C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 125–126

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre

La dimension cohomologique des corps de type $\mathbf{C}_\mathrm{r}$ en caractéristique $\mathbf{p}$ ☆

The cohomological dimension of $\mathbf{C}_\mathrm{r}$ fields of characteristic $\mathbf{p}$

Jon Kristinn Arason, R. Baeza

Mathematics, University of Iceland, Hjardarhagi 4–6, IS 107 Reykjavik, Iceland
Instituto de Matematicas, Universidad de Talca, Chile

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 22 décembre 2009
Accepté le 8 janvier 2010
Disponible sur Internet le 12 février 2010

Présenté par Jean-Pierre Serre

RÉSUMÉ

Dans son cours sur la cohomologie galoisienne J.-P. Serre (1997) [2] consacre un paragraphe aux corps de type C_r. L'un des exercices de ce paragraphe consiste à montrer que pour tout C_r-corps K de caractéristique 2 le groupe de Kato $H_2^{r+1}(K)$ est trivial. Alors Serre fait la remarque que ce résultat est probablement vrai en général pour un C_r-corps de caractéristique positive quelconque. Le but de cette Note est de le démontrer.

ABSTRACT

In his book on Galois cohomology, J.-P. Serre (1997) [2] has a section about C_r-fields. One of the exercises in that section is to prove that if K is a C_r-field of characteristic 2 then the Kato group $H_2^{r+1}(K)$ is trivial. Serre then remarks that the same probably holds for C_r-fields of any positive characteristic. The purpose of this note is to confirm this.

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Comme la cohomologie galoisienne ordinaire ne donne pas les résultats souhaités pour les modules de p-torsion, Kato [K] a introduit un groupe, noté $H_p^{n+1}(K)$, qui joue le rôle du groupe de cohomologie $H^{n+1}(K, \mu_p^{\otimes n})$ en caractéristique p.

On notera Ω_K^n l'espace des n-formes différentielles sur K. Alors l'on a l'opérateur d'Artin–Schreier $\wp :\to \Omega_K^n/\mathrm{d}\Omega_K^{n-1}$ qui fait correspondre à la forme $u\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}$ la classe d'équivalence de la forme $(u^p - u)\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}$. Par définition le groupe $H_p^{n+1}(K)$ est le conoyau de cet opérateur. La classe de la forme $u\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}$ dans $H_p^{n+1}(K)$ sera désigné par $[x\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}]$.

Il faut donc montrer que pour tout C_r-corps K l'on a $[a\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}b_r}{b_r}] = 0$ quels que soient $b \in K$ et $b_1, \ldots, b_r \in K^*$.

Plus généralement nous avons la proposition suivante :

Proposition. *Soient $a \in K$ et $b_1, \ldots, b_n \in K^*$. Notons E l'ensemble des $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ où $0 \leqslant \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \leqslant p-1$ et écrivons $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in E$. Supposons que la forme*

$$\sum_{\underline{\varepsilon} \in E} b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_n^{\varepsilon_n} x_{\underline{\varepsilon}}^p - x_{\underline{0}} y^{p-1} - a y^p$$

☆ Le deuxième auteur est subventionné en partie par Projecto Fondecyt 1090011.
Adresse e-mail : jka@hi.is (J.K. Arason).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.01.009

de degré p en les p^n+1 variables $(x_{\underline{\varepsilon}})_{\underline{\varepsilon}\in E}$ et y admet un zéro K-rationnel non-trivial. Alors $[a\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}]=0$ dans $H_p^{n+1}(K)$.

Preuve. On peut supposer que les $b_1,\ldots,b_n$ soient p-indépendants, c'est-à-dire que les $b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}$, $\underline{\varepsilon}\in E$, soient linéairement indépendants sur K^p, car sinon $\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}$ est déjà 0 dans Ω_K^n. Cela implique que pour un zéro non-trivial de la forme la valeur de y ne peut pas être 0. Par conséquent l'on peut admettre que la valeur de y est 1, ce qui nous donne une équation

$$a=x_{\underline{0}}^p-x_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\varepsilon}\in E,\underline{\varepsilon}\neq\underline{0}}b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}x_{\underline{\varepsilon}}^p$$

où $x_{\underline{\varepsilon}}\in K$, $\underline{\varepsilon}\in E$. Il nous faut prouver que $[a\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}]=0$.

Par définition, $[(x_{\underline{0}}^p-x_{\underline{0}})\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}]=0$. Il ne reste qu'à montrer que $[b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}]=0$ pour chaque $\underline{\varepsilon}\neq\underline{0}$. En effet $b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}$ est contenu dans $d\Omega_K^{n-1}$. Si, par exemple, $\varepsilon_1\neq 0$ alors, comme $\varepsilon_1\equiv\varepsilon_1^p \pmod p$, un calcul simple montre que $b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}$ est la différentielle de $\frac{1}{\varepsilon_1^p}b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}\frac{db_2}{b_2}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}$.

Remarque. La réciproque de la proposition est également vraie. En effet, le résultat suivant se déduit de la Proposition 3.3 dans [1] :

Soient $a\in K$ et $b_1,\ldots,b_n\in K^*$. Supposons que les $b_1,\ldots,b_n$ soient p-indépendants et que $[a\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}]=0$ dans $H_p^{n+1}(K)$. Alors il existe des éléments $x_{\underline{\varepsilon}}\in K$, $\underline{\varepsilon}\in E$ qui vérifient l'équation

$$a=x_{\underline{0}}^p-x_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\varepsilon}\in E,\underline{\varepsilon}\neq\underline{0}}b_1^{\varepsilon_1}\cdots b_n^{\varepsilon_n}x_{\underline{\varepsilon}}^p$$

Références

[1] J.K. Arason, R. Aravire, R. Baeza, On some invariants of fields of characteristic $p>0$, J. Algebra 311 (2007) 714–735.
[2] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, 5e édition, Springer, 1997.