Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1337–1342

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre homologique

f-catégories, tours et motifs de Tate

Jörg Wildeshaus [1]

LAGA, UMR 7539, Institut Galilée, université Paris 13, avenue Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 15 octobre 2008 ; accepté après révision le 14 octobre 2009

Disponible sur Internet le 3 novembre 2009

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Le but de cette Note est de donner une preuve simple de l'énoncé suivant : sur un corps algébrique sur $\mathbb{Q}$, la catégorie triangulée des motifs de Tate est équivalente à la catégorie dérivée bornée de son coeur (Théorème 1.3). ***Pour citer cet article : J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

f-categories, towers, and Tate motives. The aim of this Note is to give a simple proof of the following fact: the triangulated category of Tate motives over a field k is equivalent to the bounded derived category of its heart, provided that k is algebraic over $\mathbb{Q}$ (Theorem 1.3). ***To cite this article: J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let $(\mathcal{C}, t)$ be a triangulated category with a t-structure. Denote its heart by $\mathcal{C}^0$. It appears natural to ask the following question: "*Can the identity on $\mathcal{C}^0$ be extended to an exact functor $D^b(\mathcal{C}^0) \to \mathcal{C}$ from the bounded derived category of $\mathcal{C}^0$ to $\mathcal{C}$?*"

This question was first formulated in [2, Sect. 3.1], and solved under the additional hypotheses that (i) $\mathcal{C}$ can be embedded into the derived category $D^+(\mathcal{A})$ of complexes over an Abelian category $\mathcal{A}$, which are bounded from below, (ii) there are enough injectives in $\mathcal{A}$. This solution was simplified in [8, p. 228]. The approach was then generalized in [3, Appendix], by introducing the notion of *f-category*. Another generalization was developed in [9], where the notion of *tower* over a category is introduced.

The aim of this Note is to identify a simple criterion on the pair $(\mathcal{C}, t)$ allowing for a positive answer to the above question. According to our Theorem 1.1, it is sufficient that the triangulated category $\mathcal{C}$ can be embedded into the unbounded derived category over an exact category.

Adresse e-mail : wildesh@math.univ-paris13.fr.

[1] Membre du projet No. ANR-07-BLAN-0142 « Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et géométrie d'Arakelov » de l'Agence nationale de la recherche.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.10.016

We illustrate its usefulness by an application for which the original criterion from [2] is insufficient. Let k be a field which is algebraic over $\mathbb{Q}$. Using our criterion, we establish a functor from the bounded derived category of the category of *mixed* (*effective*) *Tate motives over* k to the *triangulated category of* (*effective*) *Tate motives over* k [10]. Given that the induced maps on Ext-groups coincide with those which were studied in [10], the results from [10] then imply that our functor is in fact an equivalence of categories (Theorem 1.3 and Corollary 1.4). This implication is already known, and a consequence of results by Kriz–May and Spitzweck [11, Sect. 5.5], but our proof is somewhat simpler.

1. Enoncé des résultats principaux

On fixe une paire $(\mathcal{C}, t)$ qui consiste en une catégorie triangulée $\mathcal{C}$, munie d'une t-structure [2, Déf. 1.3.1]. Son coeur sera noté $\mathcal{C}^0$. Le but de cette note est d'établir le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que $\mathcal{C}$ peut s'immerger en tant que sous-catégorie pleine triangulée dans $D(\mathcal{A})$, la catégorie dérivée de complexes* (*non-bornés*) *sur une catégorie exacte $\mathcal{A}$. On fixe une telle immersion.*

(a) *Il existe un foncteur exact real : $D^b(\mathcal{C}^0) \to \mathcal{C}$ de la catégorie dérivée de complexes bornés sur $\mathcal{C}^0$ vers $\mathcal{C}$, et qui induit l'identité sur $\mathcal{C}^0$, vue comme sous-catégorie pleine de la source et de la cible. Le foncteur real est t-exact. Sa composition avec le foncteur de cohomologie $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$ associé à t coïncide avec le foncteur de cohomologie canonique sur $D^b(\mathcal{C}^0)$.*

