C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 171–174

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Degré d'une solution algébrique d'un tissu sur le plan projectif complexe

Degree of an algebraic solution of a d-web in the complex projective plane

El Hadji Cheikh Mbacké Diop

Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences et techniques, université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 17 novembre 2009
Accepté après révision le 9 janvier 2010
Disponible sur Internet le 21 février 2010

Présenté par Étienne Ghys

R É S U M É

Soit γ une solution algébrique de degré δ d'un d-tissu non-dicritique sur le plan projectif. On donne une formule qui relie d et δ à des indices dont le support est la réunion du lieu singuler de γ et de l'intersection de la courbe avec le discriminant du tissu.

A B S T R A C T

Let γ be an algebraic solution of a non-dicritical d-web in the complex projective plane. We give a formula relating global data (degree of the solution and of the web) to local data (some indices supported on the union of the singular set of γ with the intersection of the curve with the discriminant of the web).

1. Introduction

On considére un tissu ou un feuilletage sur le plan projectif comme une équation différentielle et l'expression « courbe solution » d'un feuilletage ou d'un tisu signifie « courbe solution de cette équation différentielle ». Etant donné un feuilletage algébrique $\mathcal{G}$ de degré n sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$ admettant une solution algébrique γ de degré δ, il existe plusieurs formules liant n et δ à des indices dont le support est contenu dans le lieu singulier de $\mathcal{G}$ (voir [2,3,7,8,10,4]). Nous voulons donner une formule analogue dans le cas des tissus.

1.1. Rappels de définitions et notations

On se référera à [5].

Soit $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ la variété des éléments de contact de $\mathbb{P}^2$: c'est le projectivisé du fibré tangent holomorphe de $\mathbb{P}^2$. On identifie $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ à la sous-variété de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}'^2$ d'équation $uX + vY + wZ = 0$, $[X, Y, Z]$ étant les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$ et $[u, v, w]$ les coordonnées homogènes sur le dual $\mathbb{P}'^2$ de $\mathbb{P}^2$. On définit un système de coordonnées (x, y, p) sur l'ouvert $Zv \neq 0$ de $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ en posant : $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, $p = -\frac{u}{v}$. Des systèmes de coordonnées analogues existent sur les ouverts $Zu \neq 0$, $Xv \neq 0$, $Xw \neq 0$, $Yu \neq 0$ et $Y.w \neq 0$.

Un d-tissu $\mathcal{W}$ de degré n sur $\mathbb{P}^2$ est définie par la donnée sur $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ d'un polynôme $K(X, Y, Z; u, v, w)$ bihomogène de degré n en (X, Y, Z) et de degré d en (u, v, w) qui vérifie la propriété suivante :

i) K n'est pas un multiple de Z ;

Adresse e-mail : elcheikh.diop@ucad.edu.sn.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.01.004

ii) la fonction $F(x,y,p) = K(x,y,1;p,-1,y-px)$ s'écrit : $F(x,y,p) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x,y)p^{d-i}$, avec $a_0 \not\equiv 0$, et si ses coefficients ont un facteur commun r, r est alors une unité ;
iii) si $d \geqslant 2$, le résultant des polynômes (en p) F et F'_p n'est pas identiquement nul.

L'entier n est égal au nombre de points où une droite générique de $\mathbb{P}^2$ est tangente à une solution de l'équation différentielle $F(x,y,y') = 0$.

Au tissu $\mathcal{W}$, on associe la surface $\mathcal{S}$ définie par $(uX + vY + wZ = 0; K(X,Y,Z;u,v,w) = 0)$. Dans les coordonnées (x,y,p), $\mathcal{S}$ est donnée par l'équation $F(x,y,p) = 0$.

Dans la suite, on supposera que $\mathcal{S}$ est lisse. Cette condition est vérifiée par les d-tissus génériques au sens de [11].

