C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 185–188

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Probabilités/Statistique

Stationnarité et β-mélange des processus bilinéaires généraux à changement de régime markovien

Stationarity and β-mixing of general Markov-switching bilinear processes

Abdelouahab Bibi [a], Abdelhakim Aknouche [b]

[a] *Département de Mathématiques, UMC, Constantine, Algérie*
[b] *Faculté de Mathématiques, USTHB, Alger, Algérie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 avril 2008
Accepté après révision le 13 décembre 2009
Disponible sur Internet le 20 janvier 2010

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

Nous étudions la classe des modèles bilinéaires généraux dont les paramètres dépendent d'une chaîne de Markov non observable. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité stricte, au second ordre, d'existence des moments d'ordres supérieurs et nous proposons des conditions garantissant l'ergodicité géométrique.

ABSTRACT

We study the class of general bilinear models in which the parameters are allowed to depend on an unobserved Markov chain. Necessary and sufficient conditions for strict and second-order stationarity, existence of higher-order moments and conditions ensuring the geometric ergodicity are proposed.

1. Introduction

Nous étudions dans cette Note les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ générés par des équations de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z}: \quad X_t = a_0(s_t) + \sum_{i=1}^{p} a_i(s_t)X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ij}(s_t)X_{t-i}e_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j(s_t)e_{t-j}, \tag{1}$$

où $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire, ergodique, centré et de variance $\sigma^2 > 0$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $\mathbb{S} = \{1, \ldots, d\}$, stationnaire, homogène, irréductible et indépendante de $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $i, j \in \mathbb{S}$, soient $p_{ij} = P(s_t = j|s_{t-1} = i)$ les probabilités de transitions, $\pi(i) = P(s_t = i)$ les probabilités invariantes, $\pi^{(S)} = \{\pi(1), \ldots, \pi(d)\}$ la trace de cette probabilité sur $\mathbb{S}$. Etant donné $\{s_t = k\}$, $k \in \mathbb{S}$, X_t satisfait une représentation bilinéaire générale à coefficients $\{a_i(k), 0 \leqslant i \leqslant p\}$, $\{b_i(k), 0 \leqslant i \leqslant q\}$ et $\{c_{ij}(k), 1 \leqslant j \leqslant q, 1 \leqslant i \leqslant p\}$ et que l'on note *MS-BL*(p, q, p, q). Le modèle (1) se rattache à une classe de processus non linéaires à changement de régime markovien introduite par Hamilton [6]. Il s'interprète également comme une extension dynamique des processus dits à chaîne de Markov cachée introduits par Baum et Petrie [1] et dans lesquels les observations sont supposées indépendantes conditionnellement à une chaîne de Markov non observable. Notons que les modèles *P-BL* (modèles bilinéaires à coefficients

Adresses e-mail : a.bibi@umc.edu.dz (A. Bibi), aknouche_ab@yahoo.com (A. Aknouche).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.12.015

périodiques) étudiés récemment par Bibi et Lessak [2] sont des cas particuliers de (1). Dans cette Note, on s'intéresse aux propriétés de stationnarité (stricte et au second ordre), d'ergodicité géométrique du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ généré par (1) et ses solutions $\Im_t$-mesurables où $\Im_t = \sigma(\{e_{t-j}, s_{t-j}\},\ j \geqslant 0)$. De telles solutions sont appelées causales.

2. Stationnarité stricte

Posons $\underline{X}_t := (X_t, \dots, X_{t-p+1}, e_t, \dots, e_{t-q+1})'_{r\times 1}$, $\underline{a}_0(s_t) := (a_0(s_t), \underline{O}'_{(r-1)})'_{r\times 1}$, $\underline{b}_0(s_t) := (b_0(s_t), \underline{O}'_{(p-1)}, 1, \underline{O}'_{(q-1)})'_{r\times 1}$, $\underline{e}_t := e_t\underline{b}_0(s_t)$, $(A_j(s_t))_{0\leqslant j\leqslant q}$ des matrices $r\times r$ appropriées, $\underline{H}' = (1, \underline{O}'_{(r-1)})_{1\times r}$ où $r = p+q$ et $\underline{O}_{(n)}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$. Avec ces notations, le modèle (1) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\forall t \in \mathbb{Z}:\quad \underline{X}_t = \left(A_0(s_t) + \sum_{j=1}^{q} e_{t-j}A_j(s_t)\right)\underline{X}_{t-1} + \underline{e}_t. \tag{2}$$