(b) *Le foncteur real dépend fonctoriellement de la paire $(\mathcal{C}, t)$ satisfaisant l'hypothèse d'immergeabilité dans la catégorie dérivée d'une catégorie exacte. Plus précisément, étant donné une deuxième catégorie triangulée $\mathcal{D}$ munie d'une t-structure, un foncteur t-exact $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant un foncteur exact $\alpha^0 : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}^0$ entre les coeurs, une deuxième catégorie exacte $\mathcal{B}$, munie d'un foncteur exact $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & D(\mathcal{A}) \arrow[d, "D(\beta)"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, hook] & D(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

de catégories triangulées, alors les foncteurs associés real forment un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{C}^0) \arrow[r, "real"] \arrow[d, "D^b(\alpha^0)"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\alpha"] \\ D^b(\mathcal{D}^0) \arrow[r, "real"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

(c) *Supposons que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[2]) = 0$, *pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$. La catégorie $\mathcal{C}^0$ est alors de dimension cohomologique au plus égale à un, et le foncteur real est pleinement fidèle.*

(d) *Supposons que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[2]) = 0$, *pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$. Alors le foncteur real est une équivalence si et seulement si $\mathcal{C}^0$ engendre $\mathcal{C}$* (*en tant que catégorie triangulée*).

Deux preuves de ce résultat seront proposées, l'une (utilisant le langage des f-catégories) dans la Section 2, l'autre (utilisant le langage des tours) dans la Section 3. Par contre, il n'est pas clair que les foncteurs *real* obtenus par les deux approches coïncident.

Remarque 1. Comme le montre la partie (b) du Théorème 1.1, le foncteur *real* n'est pas *a priori* indépendant des données auxiliaires, à savoir, de la catégorie exacte $\mathcal{A}$ et de l'immersion de $\mathcal{C}$ dans $D(\mathcal{A})$: choisir une auto-équivalence triangulée et t-exacte $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ induisant l'identité sur $\mathcal{C}^0$. Alors les foncteurs $real_i$ et $real_{i \circ \kappa}$, associés à une immersion i de $\mathcal{C}$ dans $D(\mathcal{A})$, et à $i \circ \kappa$, satisfont la relation $real_{i \circ \kappa} = \kappa^{-1} \circ real_i$.

Le Théorème 1.1 s'applique notamment dans le contexte des motifs de Tate sur un corps k algébrique sur $\mathbb{Q}$, ou plus généralement, sur un corps satisfaisant la Conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé. On rappelle que pour tout entier m, un objet dit de Tate $\mathbb{Z}(m)$ de la catégorie $DM_{gm}(k)$ des *motifs géometriques sur* k [12, pp. 189–192] est défini. Si $m \geqslant 0$, alors $\mathbb{Z}(m)$ appartient à la sous-catégorie pleine $DM^{eff}_{gm}(k)$ [12, Thm. 4.3.1] des *motifs géométriques effectifs sur k*. On refait la construction de [12], en remplaçant les groupes Abéliens des *correspondances finies* par leur produit tensoriel avec $\mathbb{Q}$ [1, Sect. 16.2.4 and Sect. 17.1.3], pour construire des analogues $\mathbb{Q}$-linéaires $DM_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ et $DM^{eff}_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ de ces catégories. On notera toujours $\mathbb{Z}(m)$ les images des objets de Tate dans $DM_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ et $DM^{eff}_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Définition 1.2. (Cf. [10, Def. 3.1].) On définit la *catégorie triangulée des motifs de Tate sur k* comme étant la sous-catégorie pleine triangulée $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$ de $DM_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les $\mathbb{Z}(m)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. On définit la *catégorie triangulée des motifs de Tate effectifs sur k* comme étant la sous-catégorie pleine triangulée $DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$ de $DM^{eff}_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les $\mathbb{Z}(m)$, pour tout $m \geqslant 0$.

