspired by the results on smooth stochastic deformations of periodic materials presented in [5], the main

Adresses e-mail : anantha@cermics.enpc.fr (A. Anantharaman), lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris).

¹ A. Anantharaman tient à remercier EADS IW pour son soutien financier.

additions being that we allow locally large albeit rare alterations to the reference material and that we test the approach numerically.

Since we consider a perturbative model, the homogenized behaviour of the medium of interest is expected to be close to the periodic homogenization of A_{per} . This guess is made rigorous by Theorem 2.1 in Section 2, which provides a way to compute a *deterministic first-order* correction in a particular class of settings. We describe in Section 3 a possible and still formal strategy to treat other settings beyond those of Section 2. The approach is tested numerically in Section 4.

1. Introduction

Nous étudions dans cette Note un cas particulier d'homogénéisation d'un problème aux limites elliptique sous forme divergence, dont les coefficients sont des fonctions aléatoires stationnaires. Le milieu décrit par ces coefficients est constitué d'un matériau déterministe périodique de référence légèrement perturbé de manière aléatoire (en un sens défini ci-dessous). L'ordre de grandeur de la perturbation est le même que celui des coefficients du matériau de référence, mais l'on impose qu'elle soit petite en probabilité (ou rare).

Ce travail s'inscrit dans la continuité de nombreuses approches perturbatives en homogénéisation stochastique. Soulignons qu'il diffère de [4] et [9] par le fait que nous considérons des perturbations vraiment aléatoires et non nécessairement gaussiennes. De plus, si notre modèle et notre cadre mathématique s'inspirent profondément de l'étude des déformations stochastiques de matériaux périodiques présentée dans [5], les éléments nouveaux sont que la perturbation est seulement petite dans un espace de probabilité et peut donc fortement modifier la structure du matériau localement, et que nous testons notre approche numériquement.

Nous commençons par définir dans la Section 1.1 les notions d'ergodicité et de stationnarité utilisées, rappelons dans la Section 1.2 les résultats classiques d'homogénéisation stochastique et présentons dans la Section 1.3 le modèle que nous considérons. La Section 2 est consacrée à l'énoncé d'un résultat d'approximation au premier ordre en la perturbation aléatoire du comportement homogénéisé du milieu étudié. L'efficacité de l'approche provient du fait que la correction trouvée est déterministe. Ce résultat d'approximation déterministe n'étant pour le moment établi que dans certains cas (voir l'énoncé du Théorème 2.1), nous l'étendons à un cadre plus général dans la Section 3 à l'aide d'un argument formel validé par les tests numériques de la Section 4.

1.1. Le cadre stationnaire ergodique

Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $\omega \in \Omega$ une réalisation du matériau. On notera $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X . On suppose que le groupe $(\mathbb{Z}^d, +)$ agit sur Ω par une action notée $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$, et que cette action préserve la mesure \mathbb{P} et est ergodique au sens où

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}, (\forall k \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{A} = \tau_k \mathcal{A}) \implies (\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1).$$

On dira de plus que $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$ est stationnaire si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall k \in \mathbb{Z}^d, F(x+k, \omega) = F(x, \tau_k \omega).$$

Notons que si F est déterministe, la stationnarité discrète ainsi définie se réduit à la \mathbb{Z}^d -périodicité.

1.2. Homogénéisation stochastique

On rappelle ici les résultats classiques d'homogénéisation dans le cadre stationnaire ergodique « discret » présenté ci-dessus, l'homogénéisation périodique déterministe s'en déduisant immédiatement (cf. [8]). Considérons un champ de tenseurs $A(x, \omega) \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$ stationnaire, tel qu'il existe $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \lambda |\xi|^2 \leq A(x, \omega) \xi \cdot \xi \quad \text{et} \quad |A(x, \omega) \xi| \leq \Lambda |\xi|, \quad \text{presque partout en } (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega.$$

La limite au sens de l'homogénéisation de la suite de tenseurs $A(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)$ est donnée par le tenseur déterministe A^* défini par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, A^*_{ji} = \mathbb{E} \left(\int_Q A(y, \omega) (e_i + \nabla_y w_i(y, \omega)) \cdot e_j \, dy \right)$$

où $Q = [0, 1]^d$, e_i est le i -ème vecteur canonique de \mathbb{R}^d et les w_i sont les solutions des problèmes de cellule

$$-\operatorname{div}(A(x, \omega)(\nabla w_i + e_i)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad \nabla w_i \text{ stationnaire,} \quad \mathbb{E} \left(\int_Q \nabla w_i \right) = 0.$$

Les problèmes de cellule sont définis sur \mathbb{R}^d , aussi leur résolution numérique ne peut-elle se faire que de manière approchée sur un sous-domaine. En pratique, on restreint une réalisation de $A(x, \omega)$ au cube $I_N = [0, N]^d$, on l'étend de manière I_N -périodique à tout \mathbb{R}^d et on calcule l'homogénéisé périodique, qui converge presque sûrement vers A^* quand $N \rightarrow +\infty$ (cf. [6]).