Les propriétés du processus (1) peuvent être déduites à l'aide de la transformation $X_t = H'\underline{X}_t + a_0(s_t)$. La représentation (2) est souvent caractérisée par les concepts de contrôlabilité et d'observabilité (cf. Bibi et Oyet [3]) et par son plus grand exposant de Lyapunov. Ces concepts sont liés aux matrices $\{A_i(s_t),\ i \in \mathbb{I} = \{0, 1, \dots, q\}\}$ et aux vecteurs $\{\underline{H}, \underline{b}_0(s_t), \underline{a}_0(s_t)\}$. Rappelons ici, que la représentation (2) est dite contrôlable (resp. observable) si les matrices $\mathcal{C}_r(s_t) := [\underline{c}_1(s_t) \vdots \underline{c}_2(s_t) \vdots \dots \vdots \underline{c}_r(s_t)]$ (resp. $\mathcal{O}_r(s_t) := [\underline{O}_1(s_t) \vdots \underline{O}_2(s_t) \vdots \dots \vdots \underline{O}_r(s_t)]$ ont des rangs égaux à r presque sûrement (*p.s.*) où les matrices $(\underline{c}_j(s_t))_{1\leqslant j\leqslant r}$ (resp. $(\underline{O}_j(s_t))_{1\leqslant j\leqslant r}$) sont définies récursivement par : $\underline{c}_1(s_t) = \underline{b}_0(s_t)$ et $\underline{c}_j(s_t) = [A_i(s_t)\underline{c}_{j-1}(s_{t-j+1}); i \in \mathbb{I}]$ (resp. $\underline{O}_1(s_t) = \underline{H}$ et $\underline{O}_j(s_t) = [A_i(s_t)\underline{O}_{j-1}(s_{t-j+1}); i \in \mathbb{I}]$). L' exposant de Lyapunov noté $\gamma_L(A)$ associé à la suite strictement stationnaire et ergodique $(A_t := A_0(s_t) + \sum_{j=1}^{q} e_{t-j}A_j(s_t))_{t\in\mathbb{Z}}$ est défini par $\gamma_L(A) := \lim_{t\to\infty} E\{\frac{1}{t}\log\|\underline{X}_t(t)\|\}$ où $\underline{X}_t(k) := \{\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j}\}$, $k \geqslant 1$ et où $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^r$ ainsi que la norme matricielle associée. L'existence de $\gamma_L(A)$ est garantie par la finitude des quantités $E_{\pi(S)}\{\log^+\|\underline{e}_t\|\}$ et $E_{\pi(S)}\{\log^+\|A_t\|\}$ où $\log^+ x = \max(0, \log x)$, $x > 0$. Soit $(\underline{Z}_t(\underline{X}_0))_{t\geqslant 1}$ le processus défini récursivement par (2) en initialisant par un vecteur aléatoire $\underline{X}_0 \in \mathbb{R}^r$ borné. La représentation (2) est dite asymptotiquement stable si (2) admet une solution strictement stationnaire et $p\lim_{t\to\infty}\|\underline{X}_t - \underline{Z}_t(\underline{X}_0)\| = 0$. Elle est dite géométriquement stable si $\|\underline{X}_t - \underline{Z}_t(\underline{X}_0)\| \leqslant K\rho^t$, $p.s.$ où K est une constante positive et $\rho \in]0, 1[$.

Théorème 2.1. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par* (1) *et $(\underline{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sa représentation vectorielle* (2)*. Alors*

1. $\gamma_L(A) < 0$ *est une condition suffisante pour que* (2) *admet une unique solution causale, strictement stationnaire, ergodique et géométriquement stable donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{Z}:\quad \underline{X}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{X}_t(k)\underline{e}_{t-k} + \underline{e}_t, \tag{3}$$

où la série (3) *converge absolument $p.s.$*

2. *Inversement, si la représentation* (2) *est contrôlable, observable et admet une solution strictement stationnaire asymptotiquement stable, alors $\gamma_L(A) < 0$.*

Démonstration.