Suivant [10, Thm. 1.4 i), 4.2 i)], essentiellement grâce à la validité de la Conjecture de Beilinson–Soulé pour les corps de nombres, il existe une t-structure canonique non-dégénérée sur $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$. (Le lien entre la K-theorie de k tensorisée par $\mathbb{Q}$, et $\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}}$ est dû à Bloch [4,5].) On note $MT(k)_{\mathbb{Q}}$ son coeur. Ceci est la catégorie Abélienne des *motifs de Tate mixtes sur k*. Elle contient tous les objets de Tate $\mathbb{Z}(m)$ [10, Thm. 4.2 ii)]. Elle est de dimension cohomologique égale à un, et $\mathrm{Hom}_{MT(k)_{\mathbb{Q}}}(M, N[2]) = 0$, pour toute paire de motifs de Tate mixtes M, N [10, Cor. 4.3]. En appliquant [10, Th. 1.4 i), ii)] avec $a = -\infty$ et $b = 0$, on conclut que la t-structure sur $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$ en induit une, toujours non-dégénérée, sur $DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$, et dont le coeur $MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$ est la catégorie Abélienne des *motifs de Tate mixtes effectifs sur k*. Elle contient tous les objets de Tate $\mathbb{Z}(m)$, pour $m \geqslant 0$. Son inclusion dans $MT(k)_{\mathbb{Q}}$ induit des isomorphismes de groupes des extensions à la Yoneda. En particulier, elle est également de dimension cohomologique égale à un, et $\mathrm{Hom}_{MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}}(M, N[2]) = 0$ pour toute paire de motifs de Tate mixtes effectifs M, N.

Théorème 1.3. *Soit k un corps algébrique sur* $\mathbb{Q}$.

(a) *Il existe un foncteur t-exact canonique real* : $D^b(MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}) \to DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$, *qui induit l'identité sur* $MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$. *Sa composition avec le foncteur de cohomologie* $DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}} \to MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$ *associé à t coïncide avec le foncteur de cohomologie canonique sur* $D^b(MT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}})$.
(b) *Le foncteur real est une équivalence de catégories triangulées.*

Démonstration du Théorème 1.3, en supposant le Théorème 1.1. On rappelle la définition de la catégorie $Shv_{Nis}(SmCor(k))$ des *faisceaux de Nisnevich avec transferts* [12, Def. 3.1.1]. Elle est Abélienne [12, Thm. 3.1.4], et il existe une immersion canonique, pleine et triangulée

$$DM^{eff}_{gm}(k) \hookrightarrow D^-\big(Shv_{Nis}\big(SmCor(k)\big)\big)$$

dans la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de Nisnevich bornés *supérieurement* [12, Thm. 3.2.6, p. 205]. On refait la construction de [12], en utilisant des coefficients rationnels, et on montre qu'il existe une immersion canonique, pleine et triangulée

$$DM^{eff}_{gm}(k)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow D^-\big(Shv_{Nis}\big(SmCor(k)\big)_{\mathbb{Q}}\big),$$

où on note $Shv_{Nis}(SmCor(k))_{\mathbb{Q}} \subset Shv_{Nis}(SmCor(k))$ la sous-catégorie pleine de faisceaux de Nisnevich à valeurs dans des espaces $\mathbb{Q}$-linéaires. On obtient ainsi une immersion dans $D(Shv_{Nis}(SmCor(k))_{\mathbb{Q}})$ de toute sous-catégorie pleine triangulée $\mathcal{C}$ de $DM^{eff}_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$. Donc, les hypothèses du Théorème 1.1 sont satisfaites, avec $\mathcal{A} = Shv_{Nis}(SmCor(k))_{\mathbb{Q}}$ et un choix *canonique* d'immersion de toute telle catégorie $\mathcal{C}$, qui en plus est munie d'une t-structure. Ceci est le cas notamment pour $\mathcal{C} = DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$. Notre énoncé résulte alors des parties (a) et (d) du Théorème 1.1, vu les résultats de [10] cités ci-dessus. □

La conséquence suivante est immédiate, vu la quasi-invertibilité de l'objet $\mathbb{Z}(1)$ de $DMT^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$ [12, Thm. 4.3.1] :

Corollaire 1.4. *Soit k un corps algébrique sur* $\mathbb{Q}$.