1.3. Modèle perturbatif

Dans le but d'étudier l'homogénéisation de matériaux proches de matériaux périodiques, nous considérons un modèle particulier dont la dérivation est intuitive et l'expression simple. Nous croyons ce modèle intéressant, car porteur de difficultés génériques susceptibles d'être rencontrées dans des cas plus compliqués. Dans ce modèle « exemple » le comportement du milieu est donné par le champ de tenseurs

$$A_\eta(x, \omega) = A_{per}(x) + b_\eta(x, \omega)C_{per}(x)$$

où A_{per} est un champ de tenseurs périodiques déterministes représentant le matériau de référence qui est perturbé par un second champ C_{per} de tenseurs périodiques déterministes. Le caractère aléatoire de cette perturbation provient du champ scalaire stationnaire $b_\eta(x, \omega)$, pour lequel on fait l'hypothèse

$$\exists 1 \leq p < \infty, \quad \|b_\eta\|_{L^\infty(Q; L^p(\Omega))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (1)$$

Cette condition impose que la perturbation soit petite en moyenne (ou rare). Elle peut néanmoins grandement modifier la structure du matériau localement. On suppose enfin qu'il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$ on ait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \eta > 0, \quad \alpha |\xi|^2 \leq A_\eta(x, \omega) \xi \cdot \xi \quad \text{et} \quad |A_\eta(x, \omega) \xi| \leq \beta |\xi|.$$

2. Résultat dans le cas $p = 2$

On se place ici dans le cas $p = 2$, pour lequel on est en mesure de prouver le résultat suivant. On renvoie à [1] pour une discussion du cas plus général $p > 1$.

Théorème 2.1. *On suppose que $m_\eta := \|b_\eta\|_{L^\infty(Q; L^2(\Omega))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Il existe une sous-suite de η , toujours notée η pour simplifier, telle que*

$\frac{b_\eta}{m_\eta}$ converge faiblement- $$ dans $L^\infty(Q; L^2(\Omega))$ vers une limite notée b_0 , et telle que le tenseur homogénéisé A_η^* s'écrit : $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$,*

$$A_\eta^* e_i = A_{per}^* e_i + m_\eta \int_Q \mathbb{E}(b_0) C_{per}(\nabla w_i^0 + e_i) + m_\eta \int_Q A_{per} \nabla v_i^0 + o(m_\eta)$$

où A_{per}^* est l'homogénéisé périodique de A_{per} , w_i^0 est solution du i -ème problème de cellule périodique relatif à A_{per} et v_i^0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{per}(y) \nabla v_i^0) = \operatorname{div}(\mathbb{E}(b_0) C_{per}(y) (\nabla w_i^0(y) + e_i)) & \text{dans } Q, \\ v_i^0 \mathbb{Z}^d\text{-périodique.} \end{cases} \quad (2)$$

La preuve est une simple adaptation de celle de [5, Théorème 3.2] (voir [1] ou [3] pour les détails). Le Théorème 2.1 donne un moyen d'approcher A_η^* à l'ordre m_η en calculant les w_i^0 et les v_i^0 , i.e. en résolvant $2d$ problèmes de cellule déterministes posés sur Q . Néanmoins il ne présente un intérêt que si la limite b_0 est non triviale et fournit un premier ordre non nul. De plus on peut se convaincre (voir [1]) qu'il repose implicitement sur le fait que $\mathbb{E}(b_\eta^2) = o(\mathbb{E}(b_\eta))$ lorsque $\mathbb{E}(b_0) \neq 0$. Pour ces deux raisons, le résultat ne renseigne par exemple pas sur le comportement de A_η^* dans le cas où b_η suit une loi de Bernoulli de paramètre η (alors $b_\eta^2 = b_\eta$ et $b_0 = 0$). Une autre difficulté, celle-ci spécifique à la dimension infinie, est que la preuve utilise de façon cruciale les propriétés de compacité faible des espaces $L^\infty(Q; L^p(\Omega))$ pour $p > 1$, et ne peut donc s'appliquer telle quelle au cas $p = 1$. Pour dépasser ces limitations, nous proposons dans la section suivante un argument formel.

