



Analyse numérique

Approximation numérique d'une classe de problèmes en homogénéisation stochastique [☆]

Numerical approximation of a class of problems in stochastic homogenization

Ronan Costeauec ^{a,b}, Claude Le Bris ^{a,b}, Frédéric Legoll ^{c,b}

^a CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, université Paris-Est, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

^b INRIA Rocquencourt, MICMAC team-project, domaine de Voluceau, B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

^c Institut Navier, LAMI, École nationale des ponts et chaussées, université Paris-Est, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 21 juin 2009

Accepté le 28 octobre 2009

Disponible sur Internet le 29 décembre 2009

Présenté par Evariste Sanchez-Palencia

RÉSUMÉ

Nous étudions dans cette Note une méthode numérique pour le calcul de la matrice homogénéisée associée à un problème elliptique stochastique pouvant s'écrire comme une petite perturbation d'un problème périodique. L'objectif est d'adapter l'approche introduite dans [X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 34–63] au cas où les problèmes des correcteurs sont résolus numériquement, et de vérifier expérimentalement l'intérêt et la précision de cette approche.

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

In this Note, we study a numerical strategy for the computation of the homogenized matrix for a stochastic elliptic problem that is a small perturbation of a periodic problem. We adapt the analysis introduced in [X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 34–63] to the case when the corrector problems are numerically solved, and we computationally assess the interest and the accuracy of the approach.

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We study in this Note a numerical strategy for the stochastic homogenization of an elliptic boundary problem, in the case when the random coefficients are a small perturbation of deterministic periodic coefficients. More precisely, we follow [2,3] and consider Eq. (1) below, for an elliptic bounded periodic matrix A , and for a diffeomorphism Φ whose gradient is stationary in the sense of (2) below. The stochastic formalism is identical to that of [2,3], and briefly recalled in the French version.

In the case when Φ is a perturbation of the identity, that is $\Phi(x, \omega) = x + \eta\Psi(x, \omega) + O(\eta^2)$, it is possible to efficiently compute an approximation of the homogenized matrix A_* (see [3]): $A_* = A^0 + \eta A^1 + O(\eta^2)$, where A^0 and A^1 are known

[☆] Les auteurs ont bénéficié du support financier de l'ONR, contrat N00014-09-1-0470.

Adresses e-mail : costaour@cermics.enpc.fr (R. Costeauec), lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris), legoll@lami.enpc.fr (F. Legoll).

from the solution of two *deterministic periodic* corrector problems, whereas A_\star depends on the solution of a stochastic equation posed on \mathbb{R}^d , which is therefore delicate and expensive to compute.

In this Note, we show that such an approximation result also holds in the case when the corrector problems are discretized, that is they are solved on the truncated domain $Q_N = [0, N]^d \subset \mathbb{R}^d$, using a Finite Element method based on a mesh of size h . In that discrete setting, the deterministic matrix A_\star is approximated by a stochastic matrix $A_\star^{h,N}(\omega)$. Estimating the error introduced by the truncation in the series in power of η brings up questions related to variance, that we analyze and discuss. Indeed, it turns out that two natural quantities can be considered to approximate $A_\star^{h,N}(\omega)$ when $\eta \rightarrow 0$, namely a stochastic matrix $A_{\text{app}}^{h,N}(\omega)$ and a deterministic matrix \bar{A}_{app}^h . We hence introduce the estimators (see (16) and (17) below)

$$e^{h,N}(\omega) = \eta^{-2} (A_\star^{h,N}(\omega) - A_{\text{app}}^{h,N}(\omega)) \quad \text{and} \quad \bar{e}^{h,N}(\omega) = \eta^{-2} (A_\star^{h,N}(\omega) - \bar{A}_{\text{app}}^h),$$

which are two different numerical approximations of $\eta^{-2}(A_\star - A^0 - \eta A^1)$.

The approximation $A_{\text{app}}^{h,N}(\omega)$ is useful for the *analysis* of the method, since the associated estimator $e^{h,N}(\omega)$ has a bounded expectation and variance when $\eta \rightarrow 0$, which is not the case with the estimator $\bar{e}^{h,N}(\omega)$. On the other hand, the objective of the numerical *practice* is different, and leads to rather working with \bar{A}_{app}^h , which is cheaper to evaluate.

Numerical simulations performed on a representative example illustrate the efficiency of the approach: we observe that, for any fixed $h > 0$ and $N < \infty$, the quantity $e^{h,N}(\omega)$ is bounded by a small constant when $\eta \rightarrow 0$.