Notations. Soit π (respectivement π') la projection de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{P}^2$ (respectivement $\mathbb{P}'^2$). On notera $\mathcal{O}(-1)$ (respectivement $\mathcal{O}'(-1)$) le fibré tautologique en droites sur $\mathbb{P}^2$ (respectivement sur $\mathbb{P}'^2$), $\mathcal{O}(1)$ (respectivement $\mathcal{O}'(1)$) le dual de $\mathcal{O}(-1)$ (respectivement $\mathcal{O}'(-1)$), $\ell = \pi^{-1}O(-1)$, $\ell' = \pi'^{-1}\mathcal{O}'(-1)$, $\check{\ell}$ (respectivement $\check{\ell}'$) le dual de ℓ (respectivement ℓ'), $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$ et $\xi' = c_1(\mathcal{O}'(1))$, $\mathcal{O}(\delta) = (\mathcal{O}(1))^{\otimes\delta}$.

La courbe critique du tissu est l'ensemble $\mathcal{R}$ des points singuliers de π : elle est donnée dans les coordonnées (x,y,p) par les équations $(F(x,y,p) = 0,\ F'_p(x,y,p) = 0)$. En fait, $\mathcal{R}$ est l'ensemble des zéros d'une section $s_{\mathcal{R}}$ du fibré en droites $\check{\ell}'^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1}$, localement définie sur $\mathcal{S}$ par $F'_p = 0$ (voir [5], Proposition 3.5 et preuve du Théorème 4.6).

On dit que le tissu est non-dicritique lorsque la restriction à $\mathcal{R}$ de la fonction $F'_x + pF'_y$ n'est pas identiquement nulle.

Au tissu $\mathcal{W}$ on associe un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}$ qui a la propriété que les solutions de $\mathcal{W}$ sont les images par la projection sur $\mathbb{P}^2$ de celles de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Lorsque $\mathcal{W}$ est non-dicritique, $\widetilde{\mathcal{F}}$ est défini par un morphisme holomorphe $\mathbf{l} : \mathcal{M} \to T\mathcal{S}$, où $\mathcal{M} = \ell^{n-1} \otimes \ell'^{d-1}$, localement défini par le champ de vecteurs $X = F'_p(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}) - (F'_x + pF'_y)\frac{\partial}{\partial p}$. En outre, $\widetilde{\mathcal{F}}$ a un nombre fini de points singuliers, qui sont les éléments de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'$ étant la courbe co-critique du tissu, localement définie par les équations $(F(x,y,p) = 0,\ F'_x + pF'_y = 0)$.

1.2. Résultat

Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu, lisse et non-dicritique, de degré n sur $\mathbb{P}^2$. Supposons que $\mathcal{W}$ admette une solution algébrique irréductible γ de degré $\delta \geqslant 2$, qui se relève dans $\mathcal{S}$ suivant une courbe $\widetilde{\gamma}$ compacte, invariante par $\mathcal{F}$, dont l'intersection avec la courbe critique $\mathcal{R}$ est un ensemble fini.

L'image de $\widetilde{\gamma}$ par la projection π' sur $\mathbb{P}'^2$ est une courbe algébrique γ' dont on notera δ' le degré.

On note Σ l'ensemble des points singuliers de γ. Soit $\widehat{\pi} : \widehat{\gamma} \to \widetilde{\gamma}$ une normalisation de $\widetilde{\gamma}$; l'application $\rho = \pi \circ \widehat{\pi}$ est une normalisation de γ. Dans la suite on posera $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{R})$ et $\widehat{\Sigma} = \rho^{-1}(\Sigma)$.

Pour tout $\widehat{m} \in \widehat{\Sigma}$, on note $I_{\widehat{m}}$ l'indice de ramification de ρ en $\widehat{m}$ (voir [9]) : si ρ s'écrit en coordonnées locales $\rho(t) = (x(t), y(t))$ et $\widehat{m} = \rho(t_0)$, $I_{\widehat{m}} = \min(\nu_{t_0}(x'), \nu_{t_0}(y'))$, $\nu_{t_0}(h)$ désignant l'ordre d'une fonction h au point t_0 : $\nu_{t_0}(h) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_0}\frac{dh}{h}$, C_0 étant le bord d'un disque centré en t_0.