(a) *Il existe un foncteur t-exact canonique real* : $D^b(MT(k)_{\mathbb{Q}}) \to DMT(k)_{\mathbb{Q}}$, *qui induit l'identité sur* $MT(k)_{\mathbb{Q}}$. *Sa composition avec le foncteur de cohomologie* $DMT(k)_{\mathbb{Q}} \to MT(k)_{\mathbb{Q}}$ *associé à t coïncide avec le foncteur de cohomologie canonique sur* $D^b(MT(k)_{\mathbb{Q}})$.

(b) *Le foncteur real est une équivalence de catégories triangulées.*

Remarque 2. Comme le montre la démonstration, les parties (a) du Théorème 1.3 et du Corollaire 1.4 restent valables pour tout corps de base parfait k, pour qui la Conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé est vraie (c'est-à-dire les données de [10] définissent une t-structure sur $DMT(k)_{\mathbb{Q}}$).

Remarque 3. (a) Le Théorème 1.3 et le Corollaire 1.4, y compris la généralisation évoquée dans la remarque précédente, sont connus : il s'agit de conséquences de résultats de Kriz–May et de Spitzweck [11, Thm. 109 et Thm. 111]. Dans ce contexte, rappelons la conjecture « La cd-algèbre $\mathcal{N}_k$ des cycles est 1-minimale » [11, Conj. 112]. Elle est vérifiée pour un corps algébrique sur $\mathbb{Q}$. Pour un corps de base parfait k arbitraire, elle implique la Conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé, et équivaut à la validité de la partie (b) du Corollaire 1.4 (voir la discussion dans [11, p. 502]).

2. f-catégories

Voici des définitions et résultats dûs à Beilinson.

Définition 2.1. (Voir [3, Def. A 1].)

(a) Une *f-catégorie* est une catégorie triangulée $\mathcal{C}F$, munie d'un quadruplet $f = (\mathcal{C}F\ (\leqslant 0),\ \mathcal{C}F\ (\geqslant 0),\ s,\ \iota)$, dont les première et deuxième composantes sont des sous-catégories pleines triangulées de $\mathcal{C}F$ fermées sous les isomorphismes dans $\mathcal{C}F$, s est une auto-équivalence exacte sur $\mathcal{C}F$, et ι une transformation de foncteurs $\mathrm{id}_{\mathcal{C}F} \to s$, tels que, en posant $\mathcal{C}F\ (\leqslant n) := s^n\mathcal{C}F\ (\leqslant 0)$ et $\mathcal{C}F\ (\geqslant n) := s^n\mathcal{C}F\ (\geqslant 0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les conditions suivantes soient satisfaites :
  (1) Au niveau des objets, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}F\ (\leqslant n) = \mathcal{C}F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}F\ (\geqslant n)$, $\mathcal{C}F\ (\leqslant 0) \subset \mathcal{C}F\ (\leqslant 1)$, et $\mathcal{C}F\ (\geqslant 0) \supset \mathcal{C}F\ (\geqslant 1)$.
  (2) Pour tout objet X de $\mathcal{C}F$, on a $\iota_X = s(\iota_{s^{-1}X}) : X \to sX$.
  (3) Pour toute paire d'objets $X \in \mathcal{C}F\ (\geqslant 1)$ et $Y \in \mathcal{C}F\ (\leqslant 0)$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}F}(X, Y) = 0$, et les applications $\iota_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}F}(Y, s^{-1}X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}F}(Y, X)$ et $\iota^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}F}(sY, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}F}(Y, X)$ sont des isomorphismes.
  (4) Pour tout objet $X \in \mathcal{C}F$, il existe un triangle exact $A \to X \to B \to A[1]$ dans $\mathcal{C}F$, tel que $A \in \mathcal{C}F\ (\geqslant 1)$ et $B \in \mathcal{C}F\ (\leqslant 0)$.