1. On montre l'assertion 1, en utilisant le théorème (1.1) de Bougerol et Picard [4].
2. S'il existe une solution strictement stationnaire asymptotiquement stable, alors on a $p\lim_{k\to\infty}|H'\underline{X}_t(k)\underline{e}_{t-k}| = 0$. En écrivant $\underline{X}_t(k)\underline{e}_{t-k} = \mathcal{C}_{k+1}(s_t)\underline{e}(t-k)$ où $\underline{e}(t)$ est un vecteur approprié (cf. [3]). Comme $rg\mathcal{C}_{k+1}(s_t) = rg\mathcal{C}_r(s_t)$ pour tout $k > r$, alors, sous les conditions de contrôlabilité et observabilité nous obtiendrons $p\lim_{n\to\infty}\|\underline{X}_t(t)\| = 0$. La preuve s'achève en appliquant le lemme (3.4) de Bougerol et Picard [4]. □

Remarque 2.1. Il est important de noter qu'en utilisant une preuve similaire de Francq et Zakoïan [5], on montre que $\gamma_L(A)$ est indépendant de la partie moyenne mobile du modèle (1). En particulier, pour le modèle *MS-BL*(1, 1, 1, 1) la condition $\gamma_L(A) < 0$ s'écrit simplement

$$\gamma_L(A) := E_{\pi(S)}\left\{\log\left|a_1(s_t) + c_{11}(s_t)e_t\right|\right\} = \sum_{i=1}^{d} \pi(i)E\left\{\log\left|a_1(i) + c_{11}(i)e_t\right|\right\} < 0. \tag{4}$$

Ce qui montre que l'existence de régimes explosifs ou intégrés (i.e., $E\{\log|a_1(i) + c_{11}(i)e_t|\} \geqslant 0$ pour certain i) est compatible avec la stationnarité stricte. Si $a_1(k)b_0(k) \neq 0$ (ou $c_{11}(k)b_0(k) \neq 0$) pour tout $k \in \mathbb{S}$ le modèle est contrôlable et observable et s'il existe une solution asymptotiquement stable alors $\gamma_L(A) < 0$ est nécessair pour l'existence d'une solution strictement stationnaire.

3. Stationnarité au second ordre

Dans cette section, nous étudions la structure du second ordre des processus *MS-BL* superdiagonaux pour lesquels $c_{ij} = 0$ si $j < i$. Ces processus admettent la représentation suivante

$$\underline{X}_t = A_0(s_t)\underline{X}_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} e_{t-j} C_j(s_t)\underline{X}_{t-j} + \underline{e}_t \tag{5}$$

où $(C_j(.))_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont des matrices $r \times r$. Soit $s = r(q+1)$ et posons $\underline{Y}_t := (\underline{X}'_t, e_t\underline{X}'_t, \ldots, e_{t-q+1}\underline{X}'_{t-q+1})'_{s\times 1}$. Alors on vérifie aisément que

$$\underline{Y}_t = M_t\underline{Y}_{t-1} + \underline{\eta}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

où $\underline{\eta}_t = e_t\underline{b}_0^{(1)}(s_t) + e_t^2\underline{b}_0^{(2)}(s_t)$ avec $\underline{b}_0^{(1)}(.)$ et $\underline{b}_0^{(2)}(.)$ sont deux vecteurs appropriés de $\mathbb{R}^s$ et

$$M_t := \begin{pmatrix} A_0(s_t) & C_1(s_t) & C_2(s_t) & \ldots & \ldots & C_q(s_t) \\ e_tA_0(s_t) & e_tC_1(s_t) & e_tC_2(s_t) & \ldots & \ldots & e_tC_q(s_t) \\ O_{(r)} & I_{(r)} & O_{(r)} & \ldots & \ldots & O_{(r)} \\ O_{(r)} & O_{(r)} & I_{(r)} & \ddots & O_{(r)} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{(r)} & \ldots & \ldots & O_{(r)} & I_{(r)} & O_{(r)} \end{pmatrix}_{s\times s},$$

$O_{(n)}$ désigne la matrice $n \times n$ nulle et $I_{(n)}$ la matrice identité. Par analogie avec les définitions précédentes, soient $\underline{Y}_0 \in \mathbb{L}_2$ un vecteur de $\mathbb{R}^s$ indépendant de e_t, $(\underline{Z}_t(\underline{Y}_0))_{t\geqslant 1}$ le processus défini récursivement par (6) en initialisant par $\underline{Y}_0$. Ainsi, la représentation (6) est dite asymptotiquement stable en moyenne s'il existe un processus $(\underline{Y}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire au second ordre vérifiant (6) et $\lim_{t\to\infty} E\{\|\underline{Y}_t - \underline{Z}_t(\underline{Y}_0)\|^2\} = 0$. Elle est dite géométriquement stable en moyenne si $E\{\|\underline{Y}_t - \underline{Z}_t(\underline{Y}_0)\|^2\} \leqslant K\rho^t$ où K est une constante positive et $\rho \in]0,1[$. Posons $M^{(r)}(i) := E\{M_t^{\otimes r}|s_t = i\}$, $M^{(r)} = \operatorname{diag}\{M^{(r)}(1), \ldots, M^{(r)}(d)\}P' \otimes I_{(s^r)}$, où $\otimes$ désigne le produit tensoriel. Soit