La section $s_{\mathcal{R}}$ se relève suivant une section $\widehat{s}_{\mathcal{R}}$ de $\widehat{\pi}^{-1}(\check{\ell}'^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1})$, dont l'ensemble des zéros est $\widehat{\mathcal{R}}$. Pour tout $\widehat{m} \in \widehat{\mathcal{R}}$, on note $\nu_{\widehat{m}}$ l'indice de $\widehat{s}_{\mathcal{R}}$ en ce point.

La courbe γ est l'ensemble des zéros d'une section holomorphe $\mathbf{s}$ du fibré $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\delta)$. Soient $\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\Sigma}$, $\widetilde{m}_\alpha = \widehat{\pi}(\widehat{m}_\alpha)$ et $m_\alpha = \rho(\widehat{m}_\alpha)$. Dans une trivialisation holomorphe $\sigma_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ au voisinage de m_α, la section $\mathbf{s}$ s'écrit : $\mathbf{s} = f\sigma_{\mathcal{E}}$. Etant données des coordonnées affines (x,y) sur $\mathbb{P}^2$ définies au voisinage de m_α et (x,y,p) des coordonnées de $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ définies au voisinage de $\widetilde{m}_\alpha$, on note μ_α l'ordre $\nu_{m_\alpha}(f'_y \circ \rho)$ de la fonction $f'_y \circ \rho$ en m_α.

Le résultat principal est le théorème suivant, dans lequel g désigne le genre géométrique de γ, c'est-à-dire celui de $\widehat{\gamma}$:

Théorème 1. *Soit $\mathcal{W}$ un d-tissu de degré n sur $\mathbb{P}^2$. Supposons que la surface associée $\mathcal{S}$ soit lisse et que $\mathcal{W}$ soit non-dicritique. Si γ est une solution algébrique de $\mathcal{W}$, irréducible de degré $\delta \geqslant 2$, alors*

$$(n + 2d - 3)\delta = (d-2)\left(2 - 2g + \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\Sigma}} I_{\widehat{m}_\alpha}\right) + \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\mathcal{R}}} \nu_{\widehat{m}_\alpha}.$$

2. Démonstration

Soit Γ une surface de Riemann, F et H des fibrés holomorphes en droites sur Γ, G un fibré vectoriel holomorphe de rang 2 sur Γ. Soit $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to H$ des homorphismes holomorphes qui induisent une suite exacte $0 \to F|_{\Gamma\setminus J} \xrightarrow{\alpha} G|_{\Gamma\setminus J} \xrightarrow{\beta} H|_{\Gamma\setminus J} \to 0$, J étant une partie finie de Γ.

Comme les fibrés vectoriels qui interviennent dans cette suite exacte ont pour base, Γ celle-ci définit, d'après [1], un élément η de la K-théorie relative $K(\Gamma, \Gamma \setminus J)$ qui est un relévement de l'élément $[G - F - H]$ de $K(\Gamma)$. Pour chaque $m_j \in J$, soit B_j un disque fermé centré en m_j de bord ∂B_j tel que $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $i \neq j$. D'après le théorème d'excision $K(\Gamma, \Gamma \setminus J)$

est isomorphe à la somme directe $\bigoplus K(B_j, \partial B_j)$. Posant $[\mathcal{T}, \partial\mathcal{T}] = \sum_j [B_j, \partial B_j]$, on appelle résidu de η et on note $Res(\eta)$ l'image $c_1(\eta) \frown [\mathcal{T}, \partial\mathcal{T}]$ de la classe de Chern $c_1(\eta)$ par la dualité d'Alexander $(.) \frown [\mathcal{T}, \partial\mathcal{T}] : H^2(\Gamma, \Gamma \setminus J, \mathbb{Z}) \to H_0(J, \mathbb{Z})$. Si τ_j est la composante de τ suivant $K(B_j, \partial B_j)$, $Res_j(\eta) = c_1(\eta_j) \frown [B_j, \partial B_j]$.