(b) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Une *f-catégorie sur* $\mathcal{C}$ est une paire $(\mathcal{C}F, \jmath)$ qui consiste en une f-catégorie $\mathcal{C}F$, et une équivalence de catégories triangulées $\jmath : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}F\ (\leqslant 0) \cap \mathcal{C}F\ (\geqslant 0)$.

Exemple 1. (Voir [3, Ex. A 2].) On fixe une catégorie Abélienne $\mathcal{A}$, et on considère la *catégorie filtrée dérivée* $D^\bullet F(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$, pour $\bullet \in \{\emptyset, b, -, +\}$ [2, Sect. 3.1.1]. Par sa construction, cette catégorie porte une structure canonique de f-catégorie sur $D^\bullet(\mathcal{A})$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette construction se généralise, pour donner une f-catégorie $D^\bullet F(\mathcal{A})$ sur $D^\bullet(\mathcal{A})$, pour toute catégorie exacte $\mathcal{A}$.

Voici pourquoi les f-catégories apparaissent dans la problématique que l'on s'est proposé d'étudier. Soit $(\mathcal{C}F, \jmath)$ une f-catégorie sur une catégorie triangulée $\mathcal{C}$ qui est munie d'une t-struture, de coeur $\mathcal{C}^0$. Suivant [3, Prop. A 5, Sect. A 6], ces données induisent d'abord une t-structure sur $\mathcal{C}F$ dite *compatible* avec celle sur $\mathcal{C}$ [3, Def. A 4]. L'observation clé est que le coeur de cette dernière est canoniquement équivalent à la catégorie $C^b(\mathcal{C}^0)$ des complexes bornés sur $\mathcal{C}^0$. Ceci permet ensuite de construire un foncteur $C^b(\mathcal{C}^0) \to \mathcal{C}$, dont Beilinson démontre qu'il se factorise par $D^b(\mathcal{C}^0)$. Cette factorisation est le foncteur *real* recherché.

Proposition 2.2. *Soient $(\mathcal{C}F, \jmath)$ une f-categorie sur $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pleine triangulée de $\mathcal{C}$. Alors il existe une unique sous-f-catégorie $\mathcal{D}F$ de $\mathcal{C}F$ telle que $\mathcal{D}F$, munie de la restriction de $\jmath$ à $\mathcal{D}$, forme une f-catégorie sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. On a besoin d'une dernière construction due à Beilinson. Suivant [3, Prop. A 3 (i)], il existe des foncteurs $\sigma_{\leqslant n} : \mathcal{C}F \to \mathcal{C}F\ (\leqslant n)$ et $\sigma_{\geqslant n} : \mathcal{C}F \to \mathcal{C}F\ (\geqslant n)$ adjoints à gauche resp. à droite des inclusions, pour tout entier n. En plus, il y a des isomorphismes canoniques $\sigma_{\leqslant n} \circ \sigma_{\geqslant m} \xrightarrow{\sim} \sigma_{\geqslant m} \circ \sigma_{\leqslant n}$. On définit le foncteur exact $\mathrm{gr}_f^n : \mathcal{C}F \to \mathcal{C}$

comme étant la composition de $\sigma_{\leqslant n} \circ \sigma_{\geqslant n}$, de s^{-n}, et de $\jmath^{-1}$. Noter la relation $\mathrm{gr}_f^n = \jmath^{-1} \circ \sigma_{\leqslant 0} \circ \sigma_{\geqslant 0} \circ s^{-n}$. Suivant [3, Prop. A 3 (ii)], pour tout entier n, et tout objet X de $\mathcal{C}F$, les morphismes d'adjonction font partie d'un triangle exact $\sigma_{\geqslant n+1} X \to X \to \sigma_{\leqslant n} X \to \sigma_{\geqslant n+1} X[1]$. C'est dans ce sens précis que tout objet de $\mathcal{C}F$ est une extension successive d'objets de $\mathcal{C}$. La même conclusion doit valoir pour la f-catégorie $\mathcal{D}F$ sur $\mathcal{D}$ que l'on cherche à construire.