3. Une approche heuristique

On suppose ici que b_η est uniforme dans chaque cellule de \mathbb{Z}^d , et s'écrit

$$b_\eta(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{Q+k\}}(x) B_\eta^k(\omega) \quad (3)$$

où les B_η^k sont des variables aléatoires i.i.d., dont la loi est donnée par une variable aléatoire B_η telle que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|B_\eta\|_{L^p(\Omega)} = 0$ pour un $p \in [1, +\infty[$ (de sorte que (1) soit vérifiée).

Nous considérons en premier lieu une loi de Bernoulli, qui concentre les difficultés mentionnées à la fin de la section précédente puisque c'est un prototype de cas L^1 dont les moments sont de même ordre.

Supposons donc que B_η suit une loi de Bernoulli de paramètre η . Heuristiquement, sur le cube $I_N = [0, N]^d$ et à l'ordre 1 en η petit, la probabilité d'obtenir le matériau parfait A_{per} est $1 - N^d \eta$ et celle d'obtenir le matériau A_{per} avec un défaut $A_{per} + C_{per}$ dans une seule des cellules est $N^d \eta$. Ceci donne l'intuition que l'ordre 1 de la perturbation provient de la différence entre le matériau avec un défaut et le matériau parfait, ce que nous formalisons en

$$A_\eta^* = A_{per}^* + \eta A_1^* + o(\eta), \quad \text{où } A_1^* e_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{I_N} [(A_{per} + \mathbb{1}_Q C_{per})(\nabla w_i^N + e_i) - A_{per}(\nabla w_i^0 + e_i)] \quad (4)$$

où w_i^0 est solution du i -ème problème de cellule périodique associé à A_{per} et w_i^N satisfait

$$-\operatorname{div}((A_{per}(x) + \mathbb{1}_Q C_{per}(x))(\nabla w_i^N(x) + e_i)) = 0 \quad \text{dans } I_N, \quad w_i^N \text{ } I_N\text{-périodique.} \quad (5)$$

Au vu de (4) et (5), la correction à l'ordre 1 sur le comportement homogénéisé du matériau quantifie bien l'influence de l'apparition d'un défaut dans le matériau parfaitement périodique. Il est intéressant de noter que dans (4) la différence entre deux intégrales divergentes remplace la moyenne ergodique usuelle en homogénéisation. C'est un trait assez général des méthodes de modélisation des défauts. Soulignons par ailleurs que l'on ne peut dans (5) remplacer les conditions aux limites périodiques par d'autres conditions usuelles (on voit facilement en dimension 1 que cela modifie le passage à la limite dans (4)).

En remarquant que dans le cas d'une loi de Bernoulli la mesure image de B_η s'écrit $\delta_0 + \eta(\delta_1 - \delta_0)$ et en reliant la différence $\delta_1 - \delta_0$ à la différence apparaissant dans (4), on est naturellement amené à proposer une version plus générale de (4).

Considérons donc à présent une variable aléatoire B_η de loi quelconque, et notons dP_η sa mesure image. Il est clair que (1) implique que dP_η converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\eta \rightarrow 0$. On fait alors l'hypothèse $dP_\eta = \delta_0 + \eta dP_1 + o(\eta)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et on propose le développement limité suivant

$$A_\eta^* = A_{per}^* + \eta A_1^* + o(\eta), \quad \text{où } A_1^* e_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{I_N} \int_{s \in B_\eta(\Omega)} (A_{per} + s \mathbb{1}_Q C_{per})(\nabla w_i^{s,N} + e_i) dP_1(s) \quad (6)$$

et où pour tout $s \in B_\eta(\Omega)$, $w_i^{s,N}$ vérifie

$$-\operatorname{div}((A_{per}(x) + s \mathbb{1}_Q C_{per}(x))(\nabla w_i^{s,N}(x) + e_i)) = 0 \quad \text{dans } I_N, \quad w_i^{s,N} \text{ } I_N\text{-périodique.} \quad (7)$$

Le raisonnement d'approximation ergodique permettant d'obtenir les termes d'ordre un dans (4) et (6) ainsi que les termes d'ordre deux est détaillé dans [2] et [3] respectivement, de même que la preuve de convergence dans la limite $N \rightarrow \infty$. Une question ouverte est la validité des développements asymptotiques associés. On peut en l'état montrer que ces développements sont exacts en dimension 1. De plus les tests numériques effectués dont ceux présentés dans la Section 4 les valident en pratique en dimension 2. Enfin (6) est cohérente avec le résultat du Théorème 2.1 dans le cas de perturbations pour lesquelles les deux approches sont susceptibles de s'appliquer (voir [1] et [3]).