Soient $m_j \in J$, σ_F et σ_H des sections holomorphes respectivement de F et H au-dessus de B_j sans singularité et (g_1, g_2) une base holomorphe de sections locales de $G|_{B_j}$. Soit $\binom{A}{B}$ et (C, D) les matrices respectives de α et β dans ces bases. Observons que l'une au moins des deux expressions AD ou BC n'est pas nulle en dehors du point m_α, quitte à restreindre le disque B_α.

Le lemme suivant est un cas particulier du Théorème 5.2 de [6].

Lemme 1.

$$Res_j(\eta) = \begin{cases} \nu_{m_j} A - \nu_{m_j} D & \textit{si } AD \textit{ n'est pas identiquement nulle,} \\ \nu_{m_j} B - \nu_{m_j} C & \textit{si } BC \textit{ n'est pas identiquement nulle.} \end{cases}$$

Pour démontrer le Théorème 1, on appliquera le Lemme 1 ou le théorème de Poincaré–Hopf qui ne sont valables que sur une courbe lisse. Pour cela, on va tirer en arrière, par $\widehat{\pi}$, des fibrés et des morphismes définis sur $\widetilde{\gamma}$.

Proposition 2. $(n+1)\delta + (d-2)\delta' = \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\mathcal{R}}} \nu_{\widehat{m}_\alpha}$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{R} = s_{\mathcal{R}}^{-1}(0)$, notant $\widetilde{\gamma}.\mathcal{R}$ le nombre d'intersection de $\widetilde{\gamma}$ avec $\mathcal{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}.\mathcal{R} &= c_1\big(\check{\ell}'^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1}\big) \frown [\widetilde{\gamma}] \\ &= (n+1)\xi \frown [\gamma] + (d-2)\xi' \frown \big[\gamma'\big] \\ &= (n+1)\delta + (d-2)\delta'. \end{aligned}$$

Mais $\widetilde{\gamma}.\mathcal{R}$ est aussi égal à $\widehat{\pi}^\star(c_1(\check{\ell}'^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1})) \frown [\widehat{\gamma}]$ qui est, d'après le théorème de Poincaré–Hopf, la somme des indices $\nu_{\widehat{m}_\alpha}$ de la section $\widehat{s}_{\mathcal{R}}$ du fibré $\widehat{\pi}^{-1}(\check{\ell}'^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1})$ aux points $\widehat{m}_\alpha$ de $\widehat{\mathcal{R}}$.

Notons que $\nu_{\widehat{m}_\alpha}$ est égal à l'ordre en $\widehat{m}_\alpha$ de la fonction $F'_p \circ \widehat{\pi}$ car $\widehat{s}_{\mathcal{R}}$ est localement définie par $F'_p \circ \widehat{\pi} = 0$. □

Remarque 1. Si $d = 2$, le Théorème 1 est une conséquence immédiate de la Proposition 2 et s'écrit : $(n+1)\delta = \sum_{\widehat{m} \in \widehat{\mathcal{R}}} \nu_{\widehat{m}}$.

Proposition 3.

$$(n-1)\delta + (d-1)\delta' - \delta^2 + 3\delta = \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{A}} \nu_{\widehat{m}_\alpha} - \mu_{\widehat{m}_\alpha} = \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\mathcal{R}}} \nu_{\widehat{m}_\alpha} - \sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\Sigma}} \mu_{\widehat{m}_\alpha}.$$

Démonstration. La courbe γ est l'ensemble des zéros d'une section $\mathbf{s}$ du fibré $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\delta)$. Soit ∇ une connexion quelconque sur ce fibré :

i) la restriction $\nabla \mathbf{s}|_\gamma : T\mathbb{P}^2|_\gamma \to \mathcal{E}$ ne dépend pas du choix de ∇.
ii) Le morphisme $\nabla \mathbf{s}|_\gamma$ est surjectif au-dessus de la partie régulière γ_0 de γ et a pour noyau le fibré tangent holomorphe à γ_0.

Le fibré normal à γ_0 s'identifie ainsi naturellement à $\mathcal{E}|_{\gamma_0}$.

