Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1299–1304
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie différentielle

Caractérisation et existence de structures de Dirac multiplicatives

Atallah Affane

Faculté de mathématiques, USTHB, B.P. 32 El Alia Bab Ezzouar, Alger, Algérie

Reçu le 14 septembre 2009 ; accepté le 2 octobre 2009

Disponible sur Internet le 21 octobre 2009

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Nous définissons le produit de deux variétés de Dirac et la notion de groupe de Dirac–Lie de type Poisson. Cette notion est équivalente à celle de structure de Dirac multiplicative et tout groupe de Lie réel simplement connexe, de dimension au moins 2 porte une structure de Dirac multiplicative non triviale. ***Pour citer cet article : A. Affane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Characterization and existence of multiplicative Dirac structures. We define the product of two Dirac manifolds and introduce the notion of a Dirac–Lie group of Poisson type. This notion is equivalent to that of multiplicative Dirac structure and any real simply-connected Lie group carries a no trivial multiplicative Dirac structure when its dimension is at least 2. ***To cite this article: A. Affane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

An almost Dirac structure (see [3]) on an m-dimensional manifold M is an m-dimensional subbundle L of its big tangent bundle $\mathbf{T}M = TM \oplus T^*M$ which is isotropic for the pairing

$$\big\langle (X,\omega),(Y,\eta)\big\rangle_+ = \frac{1}{2}\big(\omega(Y)+\eta(X)\big), \quad (X,\omega),(Y,\eta)\in \mathbf{T}M.$$

When L is invariant by the Courant bracket, we say that it is a Dirac structure. Poisson and presymplectic manifolds are Dirac. A Dirac structure gives two involutive distributions: $\ker L = L \cap TM$ and $\rho(L)$ where ρ is the projection of $\mathbf{T}M$ on TM. We have the obvious inclusions $\mathcal{K}_x \subseteq \mathcal{F}_x$ where $\mathcal{K}$ and $\mathcal{F}$ are the foliations induced by $\ker L$ and $\rho(L)$.

In 1983, Drinfeld [4] defined a Poisson–Lie group as a Lie group G provided with a Poisson structure such that the multiplication $\mu_G : G \times G \to G$ is a Poisson morphism. Recently, Ortiz [7] generalized this notion to that of multiplicative Dirac structure L which must be a subgroupoid of the big tangent bundle $\mathbf{T}G$ in the sense of [6]. He also describes the foliation $\mathcal{K}$ and gives (in the introduction) the following sufficient condition for the existence of such structure:

Adresse e-mail : atallahaffane@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.10.002

Theorem. *Let $p : G_1 \to G_2$ be a homomorphism of Lie groups which is a surjective submersion. If P is a multiplicative Poisson structure on G_2, its pull back as Dirac structure* (*in the sense of* [1]) *multiplicative.*

Our aim is to complete his work. To do that, we return to Drinfeld's idea.

Firstly, we introduce the classes of Dirac morphisms of Poisson kind (DMP) and presymplectic kind (DMS) (see Definition 2.1 in the French version). These classes contain respectively Poisson morphisms and symplectomorphisms. We see by the following example that they are different from those of backward and forward Dirac mapping defined in [1]. Let $V_1 = \mathbf{R}^3$ provided with the bivector field $P = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$, $V_2 = \mathbf{R}^3$ provided with the 2-form $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ et $V_3 = \mathbf{R}^3$ provided with the 2-form $\eta = \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1$. One can verify that the identity $V_1 \to V_2$ is DMP meanwhile the identity $V_1 \to V_3$ is DMS. But these two mappings are not backward nor forward Dirac morphisms. However, a backward Dirac morphism which is a surjective submersion is a DMP.

Then it is possible to construct the sum $L_1 \oplus L_2$ (see Proposition 2.1) of two almost Dirac manifolds which generalizes product of Poisson and presymplectic manifolds and we prove the following:

Proposition. *Let L_k be an almost Dirac structure on a manifold M_k $(k = 1, 2)$. Then the sum $L_1 \oplus L_2$ is a Dirac structure on $M_1 \times M_2$ if each L_k is Dirac.*

When the multiplication μ_G is DMP for a Dirac structure L, we call the pair (G, L) a Dirac–Lie group of the Poisson kind (DLP).