Etant donné que $\mathcal{D}F$ doit en plus contenir l'image de $\mathcal{D}$ sous $\jmath$, le seul choix possible est de définir $\mathcal{D}F$ comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}F$ d'objets X tels que $\mathrm{gr}_f^n X \in \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, pour tout n. On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce choix vérifie effectivement les conditions 2.1 (a) (1)–(4) et (b). □

Corollaire 2.3. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte, et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine triangulée de $D(\mathcal{A})$. Alors l'immersion de $\mathcal{C}$ dans $D(\mathcal{A})$ induit un choix de f-categorie sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Ceci résulte de la Proposition 2.2 et de l'Exemple 1. □

Démonstration du Théorème 1.1, en utilisant les f-catégories. On est dans la situation du Corollaire 2.3, and dispose donc d'une f-categorie $\mathcal{C}F$ sur $\mathcal{C}$. En plus, une t-structure sur $\mathcal{C}$ est donnée. Alors [3, Prop. A 5, Sect. A 6] (voir ci-dessus) donne la construction du foncteur *real*, avec les propriétés énoncées dans la partie (a).

La partie (b) est un cas spécifique du comportement fonctoriel de *real* [3, Lemma A 7.1].

Pour prouver les parties (c) et (d), noter d'abord que *real* est pleinement fidèle si et seulement si pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$, et tout entier $p \geqslant 0$, le morphisme $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}^0}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[p])$ (Ext^p = groupe des p-extensions à la Yoneda) induit par *real* est un isomorphisme. Ceci est évidemment le cas pour $p = 0$. On rappelle que les groupes de Yoneda forment un δ-foncteur universel [6, Prop. 4.1, Prop. 4.3]. Donc, le morphisme ci-dessus coïncide avec la valeur sur M de la p-ème composante de la transformation naturelle de foncteurs $\tau^p : \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}^0}(\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, N[p])$ correspondant à cette propriété universelle. Le critère de [6, Prop. 4.2] montre de manière abstraite (voir par exemple [7, p. 3]) que τ^p est un isomorphisme pour $p = 1$, et injectif pour $p = 2$. Notre hypothèse sur la trivialité de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, N[2])$ implique donc que τ^2 est un isomorphisme. Elle implique également que la source et la cible de τ^p sont zéro, pour tout $p \geqslant 2$. □

3. Tours

Voici des définitions et résultats dûs à Keller. On note $\mathcal{P}$ la *catégorie cubique standard* (*cf.* [9, Sect. 2.1]) :

Définition 3.1. (Voir [9, Sect. 2.2 et 2.7].) (a) Une *tour de catégories exactes* est la donnée d'un 2-foncteur contravariant de $\mathcal{P}$ vers la catégorie des catégories exactes. Une *tour de catégories triangulées* est la donnée d'un 2-foncteur contravariant de $\mathcal{P}$ vers la catégorie des catégories triangulées.

(b) Soit $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_n\}_{n \geqslant 0}$ une tour. On appellera $\mathcal{T}_0$ sa *base*.

(c) Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ deux tours. On appellera *basique* (par rapport à $\mathcal{T}$ et à $\mathcal{U}$) tout foncteur $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{U}_0$ apparaissant comme base d'un foncteur de tours $\mathcal{T} \to \mathcal{U}$.