[**A.0**] $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus *i.i.d.*

Théorème 3.1. *Sous* **A.0** *et si* $E\{e_t^3\} = 0$, $E\{e_t^4\} = \kappa_4 < \infty$, *on a*

1. *si* $\rho(M^{(2)}) < 1$ *alors* (6) *admet une et une seule solution causale strictement stationnaire donnée par*
$$\underline{Y}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{Y}_t(k)\underline{\eta}_{t-k} + \underline{\eta}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$
où la série (7) *converge absolument p.s. et dans* $\mathbb{L}_2$. *De plus le processus solution est géométriquement stable et ergodique* ;
2. *inversement, si* (6) *est contrôlable et observable et admet une solution stationnaire asymptotiquement stable en moyenne alors* $\rho(M^{(2)}) < 1$.

Démonstration. Ecrivons $\underline{Y}_t = \sum_{k=0}^{n} \underline{Y}_t(k)\underline{\eta}_{t-k} + \underline{Y}_t(n)\underline{Y}_{t-n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$, et tenant compte l'orthogonalité des processus $\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_t(k)\underline{\eta}_{t-k}$ et $\underline{Y}_t(n)\underline{Y}_{t-n-1}$ alors la preuve de l'assertion 1 s'achève en suivant Francq et Zakoïan [5]. D'autre part, s'il existe une solution stationnaire asymptotiquement stable en moyenne alors $\lim_{t\to\infty} E\{\|\underline{Y}_t(t)\underline{b}_0^{(1)}(s_1)\|^2 + \|\underline{Y}_t(t)\underline{b}_0^{(2)}(s_1)\|^2\} = 0$. Sous la condition de contrôlabilité, on a $\lim_{t\to\infty} E\{\|\underline{Y}_t(t)\|^2\} = 0$. □

Exemple 3.1 *(Le processus MS-ARMA).* Dans ce cas $C_j(s_t) = 0$, $j = 1, \ldots, q$ et on a $\rho(M^{(2)}) = \rho(M)$ où M est la matrice obtenue en remplaçant $M^{(2)}(k)$ par $A_0^{\otimes 2}(k)$ dans $M^{(2)}$ et on retrouve ainsi la condition de stationnarité donnée par Francq et Zakoïan (cf. [5]).

Exemple 3.2. Lorsque $q = 1$, on a $\rho(M^{(2)}) = \rho(M)$ ou M est la matrice obtenue en remplaçant $M^{(2)}(k)$ par $A_0^{\otimes 2}(k) + \sigma^2 C_1^{\otimes 2}(k)$. Ainsi, pour le modèle *MS-BL*$(1, q, 1, 1)$, les matrices $M^{(2)}(k)$ sont remplacées par $a_1^2(k) + \sigma^2 c_{11}^2(k)$.

Remarque 3.1. Le théorème précédent donne un moyen pratique pour vérifier la stabilité des processus *MS-BL*. Il donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour que la loi strictement stationnaire possède un moment d'ordre 2. De plus, si $E\{e_t^{2(r+1)}\} < +\infty$ et $E\{e_t^{2k+1}\} = 0$, $k = 0, \ldots, r$, alors sous la condition $\rho(M^{(r)}) < 1$ l'équation (6) possède une unique solution causale, strictement stationnaire, ergodique, géométriquement stable et admettant des moments d'ordre r.

4. Propriétés d'ergodicité géométrique et de β-mélange

Notons que sous **A.0** le processus $\underline{Z}_t := (\underline{X}'_t, s_t)'$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{R}^r \times \mathbb{S}$, soient $Q^{(t)}(.,.)$ son noyau de transition (i.e., $Q^{(t)}(\underline{z}, A) = Q(\underline{Z}_t \in A | \underline{Z}_0 = \underline{z}_0)$). Faisons l'hypothèse suivante :

[**A.1**] La loi conditionnelle de $\underline{X}_t$ sachant $\mathcal{X}_t := \{\underline{X}_{t-1}, s_t\}$ admet une densité $g(\underline{x}|\mathcal{X}_t)$ par rapport à une même mesure dominante ϑ sur $\mathbb{R}^r$.