Theorem. (G, L) *is DLP* $\iff$ *L is multiplicative.*

Sketch of the proof. For $\Longrightarrow$), we use a certain multiplicativity property of the projection $\rho^*(L)$ on T^*G (see formula (3.2)). For the converse, we need the following lemma which is an amelioration of the theorem above. □

Lemma. *Let (G, L) be a multiplicative Dirac structure on G, $\lambda : G' \to G$ a morphism which is a surjective submersion and L' the pullback of L. Then L' is a multiplicative. If (G, L) is a DLP, (G', L') is DLP. If L is no trivial, L' is no trivial.*

Sketch of the proof. Let $\phi : \widetilde{G} \to G$ be a simply-connected covering. The pullback $\widetilde{L} = \mathcal{B}(\phi)L$ is multiplicative. Following [7], we find a Poisson–Lie group K and a surjective submersion. $\tilde{\tau} : \widetilde{G} \to K$ such that $\widetilde{L}$ is the pullback of the Dirac structure of K. Let $\tilde{\lambda}$ be the lift of λ and L'' the Dirac structure of K. Since $\mathcal{B}(\lambda)L = \mathcal{B}(\tilde{\tau} \circ \tilde{\lambda})L''$, we apply the theorem above to the composite $\tilde{\tau} \circ \tilde{\lambda}$. □

Corollary. *In a DLP, the leaves of the unit e, $\mathcal{F}_e$ and $\mathcal{K}_e$, are equal.*

Sketch of the proof. We prove $(\ker L)_e = \rho(L_e)$ and it follows that $\ker L = \rho(L)$ on $\mathcal{F}_e$. □

At least, the lemma allows us to obtain the following:

Theorem. *Any real simply connected Lie group of dimension $\geqslant 2$ carries a no trivial multiplicative Dirac structure.*

Sketch of the proof. For the unsolvable case, we use the Levi decomposition and the existence of Poisson–Lie structure on real semisimple Lie groups [2]. For the solvable case, we proceed by induction on the dimension. □

1. Introduction

Une structure de Dirac L sur un groupe de Lie G est dite multiplicative (voir [7]) lorsque c'est un sous-groupoïde au sens de [6] du grand fibré tangent $\mathbf{T}G = TG \oplus T^*G$. Cette notion généralise celle de Poisson–Lie [4]. Dans [7], l'auteur donne, en introduction, le procédé suivant de construction de structure multiplicative :

Théorème 1.1. *Soit $\lambda : G' \to G$ un homomorphisme de groupes de Lie qui soit une submersion surjective, P une structure de Poisson–Lie sur G et L la structure de Dirac induite par P sur G. Alors le pull back $\mathcal{B}\lambda(L)$ (voir* [1]) *est une structure de Dirac multiplicative sur G'.*

Par ailleurs, comme toute structure de Dirac, L induit sur G deux feuilletages. Le premier $\mathcal{K}$ induit par distribution $L \cap TG = \ker L$ et le second $\mathcal{F}$ intégrant la projection $\rho(L)$ de L sur TG. De manière évidente, $\mathcal{K}$ est plus fin que $\mathcal{F}$, et une complète description en est donnée dans [7].

Notre approche consiste à reprendre la définition de Drinfeld. Pour celà, on définit les morphismes de Dirac de type Poisson et de type présymplectique qui généralisent respectivement les morphismes de Poisson et les symplectomorphismes. On montre par un exemple que ces notions sont différentes de celles de morphisme de Dirac de type backward ou forward données dans [1]. On appelera alors groupe de Dirac–Lie de type Poisson, un couple (G, L) où L est une structure de Dirac sur un groupe de Lie G telle que la multiplication $\mu_G : G \times G \to G$ soit un morphisme de Dirac de type Poisson. On montre l'équivalence entre cette notion et celle de structure de Dirac multiplicative (Théorème 3.1). On en déduit que les deux feuilletages induits par L coincident en l'élément neutre e (Corollaire 3.1). Enfin, nous exploitons des résultats de [2] et [7] pour prouver que tout groupe de Lie réel simplement connexe et de dimension au moins 2, porte une structure de Dirac multiplicative non triviale (Théorème 3.2).

Conventions. On écrit $\mathcal{A}(G)$ pour l'algèbre de Lie de G et $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ pour le groupe de Lie simplement connexe engendré par l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$. Toutes les applications d'un groupe de Lie dans un autre sont des homomorphismes.