Voici pourquoi les tours apparaissent dans la problématique que l'on s'est proposé d'étudier. Fixons une catégorie exacte $\mathcal{C}^0$, ainsi qu'une tour *épivalente* $\mathcal{T}$ [9, Sect. 2.6] de catégories triangulées. Suivant [9, Ex. 2.2 (c), Ex. 6.1 (c), Lemma 10.1], il existe un choix canonique de tour épivalente de base $D^b(\mathcal{C}^0)$. D'après [9, Cor. 2.7 (a)] (version pour les catégories triangulées), il y a alors une bijection canonique, donnée par la restriction à $\mathcal{C}^0 \subset D^b(\mathcal{C}^0)$, entre d'une part, les foncteurs exacts basiques $r : D^b(\mathcal{C}^0) \to \mathcal{T}_0$ et d'autre part, les δ-foncteurs $r^0 : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{T}_0$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_0}(r^0(M), r^0(N)[p]) = 0$ pour toute paire d'objets M, N de $\mathcal{C}^0$, et tout entier $p \geqslant 1$.

Démonstration du Théorème 1.1, en utilisant les tours. En examinant la preuve de [9, Lemma 10.1], on voit qu'il existe un choix canonique de tour épivalente de base $D(\mathcal{A})$. La composition $real^0 : \mathcal{C}^0 \hookrightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ est un δ-foncteur, qui satisfait l'hypothèse de [9, Cor. 2.7 (a)] puisque $\mathcal{C}^0$ est le coeur d'une t-structure sur $\mathcal{C}$. D'après [9] (voir ci-dessus), il existe donc un foncteur exact $real : D^b(\mathcal{C}^0) \to D(\mathcal{A})$, uniquement caractérisé par la propriété d'être basique par rapport aux choix que l'on a faits, et d'induire le foncteur $real^0$ sur $\mathcal{C}^0$. L'image de *real* est nécessairement contenue dans la sous-catégorie pleine triangulée $\mathcal{C}$ de $D(\mathcal{A})$. Ce foncteur a les propriétés énoncées dans la partie (a).

La partie (b) est un cas spécifique du comportement fonctoriel de *real* [9, Cor. 2.7 (b)].

Pour prouver les parties (c) et (d), on procède comme dans la démonstration donnée auparavant. □

Remerciements

Ce travail a été fait en profitant d'une *modulation de service pour les porteurs de projets de recherche*, qui m'a été accordée par l'Université Paris 13. Je tiens à remercier D.-C. Cisinski, M. Künzer, M. Levine et le rapporteur pour d'utiles commentaires.

Références

[1] Y. André, Une introduction aux motifs, Panoramas et Synthèses, vol. 17, Soc. Math. France, 2004.
[2] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, in : B. Teissier, J.L. Verdier (Eds.), Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I), Astérisque 100 (1982).
[3] A.A. Beilinson, On the derived category of perverse sheaves, in: Yu.I. Manin (Ed.), K-Theory, Arithmetic and Geometry, in: Lect. Notes Math., vol. 1289, Springer-Verlag, 1987, pp. 27–41.
[4] S. Bloch, Algebraic cycles and algebraic K-theory, Adv. in Math. 61 (1986) 267–304.
[5] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, J. Algebraic Geom. 3 (1994) 537–568.
[6] A. Buchsbaum, Satellites and exact functors, Ann. of Math. 71 (1960) 199–209.
[7] P. Deligne, A.B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Scient. ENS 38 (2005) 1–56.
[8] B. Keller, D. Vossieck, Sous les catégories dérivées, C. R. Acad. Sci. 305 (1987) 225–228.
[9] B. Keller, Derived categories and universal problems, Comm. Algebra 19 (1991) 699–747.
[10] M. Levine, Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K-theory, in: P.G. Goerss, J.F. Jardine (Eds.), Algebraic K-Theory and Algebraic Topology, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, held at Lake Louise, Alberta, December 12–16, 1991, in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 407, Kluwer, 1993, pp. 167–188.
[11] M. Levine, Mixed motives, in: E.M. Friedlander, D.R. Grayson (Eds.), Handbook of K-Theory, Springer, 2005, pp. 429–521.
[12] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives, in: V. Voevodsky, A. Suslin, E.M. Friedlander, Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Ann. of Math. Studies, vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, Chapter 5.