1. Introduction

Nous étudions dans cette Note une stratégie numérique pour l’homogénéisation d’un problème aux limites elliptique dont les coefficients sont stochastiques. On s’intéresse ici au cas où l’équation considérée est une *petite perturbation* aléatoire d’un problème déterministe périodique. Plus précisément, on se place dans le cadre étudié dans [2,3], et on considère l’équation

$$-\operatorname{div} \left(A \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}, \tag{1}$$

où la matrice A est périodique et où, presque sûrement, Φ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , dont le gradient est stationnaire au sens de (2) ci-dessous. On s’intéresse au problème homogénéisé obtenu dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le cas où Φ est une perturbation de l’identité.

On rappelle brièvement le cadre de travail adopté dans [2,3]. Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, d\mathbb{P})$, on note $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$ son espérance. On suppose que le groupe $(\mathbb{Z}^d, +)$ agit sur Ω , par une action notée $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$, qui préserve la mesure \mathbb{P} et est ergodique. On dira que $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$ est *stationnaire* si elle vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x+k, \omega) = F(x, \tau_k \omega) \quad \text{presque partout en } x, \text{ presque sûrement.} \tag{2}$$

Pour toute la suite, on se donne une matrice $A(y) = [a_{ij}(y)] \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d \times d}$, fonction Q -périodique ($Q = [0, 1]^d$) et telle que, pour un certain $\gamma > 0$, on ait $\xi^T A(y) \xi \geq \gamma |\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et presque partout en $y \in \mathbb{R}^d$. On supposera pour simplifier que cette matrice est symétrique. On se donne aussi Φ tel que, pour presque tout ω , l’application $\Phi(\cdot, \omega)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , vérifiant d’une part que $\operatorname{Ess\,Inf}_{\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d} [\det(\nabla \Phi(x, \omega))] = \nu > 0$, d’autre part que $\operatorname{Ess\,Sup}_{\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d} (|\nabla \Phi(x, \omega)|) = M < \infty$, et enfin que $\nabla \Phi(x, \omega)$ est stationnaire au sens de (2).

Dans [2], les auteurs montrent le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Pour tout $p \in \mathbb{R}^d$ fixé, le système*

$$\begin{cases} \operatorname{div} [A(\Phi^{-1}(y, \omega))(p + \nabla w_p)] = 0, & \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} \nabla w_p(y, \cdot) dy \right) = 0, \\ w_p(y, \omega) = \tilde{w}_p(\Phi^{-1}(y, \omega), \omega), & \nabla \tilde{w}_p \text{ est stationnaire au sens de (2),} \end{cases} \tag{3}$$

admet dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, L^2(\Omega))$ une solution, qui est unique à l’ajout d’une constante (aléatoire) près.

De plus, la matrice homogénéisée A_\star associée au problème (1) est définie par

$$(A_\star)_{ij} = \det \left(\mathbb{E} \left(\int_Q \nabla \Phi(z, \cdot) dz \right) \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\int_{\Phi(Q, \cdot)} (e_i + \nabla w_{e_i}(y, \cdot))^T A(\Phi^{-1}(y, \cdot)) e_j dy \right).$$

Lorsque Φ est une perturbation de l’identité, soit

$$\Phi(x, \omega) = x + \eta \Psi(x, \omega) + O(\eta^2), \tag{4}$$

on peut développer la solution du problème du correcteur (3), comme montré dans [3] (notons qu'un autre cadre de travail, lui aussi perturbatif quoique différent, est étudié dans [1]). Plus précisément, on a $\tilde{w}_p(x, \omega) = w_p^0(x) + \eta w_p^1(x, \omega) + O(\eta^2)$, où w_p^0 vérifie

$$-\operatorname{div}[A(p + \nabla w_p^0)] = 0, \quad w_p^0 \text{ est } Q\text{-périodique}, \quad (5)$$

tandis que w_p^1 est donné par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A \nabla w_p^1] = \operatorname{div}[-A \nabla \Psi \nabla w_p^0 - (\nabla \Psi^T - (\operatorname{div} \Psi) \operatorname{Id}) A(p + \nabla w_p^0)], \\ \nabla w_p^1 \text{ est stationnaire et } \mathbb{E} \left(\int_Q \nabla w_p^1 \right) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Le problème en w_p^1 est stochastique, donc coûteux et délicat à résoudre. Cependant, comme remarqué dans [3], la fonction $\bar{w}_p^1 = \mathbb{E}(w_p^1)$ est Q -périodique et vérifie le problème déterministe