2. Produit de variétés de Dirac

Soit V un espace vectoriel réel de dimension m, V^* son dual et $\mathcal{V} = V \oplus V^*$. Une structure de Dirac linéaire (SDL) sur V (voir [3]) est un sous-espace vectoriel L de $\mathcal{V}$ de dimension m isotrope pour la forme bilinéaire

$$\big\langle (X,\omega),(Y,\eta)\big\rangle_+ = \frac{1}{2}\big(\omega(Y)+\eta(X)\big), \quad (X,\omega),(Y,\eta)\in\mathcal{V}.$$

On notera respectivement ρ et ρ^* les projections de $\mathcal{V}$ sur V et V^*. A une structure de Dirac linéaire L sur V, on associe sans ambiguité (voir [3]) deux formes bilinéaires alternées Π sur $\rho(L)$ et Π^* sur $\rho^*(L)$ définies par

$$\Pi(u,v) = \alpha(v) \quad \text{dès que } (u,\alpha)\in L, \qquad \Pi^*(\alpha;\beta) = \beta(u) \quad \text{dès que } (\alpha,u)\in L.$$

On a alors les deux caractérisations

$$L = \big\{(u,\alpha)\in V\times\rho^*(L) \;/\; \beta(u) = \Pi^*(\alpha,\beta)\ \forall\beta\in\rho^*(L)\big\}, \tag{2.1}$$

$$L = \big\{(u,\alpha)\in \rho(L)\times V^* \;/\; \alpha(v) = \Pi(u,v)\ \forall v\in\rho(L)\big\}. \tag{2.2}$$

Dans [1], les auteurs indiquent deux procédés de transport de SDL par une application linéaire. Soit L et L' deux SDL sur V et V' respectivement. A l'aide d'une application $\phi \in \mathcal{L}(V, V')$, on construit les SDL données sur V et V' par

$$\mathcal{B}\phi\big(L'\big) = \big\{\big(u,\phi^*\theta\big) \;/\; u\in V,\ \theta\in V'^*,\ \big(\phi(v),\theta\big)\in L'\big\},$$
$$\mathcal{F}\phi(L) = \big\{\big(\phi(u),\theta\big) \;/\; u\in V,\ \theta\in V'^*,\ \big(u,\phi^*\theta\big)\in L\big\}.$$

Une application $\phi \in \mathcal{L}(V, V')$ est dite morphisme de Dirac de type *forward* (resp. *backward*) si $L' = \mathcal{F}\phi(L)$ (resp. $L = \mathcal{B}\phi(L')$). Nous introduisons ici une notion voisine.

Définition 2.1. Soit, pour $k = 1, 2$, L_k une SDL sur V_k et $\phi \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. On dira que ϕ est un homomorphisme de Dirac de type Poisson (en abrégé HDP) lorsque $\phi^*[\rho^*(V_2)] \subseteq \rho^*(V_1)$ et que l'on a l'identité

$$\Pi_1^*\big(\phi^*\alpha,\phi^*\beta\big) = \Pi_2^*(\alpha,\beta), \quad \forall\alpha,\beta\in\rho^*(V_2).$$

On dira aussi que ϕ est un homomorphisme Dirac de type présymplectique (en abrégé HDS) lorsque $\phi[\rho(V_1)] \subseteq \rho(V_2)$ avec l'identité

$$\Pi_1(u,v) = \Pi_2\big(\phi(u),\phi(v)\big), \quad \forall u,v\in V_1.$$

Exemple 2.1. $V_1 = \mathbf{R}^3$ muni du champ de bivecteur $P = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$, $V_2 = \mathbf{R}^3$ muni de la forme $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ et $V_3 = \mathbf{R}^3$ muni de la forme $\eta = \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1$.

On peut vérifier que l'identité de V_1 dans V_2 est un HDP et que l'identité de V_1 dans V_3 est un HDS. Cependant, ces deux applications ne sont pas des morphismes de Dirac ni de type forward, ni de type backward. Toutefois, on peut voir sans difficulté qu'un morphisme surjectif de Dirac de type pullback est un HDP. Cette remarque sera utile dans la prochaine section.

Remarque 2.1. Lorsque L_1 et L_2 sont induites par les bivecteurs P_1 et P_2, ϕ est un HDP ssi $P_2 = \phi_* P_1$. De même, si L_1 et L_2 sont induites par les 2-formes ω_1 et ω_2, ϕ est un HDS ssi $\omega_1 = \phi^* \omega_2$.