4. Tests numériques

On présente dans cette section quelques cas-tests en dimension 2 pour illustrer les résultats précédents.

Le matériau périodique de référence est ici un réseau périodique d'inclusions circulaires entourées d'une matrice. Le tenseur A_{per} est scalaire et constant dans chaque phase, valant 1020 dans les inclusions et 20 dans la matrice. Le tenseur C_{per} est choisi de telle sorte que la perturbation crée des trous dans le réseau d'inclusions, et vaut donc 0 dans la matrice et -1000 dans les inclusions. On choisit b_η de la forme (3). On propose trois cas-tests, correspondant à trois types de perturbations stochastiques différents.

- cas a) : B_η suit une loi $\mathcal{N}(0, \eta)$ avec $\eta = 0.1$ tronquée entre 0 et 1 (application du Théorème 2.1);
- cas b) : B_η suit une loi de Bernoulli de paramètre $\eta = 0.1$ (application de la formule (4));
- cas c) : B_η suit une loi $\mathcal{N}(0, \eta)$ avec $\eta = 0.2$ tronquée entre -1 et 1 (application de la formule (6), avec $dP_\eta = \delta_0 + \frac{\eta^2}{2} \delta_0'' + o(\eta^2)$).

Sur un cube $I_N = [0, N]^2$ avec N fixé, on calcule d'une part une approximation de A_η^* comme indiqué à la fin de la Section 1.2, et d'autre part la correction A_1^* à l'ordre 1 à l'aide du Théorème 2.1 (cas a)) ou des formules (4) et (6) (cas b) et c)). On répète cette opération avec N de plus en plus grand afin d'obtenir une valeur précise de A_η^* , et l'on compare A_η^* avec $A_{per}^* + \eta A_1^*$. On s'intéresse à la qualité d'approximation et à la vitesse de convergence en N (soulignons que l'approche perturbative dans le cas a) est indépendante de N puisque la correction est calculée sur la cellule unité Q).

Cette démarche est mise en oeuvre pour plusieurs réalisations du matériau aléatoire. Les résultats relatifs à ces différentes réalisations présentant le même comportement qualitatif, nous ne montrons ici à titre d'illustration qu'une seule réalisation. Les tests sont effectués à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFem++ pour un pas de maillage fixé. Ce dernier