$$-\operatorname{div}[A \nabla \bar{w}_p^1] = \operatorname{div}[-A \mathbb{E}(\nabla \Psi) \nabla w_p^0 - (\mathbb{E}(\nabla \Psi^T) - \mathbb{E}(\operatorname{div} \Psi) \operatorname{Id}) A(p + \nabla w_p^0)], \quad (7)$$

qui est bien plus facile à résoudre que (6). De plus, la connaissance de w_p^0 et \bar{w}_p^1 suffit pour obtenir une approximation de la matrice homogénéisée A_\star au premier ordre en η . On a en effet

$$A_\star = A^0 + \eta A^1 + O(\eta^2), \quad (8)$$

avec $A_{ij}^0 = \int_Q (e_i + \nabla w_{e_i}^0)^T A e_j$ et

$$A_{ij}^1 = - \int_Q \mathbb{E}(\operatorname{div} \Psi) A_{ij}^0 + \int_Q (e_i + \nabla w_{e_i}^0)^T A e_j \mathbb{E}(\operatorname{div} \Psi) + \int_Q (\nabla \bar{w}_{e_i}^1 - \mathbb{E}(\nabla \Psi) \nabla w_{e_i}^0)^T A e_j.$$

2. Approximation numérique

Dans cette section, nous établissons un résultat analogue à (8), dans le cas où les problèmes des correcteurs sont résolus *numériquement*. Pour h fixé, on se donne une triangulation périodique $\mathcal{T}_h^{(Q)}$ de Q . Par périodicité, on obtient ainsi la triangulation $\mathcal{T}_h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (k + \mathcal{T}_h^{(Q)})$ de \mathbb{R}^d . Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $Q_N = [0, N]^d$, et $\mathcal{T}_h^N = \mathcal{T}_h \cap Q_N$ la triangulation associée. En s'inspirant de [4,6] pour discrétiser (3), on considère le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{w}_p^{h,N}(\cdot, \omega) \in V_h^{\operatorname{per}}(Q_N) \text{ tel que, pour tout } \tilde{v}_h \in V_h^{\operatorname{per}}(Q_N), \\ \int_{Q_N} \det(\nabla \Phi) (\nabla \tilde{v}_h)^T (\nabla \Phi)^{-T} A(p + (\nabla \Phi)^{-1} \nabla \tilde{w}_p^{h,N}(\cdot, \omega)) = 0 \text{ presque sûrement,} \end{cases} \quad (9)$$

où $V_h^{\operatorname{per}}(Q_N)$ est l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}^d , Q_N -périodiques, et dont la restriction à Q_N appartient à un espace d'éléments finis périodiques construit à partir de \mathcal{T}_h^N . On a choisi de travailler avec \tilde{w}_p plutôt qu'avec w_p car les propriétés de stationnarité de (3) portent sur \tilde{w}_p . On introduit ensuite la matrice

$$(A_\star^{h,N})_{ij}(\omega) = \det \left(\frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} \nabla \Phi \right)^{-1} \frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} \det(\nabla \Phi) (e_i + (\nabla \Phi)^{-1} \nabla \tilde{w}_{e_i}^{h,N})^T A e_j. \quad (10)$$

On fait maintenant l'hypothèse perturbative (4). En insérant le développement limité formel $\tilde{w}_p^{h,N} = w_p^{0,h,N} + \eta w_p^{1,h,N} + O(\eta^2)$ dans (9), on obtient que $w_p^{0,h,N}$ est indépendant de N (on le note désormais $w_p^{0,h}$), et que $w_p^{0,h}$ et $w_p^{1,h,N}$ sont solutions des problèmes

$$\text{Trouver } w_p^{0,h} \in V_h^{\operatorname{per}}(Q) \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h^{\operatorname{per}}(Q), \quad \int_Q (\nabla v_h)^T A(p + \nabla w_p^{0,h}) = 0, \quad (11)$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_p^{1,h,N}(\cdot, \omega) \in V_h^{\operatorname{per}}(Q_N) \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h^{\operatorname{per}}(Q_N), \text{ et presque sûrement,} \\ \int_{Q_N} (\nabla v_h)^T A \nabla w_p^{1,h,N} = \int_{Q_N} (\nabla v_h)^T [A \nabla \Psi \nabla w_p^{0,h} + (\nabla \Psi^T - (\operatorname{div} \Psi) \operatorname{Id}) A(p + \nabla w_p^{0,h})]. \end{cases} \quad (12)$$