Proposition 2.1. *Soit L_k une SDL sur V_k $(k = 1, 2)$. Notons π_k la projection naturelle de $V_1 \oplus V_2$ sur V_k et $j_k : V_k \to V_1 \oplus V_2$ l'injection canonique. Alors,*

$$L_1 \oplus L_2 = \big\{\big(j_1(u_1) + j_2(u_2), \pi_1^*(\alpha_1) + \pi_2^*(\alpha_2);\ (u_k, \alpha_k) \in L_k\big\}$$

est une SDL sur $V_1 \oplus V_2$. De plus, on a les identités

$$\begin{aligned}
&\Pi\big(j_1(u_1), j_2(u_2)\big) = 0, \qquad \Pi^*\big(\pi_1^*(\theta_1), \pi_2^*(\theta_2)\big) = 0,\\
&\Pi\big[j_1(u_1) + j_2(u_2), j_1(v_1) + j_2(v_2)\big] = \Pi_1(u_1, v_1) + \Pi_2(u_2, v_2),\\
&\Pi^*\big[\pi_1^*(\alpha_1) + \pi_2^*(\alpha_2), \pi_1^*(\beta_1) + \pi_2^*(\beta_2)\big] = \Pi_1^*(\alpha_1, \beta_1) + \Pi_2^*(\alpha_2, \beta_2).
\end{aligned}$$

Les projections π_k sont des HDP et les j_k des HDS.

Preuve. Découle de $\pi_1 \circ j_1 = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\pi_2 \circ j_2 = \mathrm{Id}_{V_2}$, $\pi_2 \circ j_1 = 0$ et $\pi_1 \circ j_2 = 0$. □

Dans la section suivante, on aura besoin du

Lemme 2.1. *Soit deux applications linéaires $\phi_k : V_k \to V_k'$ $(k = 1, 2)$ et $\Phi = \phi_1 \oplus \phi_2$. Si $L_k = \mathcal{B}(\phi_k)L_k'$, alors $L_1 \oplus L_2 = \mathcal{B}(\Phi)(L_1' \oplus L_2')$.*

Preuve. On vérifie directement l'inclusion $\subseteq$. □

Un fibré de Dirac est un couple (M, L) où M est une variété de classe C^∞ et L un sous-fibré L du grand fibré tangent $\mathcal{T}M = TM \oplus T^*M$ tel qu'en tout point $x \in M$, la fibre L_x soit une structure de Dirac linéaire sur $T_x M$. Lorsque l'espace des sections $\Gamma(L)$ est stable par le crochet de Courant

$$\big[(X, \omega), (Y, \eta)\big] = \left([X, Y], L_X\eta - L_Y\omega + \frac{1}{2}\mathrm{d}\big(\omega(Y) - \eta(X)\big)\right)$$

on dira que le couple (M, L) est une variété de Dirac (voir [3]).

Soit maintenant (M, L) et (M', L') deux fibrés de Dirac. Une application $\phi \in C^\infty(M, M')$ est dite un morphisme de Dirac de type Poisson (resp. présymplectique) si pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\phi : T_x M \to T_{\phi(x)} M'$ est un HDP (resp. HDS). On écrira en abrégé MDP et MDS respectivement. On note π et π' les projections de $M \times M'$ sur M et M'. Pour $x \in M$, on note j_x' l'application de M' dans $M \times M'$ définie par $j_x x' = (x, x')$. On définit de même les injections $j_{x'} : M \to M \times M'$. La décomposition $T_{(x,x')}(M \times M') = d_x j_{x'}[T_x M] \oplus d_{x'} j_x[T_{x'} M']$ et la Proposition 2.1 permettent de construire sur $T_{(x,x')}(M \times M')$ la SDL $L_x \oplus L_{x'}'$ et l'on obtient ainsi un fibré de Dirac $L \oplus L'$ sur $M \times M'$. De manière évidente, les projections π et π' sur M et M' seront des MDP et les injections j_x', $j_{x'}$ des MDS.