Alors il est montré dans Meyn et Tweedie [7] que si la chaîne $(\underline{Z}_t)_{t\geqslant 1}$ est ϕ-irréductible, apériodique, et si son noyau de transition $Q^{(t)}(.,.)$ vérifie une condition de dérive, i.e., s' il existe une fonction réelle $V \geqslant 1$, des constantes positives $K < 1$ et $L < +\infty$ et un compact C tels que $Q^{(t)}V(\underline{z}) := E\{V(\underline{Z}_t)|\underline{Z}_0 = \underline{z}\} \leqslant KV(\underline{z}) + L\mathbb{I}_C(\underline{z})$ alors la chaîne $(\underline{Z}_t)_{t\geqslant 1}$ est géométriquement ergodique et est donc β-mélangeante. Notons ici, bien que la représentation (2) peut être utilisée directement dans la proposition 4.2.2 de Meyn et Tweedie [7], elle est généralement non commode. Cependant, il est plus facile de considérer des représentations markoviennes minimales (cf. [8]). La proposition 4.1 ci-dessous donne des conditions suffisantes garantissant l'ergodicité géométrique de la chaîne associée au processus *MS-BL*$(1,0,1,1)$.

Proposition 4.1. *Sous les conditions* **A.0** *et* **A.1** *et si la condition* (4) *est vérifiée alors la chaîne* $\underline{Z}_t := (Y_t, s_t)'$ *où*

$$\begin{cases} Y_t = a_t Y_{t-1} + \eta_t, \quad \text{où } \eta_t = a_t b_0(s_t)e_t, a_t = a_1(s_{t+1}) + c_{11}(s_{t+1})e_t \\ \quad \text{et} \\ X_t = Y_{t-1} + b_0(s_t)e_t + a_0(s_t) \end{cases} \tag{8}$$

est géométriquement ergodique et est donc β-mélangeante.

5. Modèles *MS-ARMA* à innovations bilinéaires

Considérons le modèle *ARMA* à changement de régime markovien (*MS-ARMA*) et à innovations *MS-BL*, i.e.,

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i(s_t)X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j(s_t)e_{t-j} + e_t \quad \text{et} \quad e_t = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=j+1}^{q} b_{i,j}(s_t)e_{t-i}\eta_{t-j} + \eta_t \tag{9}$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite $i.i.d.$ centrée de variance σ^2. Alors l'équation (9) est équivalente à

$$\underline{X}_t = \left(B_0(s_t) + \sum_{j=1}^{p} B_j(s_t)\ \eta_{t-j}\right)\underline{X}_{t-1} + \underline{\eta}_t$$

où $\underline{X}_t = (X_t, \dots, X_{t-p+1}, e_t, \dots, e_{t-q}, \eta_t, \dots, \eta_{t-p+1})'$, $(B_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ sont des matrices appropriées et $(\underline{\eta}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite de vecteurs aléatoires $i.i.d.$ On a le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Sous* **A.1** *et si* $\gamma_L(B) < 0$ *où* $B = (B_0(s_t) + \sum_{j=1}^{p} B_j(s_t)\ \eta_{t-j})_{t\in\mathbb{Z}}$, *alors la chaîne* $\underline{Z}_t = (\underline{X}'_t, s_t)'$ *admet une solution strictement stationnaire, géométriquement ergodique et est donc β-mélangeante.*

Références

[1] L.E. Baum, T. Petrie, Statistical inference for probabilistic functions of finite state space Markov chains, Ann. Math. Statis. 30 (1966) 1554–1563.
[2] A. Bibi, R. Lessak, On stationarity and β-mixing of periodic bilinear processes, Statist. Probab. Lett. 79 (2009) 79–87.
[3] A. Bibi, A. Oyet, A note on the properties of some time-varying bilinear models, Statist. Probab. Lett. 58 (2002) 399–411.
[4] P. Bougerol, N. Picard, Strict stationarity of generalized autoregressive processes, Ann. Probab. 20 (1992) 1714–1729.
[5] C. Francq, J.M. Zakoïan, Stationarity of multivariate Markov-switching ARMA models, J. of Econometrics 102 (2001) 339–364.
[6] J.D. Hamilton, A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, Econometrica 57 (1989) 357–384.
[7] S.P. Meyn, R.L. Tweedie, Markov Chains and Stochastic Stability, second ed., Cambridge University Press, 2009.
[8] D.T. Pham, Bilinear Markovian representation of bilinear models, Stoch. Proc. Appl. 20 (1985) 295–306.