Posons $\widetilde{H} = \pi_\star \circ \mathbf{l}$, $\widetilde{\pi} = \pi|\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{A} = (\widetilde{\gamma} \cap \mathcal{R}) \cup \widetilde{\pi}^{-1}(\Sigma)$, $\widetilde{\gamma_0} = \widetilde{\gamma} \setminus \widetilde{A}$. Le morphisme $\nabla \mathbf{s}|_\gamma$ se relève suivant les morphismes $\widetilde{D} : \widetilde{\pi}^{-1}(T\mathbb{P}^2) \to \widetilde{\pi}^{-1}(\mathcal{E})$ et $\rho^{-1}(T\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\widehat{D}} \rho^{-1}(\mathcal{E}) \to 0$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{M}|_{\widetilde{\gamma_0}} \xrightarrow{\widetilde{H}} \widetilde{\pi}^{-1}\big(T\mathbb{P}^2\big)\big|_{\widetilde{\gamma_0}} \xrightarrow{\widetilde{D}} \widetilde{\pi}^{-1}(\mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma_0}} \to 0. \tag{1}$$

En posant $\widehat{A} = \widehat{\mathcal{R}} \cup \widehat{\Sigma}$ et $\widehat{\gamma_0} = \widehat{\gamma} \setminus \widehat{A}$, on déduit de (1) par relèvement, une suite exacte

$$0 \to \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{M})|\widehat{\gamma_0} \xrightarrow{\widehat{H}} \rho^{-1}\big(T\mathbb{P}^2\big)\big|\widehat{\gamma_0} \xrightarrow{\widehat{D}} \rho^{-1}(\mathcal{E})|\widehat{\gamma_0} \to 0. \tag{2}$$

On va calculer les composantes du résidu $Res(\tau)$ de l'élément τ de $K(\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma_0})$ définie par la suite exacte 2.

Soit $\widehat{m}_\alpha$ un point de $\widehat{A}$, $\widetilde{m}_\alpha = \widehat{\pi}(\widehat{m}_\alpha)$ et $m_\alpha = \rho(\widehat{m}_\alpha)$. Soit B_α un disque fermé centré en $\widehat{m}_\alpha$ de bord ∂B_α. Soit $\sigma_{\mathcal{E}}$ une trivialisation de $\mathcal{E}$ au voisinage de m_α. On a : $\mathbf{s} = f\sigma_{\mathcal{E}}$, $\nabla \mathbf{s}|\gamma = df \otimes \sigma_{\mathcal{E}}$, si (x, y) sont des coordonnées affines au voisinage de m_α, posons $\widehat{\partial x} = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial x}$, $\widehat{\partial y} = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial y}$ et $\widehat{\sigma}_{\mathcal{E}} = \rho^{-1}\sigma_{\mathcal{E}}$. La matrice de $\widehat{D}$ dans les bases $(\widehat{\partial x}, \widehat{\partial y})$ et $\widehat{\sigma}_{\mathcal{E}}$ est $(f'_x \circ \rho, f'_y \circ \rho)$. La matrice de $\widehat{H}$ dans les bases $\widehat{\nu}$ et $(\widehat{\partial x}, \widehat{\partial y})$ est : $\binom{F'_p \circ \widehat{\pi}}{(pF'_p) \circ \widehat{\pi}}$.

Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ étant défini au voisinage de $\widetilde{m}_\alpha$ par le champ de vecteurs $X = F'_p(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}) - (F'_x + pF'_y)\frac{\partial}{\partial p}$, la fonction $X(f \circ \pi) = F'_p(f'_x + pf'_y) \circ \pi$ est nulle le long de $\widetilde{\gamma}$. Comme l'intersection de $\widetilde{\gamma}$ avec $\mathcal{R}$ est finie, on a : $f'_x \circ \pi + pf'_y \circ \pi|\widetilde{\gamma} \equiv 0$. Les points singuliers de γ étant isolés, cette relation implique que si $\widetilde{U}_\alpha$ est un voisinage assez petit de $\widetilde{m}_\alpha$ dans $\widetilde{\gamma}$, alors $f'_y \circ \pi$ n'est nulle en aucun point de $\widetilde{U} \setminus \{\widetilde{m}_\alpha\}$. D'où $f'_y \circ \rho$ n'est nulle en aucun point de $B_\alpha \setminus \{\widehat{m}_\alpha\}$. D'autre part $F'_p \circ \widehat{\pi}$ n'est nulle en aucun point de $B_\alpha \setminus \{\widehat{m}_\alpha\}$.