On reconnaît dans (11) et (12) une formulation discrétisée de (5) et (6), respectivement. Le résultat principal de cette section, qui est la proposition ci-dessous, fournit dans le *cadre discrétisé* ($h > 0$ et $N < \infty$) l'analogue du résultat rappelé dans la section précédente, et qui a été obtenu dans le *cadre continu* :

Proposition 2.1. *On suppose que $\Phi(x, \omega) = x + \eta\Psi(x, \omega) + O(\eta^2)$ quand $\eta \rightarrow 0$, dans $C^1(\mathbb{R}^d, L^2(\Omega))$, où $\nabla\Psi$ est stationnaire. Il existe une constante $C(h, N, \omega)$ telle que, pour η suffisamment petit,*

$$\eta^{-2} \left\| \nabla \tilde{w}_p^{h,N}(\cdot, \omega) - \nabla w_p^{0,h} - \eta \nabla w_p^{1,h,N}(\cdot, \omega) \right\|_{L^2(Q_N)} \leq \sqrt{|Q_N|} C(h, N, \omega), \tag{13}$$

où $\tilde{w}_p^{h,N}$, $w_p^{0,h}$ et $w_p^{1,h,N}$ sont solutions de (9), (11) et (12), respectivement, et telle que

$$\eta^{-2} |A_\star^{h,N}(\omega) - A^{0,h} - \eta A^{1,h,N}(\omega)| \leq C(h, N, \omega), \tag{14}$$

où $A_\star^{h,N}$ est la matrice définie par (10), $(A^{0,h})_{ij} = \int_Q (e_i + \nabla w_{e_i}^{0,h})^T A e_j$ et

$$\begin{aligned} (A^{1,h,N})_{ij} = & -(A^{0,h})_{ij} \frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} \operatorname{div} \Psi + \frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} (e_i + \nabla w_{e_i}^{0,h})^T A e_j \operatorname{div} \Psi \\ & + \frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} (\nabla w_{e_i}^{1,h,N} - \nabla \Psi \nabla w_{e_i}^{0,h})^T A e_j. \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition suit les mêmes arguments que celle de la Proposition 3.1 de [3], et sera détaillée dans [5].

Remarque 1. Soient w_p^0 et $w_p^{0,h}$ respectivement solutions de (5) et (11). Sous des hypothèses classiques, $\nabla w_p^{0,h}$ converge vers ∇w_p^0 dans $L^2(Q)$, et par conséquent $\lim_{h \rightarrow 0} A^{0,h} = A^0$. La convergence lorsque $N \rightarrow \infty$ de $A_\star^{h,N}(\omega)$ et de $\lim_{h \rightarrow 0} A_\star^{h,N}(\omega)$ sont des questions différentes. Dans un cadre monodimensionnel, on montre que $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_\star^{h,N}(\omega) = A_\star$ presque sûrement (cf. [5]). L'étude, dans un cadre multidimensionnel, de la convergence avec N de $\lim_{h \rightarrow 0} A_\star^{h,N}(\omega)$ fera l'objet d'une publication future (cf. [4] pour une étude similaire). D'autre part, les résultats numériques de la section suivante sont consistants avec le fait que $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} A_\star^{h,N}(\omega) = A_\star$. Le cas de $A^{1,h,N}(\omega)$ est différent, car les problèmes (6) et (12) ne sont pas des problèmes de correcteur standards. Cependant, les mêmes remarques s'appliquent.

En l'absence de discrétisation, on a vu à la section précédente qu'il n'est pas nécessaire de connaître w_p^1 pour calculer A^1 , et que son espérance \bar{w}_p^1 , solution d'un problème plus simple, suffit.