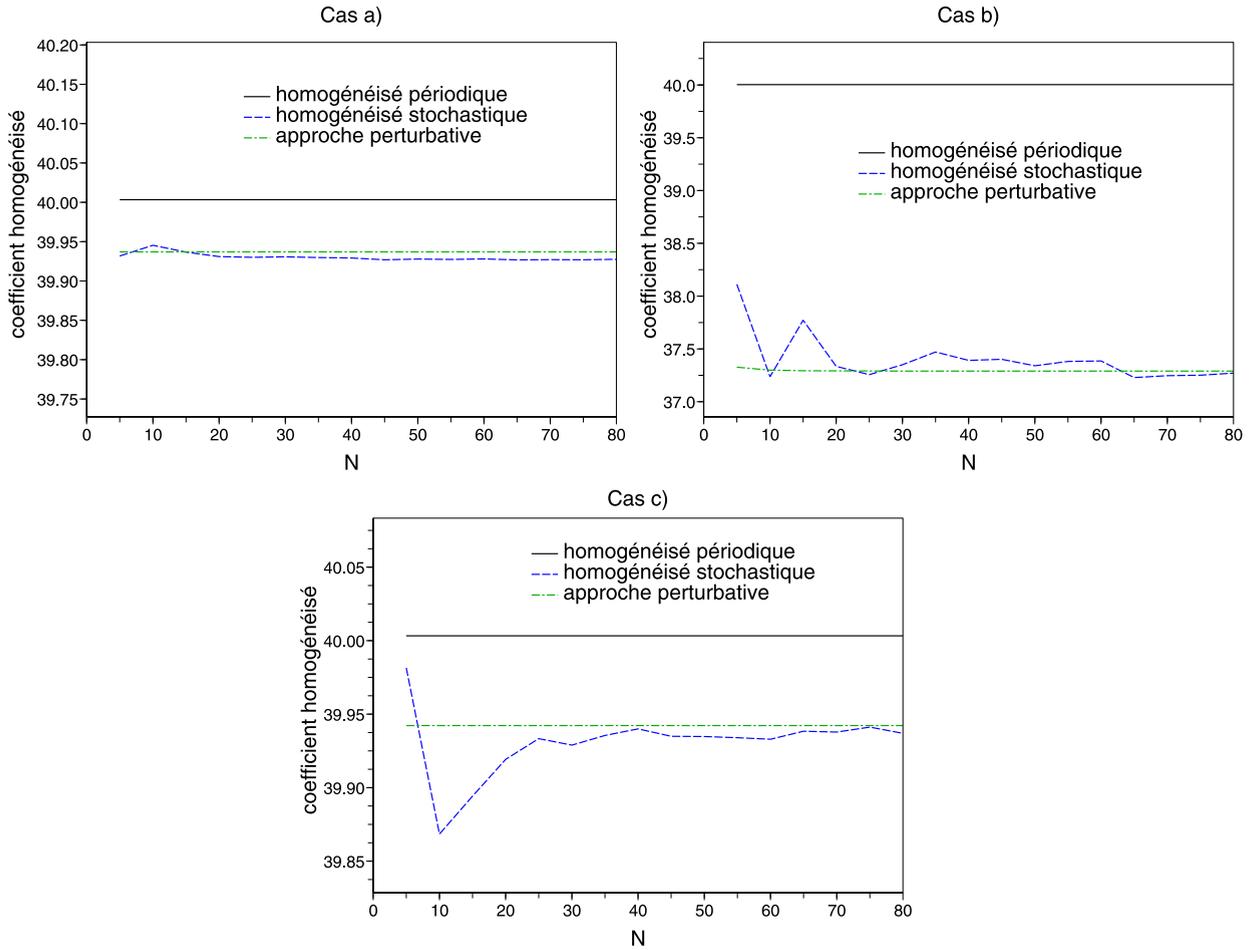


Fig. 1. Résultats dans les cas a), b) et c).

a une influence purement quantitative et non qualitative sur les résultats (nous l'avons vérifié) et ne change donc pas nos conclusions. Les développements limités écrits au sein des sections précédentes dans des espaces fonctionnels de dimension infinie peuvent d'ailleurs être réécrits dans les espaces d'éléments finis usuels (voir [7]). Les résultats sont présentés dans la Fig. 1.

On constate clairement sur les trois graphes que l'écart entre $A_{per}^* + \eta A_1^*$ et A_η^* est bien plus faible que l'écart entre A_{per}^* et A_η^* pour N grand. Plus précisément, il est en $\mathcal{O}(\eta^2)$ pour les cas a) et b) et en $\mathcal{O}(\eta^4)$ pour le cas c). On voit de plus que la vitesse de convergence en N de la correction A_1^* est, dans les cas b) et c), beaucoup plus élevée que celle de A_η^* . En effet le calcul de A_1^* converge dès $N = 10$ alors qu'il faut attendre $N = 40$ pour que A_η^* se stabilise (rappelons que la convergence de A_1^* est instantanée dans le cas a) où le calcul n'est effectué que sur une cellule). Ces résultats montrent que l'approche perturbative développée dans le Théorème 2.1 et la Section 3 fournit un moyen efficace de calculer le comportement homogénéisé du milieu, sous réserve qu'un résultat à l'ordre 1 en la perturbation aléatoire soit suffisant. A maillage fixé, le temps de calcul est considérablement réduit par rapport à l'approche directe du fait du petit nombre de cellules nécessaires au calcul de la correction, et l'on dispose par conséquent d'une plus grande marge pour améliorer la précision du calcul en maillant plus finement le domaine.

Références

- [1] A. Anantharaman, Thèse de l'Université Paris-Est, en préparation.
- [2] A. Anantharaman, C. Le Bris, A numerical approach based on defect-type theories for some weakly random problems in homogenization, en préparation.
- [3] A. Anantharaman, C. Le Bris, Mathematical foundations and genericity of a numerical approach for some weakly random problems in homogenization, en préparation.
- [4] I. Babuska, B. Andersson, P.J. Smith, K. Levin, Damage analysis of fiber composites. Part I : Statistical analysis on fiber scale, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 172 (1999) 27–77.
- [5] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, *J. Math. Pures Appl.* 88 (2007) 34–63.
- [6] A. Bourgeat, A. Piatnitski, Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques* 40 (2) (2004) 153–165.

- [7] R. Costouec, C. Le Bris, F. Legoll, Approximation numérique d'une classe de problèmes en homogénéisation stochastique, C. R. Acad. Sci. Paris Série I vol. 348 (1–2) (2010) 99–103.
- [8] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, 1994.
- [9] S. Sakata, F. Ashida, T. Kojima, M. Zako, Three-dimensional stochastic analysis using a perturbation-based homogenization method for elastic properties of composite material considering microscopic uncertainty, International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 894–907.