D'après le Lemme 1, $Res_\alpha(\tau) = \nu_{m_\alpha}(F'_p \circ \widehat{\pi}) - \nu_{m_\alpha}(f'_y \circ \rho)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} Res(\tau) &= c_1\big(\big[\rho^{-1}\big(T\mathbb{P}^2\big) - \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{M}) - \rho^{-1}(\mathcal{E})\big]\big) \frown [\widehat{\gamma}] = \big(\pi^\star\big((n-1)\xi + 3\xi - \delta\xi\big) + (d-1)\pi'^\star\xi'\big) \frown [\widetilde{\gamma}] \\ &= \big((n-1) + 3 - \delta\big)\xi \frown [\gamma] + (d-1)\xi' \frown \big[\gamma'\big] = (n-1)\delta + (d-1)\delta' - \delta^2 + 3\delta. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.

$$\sum_{\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\Sigma}} I_{m_\alpha} - \mu_{m_\alpha} = 2g - 2 + 3\delta - \delta^2.$$

Démonstration. La suite exacte $0 \to T\widehat{\gamma}|_{\widehat{\gamma}\setminus\widehat{\Sigma}} \xrightarrow{\rho_\star} \rho^{-1}(T\mathbb{P}_2)|_{\widehat{\gamma}\setminus\widehat{\Sigma}} \xrightarrow{\widehat{D}} \rho^{-1}(\mathcal{E})|_{\widehat{\gamma}\setminus\widehat{\Sigma}} \to 0$ définit un relèvement θ de $[\rho^{-1}(T\mathbb{P}_2) - T\widehat{\gamma} - \rho^{-1}(\mathcal{E})]$ dans la K-théorie relative $K(\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma} \setminus Z)$.

Soit $\widehat{m}_\alpha \in \widehat{\Sigma}$, $m_\alpha = \rho(\widehat{m}_\alpha)$ et B_α un disque fermé centré en $\widehat{m}_\alpha$ dans $\widehat{\gamma}$. Soit (x, y, p) des coordonnées affines au voisinage de $\widehat{\pi}(\widehat{m}_\alpha)$ comme ci-dessus. En identifiant B_α à un disque de $\mathbb{C}$, ρ s'écrit en coordonnées $t \to (x(t), y(t))$, avec $y'(t) = p(t)x'(t)$, $\rho(t_0) = (x(m_\alpha), y(m_\alpha))$.

La matrice de $\widehat{D}$ dans les bases $(\widehat{\partial x}, \widehat{\partial y})$ et $\widehat{\sigma}_{\mathcal{E}}$ est $(f'_x \circ \rho, f'_y \circ \rho)$; celle de $\rho_\star$ est $\binom{x'(t)}{y'(t)}$.

On a déjà vu dans la démonstration de la Proposition 3 que $f'_y \circ \rho$ ne s'annule pas sur $B_\alpha \setminus \{\widehat{m}_\alpha\}$. Puisque $y'(t) = px'(t)$ et m_α est une singularité isolée de γ, $x'(t)$ ne s'annule pas sur $B_\alpha \setminus \{\widehat{m}_\alpha\}$.