Dans le cas discrétisé ($h > 0$ et $N < \infty$), cette observation subsiste. En effet, introduisons $\bar{w}_p^{1,h,N} = \mathbb{E}(w_p^{1,h,N})$, qui vérifie, pour tout $v_h \in V_h^{\text{per}}(Q_N)$,

$$\int_{Q_N} (\nabla v_h)^T A \nabla \bar{w}_p^{1,h,N} = \int_{Q_N} (\nabla v_h)^T [A \mathbb{E}(\nabla \Psi) \nabla w_p^{0,h} + (\mathbb{E}(\nabla \Psi)^T - \mathbb{E}(\operatorname{div} \Psi) \operatorname{Id}) A (p + \nabla w_p^{0,h})]. \tag{15}$$

Comme A et $\mathbb{E}(\nabla \Psi)$ sont Q -périodiques, on obtient que la solution de (15) avec $N = 1$, qui est Q -périodique, est solution de (15) pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Comme la solution de (15) est unique à l'ajout d'une constante aléatoire près, on obtient donc que $\bar{w}_p^{1,h,N}$ est en fait indépendante de N (on la note $\bar{w}_p^{1,h} = \mathbb{E}(w_p^{1,h,N})$), Q -périodique, et solution de (15) avec $N = 1$, ce qui est une discrétisation du problème (7) convergente quand $h \rightarrow 0$. Comme fonction de $\nabla \bar{w}_p^{1,h}$, la matrice $A^{1,h} = \mathbb{E}(A^{1,h,N})$ est elle aussi indépendante de N , et se calcule facilement à partir de $\nabla \bar{w}_p^{1,h}$.

Cependant, pour la stricte question de l'analyse de la méthode, il va nous falloir utiliser $A^{1,h,N}$ plutôt que $A^{1,h}$. Introduisons en effet les deux estimateurs

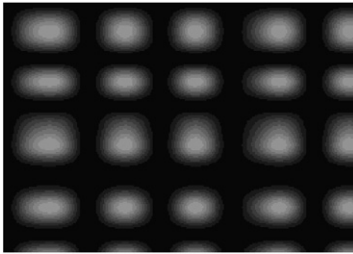
$$e^{h,N}(\omega) := \eta^{-2} (A_\star^{h,N}(\omega) - A^{0,h} - \eta A^{1,h,N}(\omega)), \tag{16}$$

$$\bar{e}^{h,N}(\omega) := \eta^{-2} (A_\star^{h,N}(\omega) - A^{0,h} - \eta A^{1,h}) = e^{h,N}(\omega) + \eta^{-1} (A^{1,h,N}(\omega) - A^{1,h}). \tag{17}$$

En s'appuyant sur le fait que c'est le cas dans un cadre monodimensionnel, on suppose que la constante $C(h, N, \omega)$ qui apparaît dans (14) a une espérance et une variance finies. Comme $A^{1,h} = \mathbb{E}(A^{1,h,N})$, on obtient donc que l'espérance de $\bar{e}^{h,N}(\omega)$ est bornée quand $\eta \rightarrow 0$. Cependant, la relation (17) implique que

$$\eta^{-2} \operatorname{Var}(A^{1,h,N}(\omega) - A^{1,h}) \leq 2 \operatorname{Var}(\bar{e}^{h,N}) + 2 \operatorname{Var}(e^{h,N}).$$

La variance de $\bar{e}^{h,N}$ diverge donc lorsque $\eta \rightarrow 0$. Il s'ensuit donc que, dans un but d'analyse, on travaille ci-dessous avec l'estimateur $e^{h,N}$. Ceci va permettre de vérifier que $A^{0,h} + \eta A^{1,h,N}$ est une bonne estimation de $A_\star^{h,N}$, à l'ordre 2 en η . La



η	$(A_{\star}^{h,N})_{11}$	$(e^{h,N})_{11}$
0,1	$3,073 \pm 0,00928$	$-4,233 \pm 0,216$
0,01	$2,839 \pm 0,00111$	$-5,009 \pm 0,254$
0,001	$2,812 \pm 0,000113$	$-5,104 \pm 0,259$
0,0001	$2,809 \pm 0,0000113$	$-5,114 \pm 0,259$

Fig. 1. A gauche : valeur de $A \circ \Phi^{-1}(x, \omega)$, pour une réalisation de l'aléa, sur le domaine $Q_{N=5}$ ($\eta = 0,05$). A droite : valeurs de $(A_{\star}^{h,N})_{11}$ et $(e^{h,N})_{11}$, en fonction de η , pour $h = 1/3$ et $N = 20$. Les résultats pour les autres composantes des matrices sont similaires.

pratique numérique, elle, est différente : elle consistera en effet à approcher A_{\star} , et on utilisera plutôt la quantité $A^{0,h} + \eta A^{1,h}$, beaucoup plus facile à calculer.

Remarque 2. La Proposition 2.1 montre que $e^{h,N}(\omega)$ est borné, quand $\eta \rightarrow 0$, par une constante $C(h, N, \omega)$ qui dépend a priori de h, N et ω . Dans un cadre monodimensionnel, on montre que cette constante est bornée uniformément en h, N et ω , sous l'hypothèse que $\text{Ess Sup}_{\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d} (|\nabla \Psi(x, \omega)|) = \bar{M} < \infty$ (cf. [5]). Dans un cadre multidimensionnel, les résultats numériques de la section suivante sont consistants avec une telle borne uniforme sur $C(h, N, \omega)$. L'étude complète de cette question sera faite dans [5].

3. Résultats numériques

On se place en deux dimensions : $x = (x_1, x_2)$, et on se donne deux familles $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$. On considère le difféomorphisme $\Phi(x) = x + \eta \Psi(x, \omega)$, avec $\Psi(x, \omega) = (\psi_X(x_1, \omega), \psi_Y(x_2, \omega))$, où ψ_X est défini par

$$\psi_X(x_1, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{[k, k+1[}(x_1) \left(\sum_{q=0}^{k-1} X_q(\omega) + 2X_k(\omega) \int_k^{x_1} \sin^2(2\pi t) dt \right),$$

et de même pour ψ_Y . La matrice périodique A est définie par

$$\forall x \in Q, \quad A(x) = a_{\text{per}}(x) \text{Id}_2, \quad a_{\text{per}}(x_1, x_2) = \beta + (\alpha - \beta) \sin^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2).$$

Ceci revient donc à considérer un matériau \mathbb{Z}^2 -périodique, où la conductivité varie de façon régulière de α à $\beta \leq \alpha$. Dans la cellule Q , la conductivité est maximale au centre, et minimale sur le bord. L'application ψ_X n'est pas stationnaire, mais sa dérivée l'est. Cet exemple est un cas typique de [3]. Il ne relève pas de la théorie classique de l'homogénéisation stochastique : $A \circ \Phi^{-1}$ n'est pas stationnaire.

On travaille avec $a = -2,25, b = 5,75, \alpha = 10$, et $\beta = 1$. La Fig. 1 montre la valeur de $A \circ \Phi^{-1}(x, \omega)$, pour une réalisation particulière de l'aléa. Tous les résultats numériques ont été obtenus à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFem++. Avec les paramètres de discrétisation $h = 1/3$ et $N = 20$, on calcule $(A^{0,h})_{11} \approx 2,809$ et $(A^{1,h,N})_{11} \approx 3,065 \pm 0,113$ (cette valeur est la moyenne sur 10 réalisations indépendantes, avec un intervalle de confiance à 95%). Les résultats pour $(A_{\star}^{h,N})_{11}$ et $(e^{h,N})_{11}$ sont rassemblés dans la Fig. 1. On vérifie bien que, dans la limite $\eta \rightarrow 0$, l'estimateur $e^{h,N}$ reste borné en espérance et en variance, par une petite constante, d'où l'efficacité avérée de la méthode. Par ailleurs, pour $\eta = 10^{-4}$, on constate que $e^{h,N}$ est bien borné indépendamment de h et de N : pour $h = 0,05$ et $N = 20$, on a $(e^{h,N})_{11} = -2,254 \pm 0,149$, tandis que, pour $h = 1/3$ et $N = 40$, on a $(e^{h,N})_{11} = -4,411 \pm 0,207$. (La variation de $e^{h,N=20}$ avec h montre que la valeur $h = 1/3$ est une valeur grossière, comparée par exemple à la valeur $h = 0,05$. Nous avons fait le choix $h = 1/3$ afin que les calculs numériques aient un coût raisonnable. De plus, la convergence des résultats avec h est une question classique, qui n'est pas l'objet de la présente Note.)

Références

[1] A. Anantharaman, C. Le Bris, Homogénéisation d'un matériau périodique faiblement perturbé aléatoirement, soumis.
 [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 343 (2006) 717–724.
 [3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 34–63.
 [4] A. Bourgeat, A. Piatnitski, Approximation of effective coefficients in stochastic homogenization, Ann. Inst. H. Poincaré - PR 40 (2004) 153–165.
 [5] R. Costaouec, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, en préparation.
 [6] K. Sab, On the homogenization and the simulation of random materials, Eur. J. Mech. A/Solids 11 (1992) 585–607.