En appliquant le Lemme 1, on a : $Res_\alpha(\theta) = \nu_{t_0}(x'(t)) - \nu_{t_0}(f'_y \circ \rho)$. Maintenant, puisque $y'(t) = px'(t)$, $\nu_{t_0}(x'(t)) \leqslant \nu_{t_0}(y'(t))$; par suite, $I_{\widehat{m}_\alpha} = \nu_{t_0}(x'(t))$. Finalement $Res_\alpha(\theta) = I_{m_\alpha} - \mu_{m_\alpha}$, d'où :

$$\begin{aligned} Res(\theta) &= \sum_{m_\alpha \in \widehat{\Sigma}} (I_{\widehat{m}_\alpha} - \mu_{\widehat{m}_\alpha}) = c_1\big(\big[\rho^{-1}(T\mathbb{P}_2) - T\widehat{\gamma} - \rho^{-1}(\mathcal{E})\big]\big) \frown [\widehat{\gamma}] \\ &= -(2 - 2g) + \big(c_1(T\mathbb{P}_2) - c_1(\mathcal{E})\big) \frown [\gamma] \\ &= 2g - 2 + 3\delta - \delta^2. \end{aligned}$$

Fin de la démonstration. Des Propositions 2 et 3 on déduit : $\delta' = \delta(\delta - 1) - \sum_{\widehat{m} \in \widehat{\Sigma}} \mu_{\widehat{m}}$ (a).

La Proposition 4 et (a) impliquent : $\delta' = 2g - 2 + 2\delta - \sum_{m_\alpha \in \widehat{\Sigma}} I_{\widehat{m}_\alpha}$ (b).

On obtient le Théorème 1 en utilisant l'expression de δ' donnée par (b) dans la Proposition 2. $\square$

Remarque 2. Dans le cas où $d = 1$, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{S}$ se projette suivant un feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ localement défini par le champ de vecteurs $Y = a_0(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ lorsque la surface $\mathcal{S}$ est définie par la condition $F(x, y, p) = a_0(x, y)p + a_1(x, y) = 0$.

L'ensemble $\widehat{S}$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{R}}$ et le Théorème 1 s'écrit : $(n-1)\delta = \sum_{\widehat{m} \in \widehat{\mathcal{R}}}(\nu_{\widehat{m}} - I_{\widehat{m}})$. Pour retrouver la formule donnée dans le Théorème 3.5 de [4], il suffit de voir que le nombre $\nu_{\widehat{m}} - I_{\widehat{m}}$ n'est rien d'autre que l'indice $\mu_m(w, \gamma_h)$ en $\widehat{m}$ du champ de vecteurs w défini le long d'un voisinage de $\widehat{m}$ dans $\widehat{\gamma}$ par $w = Y \circ \rho$.

Remerciement

L'auteur remercie Daniel Lehmann pour ses remarques et suggestions.

Références

[1] M.F. Atiyah, K-Theory, Notes by D.W. Anderson, Harvard University, 1964.
[2] M. Brunella, Some remarks on indices of holomorphic vector fields, Publ. Mat. 41 (2) (1997) 527–544.
[3] M. Carnicer, The Poincaré problem in the nondicritical case, Ann. of Math. (2) 140 (1994) 289–294.
[4] V. Cavalier, D. Lehmann, On the Poincaré inequality for one dimensional foliations, Compositio Math. 142 (2) (2006) 529–540.
[5] V. Cavalier, D. Lehmann, Introduction à l'étude globale des tissus sur une surface holomorphe, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (4) (2007) 1095–1133.
[6] V. Cavalier, D. Lehmann, M.G. Soares, Chern class of analytical sets and applications, K-Theory 34 (1) (2005) 35–69.
[7] D. Cerveau, A. Lins Neto, Holomorphic foliations in **CP**(**2**) having an invariant algebraic curve, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (4) (1991) 883–903.
[8] E. Esteves, S. Kleiman, Bounds on leaves of one-dimensional foliations, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 34 (1) (2003) 145–169.
[9] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley–Interscience, 1994, Chapter 2, p. 264.
[10] M.G. Soares, On the geometry of Poincaré's problem for one-dimensional projective foliations, An. Acad. Brasil. Ciênc. 73 (4) (2001) 475–482.
[11] Joseph Yartey, Number of singularities of a generic web on the complex projective plane, J. Dynam. Control Systems 11 (2) (2005) 218–296.