Proposition 2.2. *Soit L (resp. L') un fibré de Dirac sur M (resp. M'). Alors, $(M \times M', L \oplus L')$ est une variété de Dirac ssi (M, L) et (M', L') le sont.*

Preuve. Etant donné un champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$ (resp. $X' \in \Gamma(TM')$), on lui associe le champ jX (resp. $j'X') \in \Gamma[T(M \times M')]$ défini par $jX(x, x') = d_x j_{x'} X_x$ (resp. $j'X'(x, x') = d_{x'} j_x' X_{x'}'$). La restriction du crochet de

Courant à $L \oplus L'$ vérifie la règle de Leibniz puisque ce dernier est déjà un fibré de Dirac. Il suffit de s'assurer que le crochet de deux sections de la forme $s_1 = (jX + j'X', \pi^*\omega + \pi'^*\omega')$ et $s_2 = (jY + j'Y', \pi^*\eta + \pi'^*\eta')$ est encore dans $\Gamma(L \oplus L')$. Or après calcul, on trouve

$$\rho\big([s_1, s_2]\big) = j[X, Y] + j'\big[X', Y'\big],$$
$$\rho^*\big([s_1, s_2]\big) = \pi^*\big[\mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\omega + \mathrm{d}\big[\omega(Y)\big]\big] + \pi'^*\big[\mathcal{L}_{X'}\eta' - \mathcal{L}_{Y'}\omega' + \mathrm{d}\big[\omega'\big(Y'\big)\big]\big]. \qquad \square$$

Terminons cette section en faisant remarquer que le produit de variétés de Dirac généralise les notions de produit de variétés de Poisson et de variétés présymplectiques.

3. Structure de Dirac sur un groupe de Lie

Définition 3.1. Un groupe de Dirac–Lie de type Poisson (en abrégé DLP) est un couple (G, L) où L est une structure de Dirac L sur un groupe de Lie G pour laquelle la multiplication μ_G est un MDP.

Bien sûr, tout groupe de Poisson–Lie est DLP.

Lemme 3.1. *Soit $(G,\ L)$ un groupe DLP. Alors, $\rho^*(L) = \{(g, \theta)g \in G$ et $\theta \in \rho^*(L_g)\}$ est un sous-fibré vectoriel bi-invariant de T^*G.*

Preuve. Elle repose sur la « multiplicativité » de $\rho^*(L)$. En fait, on vérifie que pour tout $\theta \in \rho^*(L_{hg})$,

$$\mu\theta^* = \pi_1^*\big[r_g^*\theta\big] + \pi_2^*\big[l_h^*\theta\big], \quad r_g^*\theta \in \rho^*(L_h) \quad \text{et} \quad l_h^*\theta \in \rho^*(L_g). \qquad \square \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *Si (G, L) est un DLP, L est multiplicative.*

Preuve. L'identité (3.1) et la Proposition 2.1 donnent

$$\Pi_{hg}^*\big(\theta, \theta'\big) = \Pi_g^*\big(l_h^*\theta, l_h^*\theta'\big) + \Pi_h^*\big(r_g^*\theta, r_g^*\theta'\big). \tag{3.2}$$

Soit maintenant (g, u, θ) et (h, v, ϕ) deux éléments de L composables dans le groupoïde $TG \oplus T^*G$, c, à, d que $r_g^*\theta = l_h^*\phi$. En vertu de la caractérisation (2.1) leur composé $(hg, r_{g*}v + l_{h*}u, l_{h^{-1}}^*\theta = r_{g^{-1}}^*\phi = \tau)$ est dans L puisque pour tout $\beta \in \rho^*(L_{hg})$, on a $\beta(r_{g*}v + l_{h*}u) = r_g^*\beta(v) + l_h^*\beta(u) = \Pi_h^*(\phi, r_g^*\beta) + \Pi_g^*(\theta, l_h^*\beta) = \Pi_h^*(r_g^*\tau, r_g^*\beta) + \Pi_g^*(l_h^*\tau, l_h^*\beta) = \Pi_{hg}^*(\tau, \beta)$. $\square$

La réciproque est basée sur le lemme suivant qui constitue en quelque sorte une amélioration du Théorème 1.1 :

Lemme 3.2. *Soit L une structure de Dirac multiplicative sur G et $\lambda : G' \to G$ une submersion surjective. Alors $L' = \mathcal{B}(\lambda)L$ est une structure de Dirac multiplicative sur G. Si (G, L) est un DLP, alors (G', L') l'est aussi. De plus, L' est non triviale si L l'est.*

Preuve. Soit $\psi : \widetilde{G} \to G$ le revêtement simplement connexe de G. La multiplicativité de L entraîne celle de $\widetilde{L} = \mathcal{B}\psi(L)$. On sait par [7] (Corollaire 3.1) que $\tilde{\ell} = \widetilde{L}_e \cap T_e\widetilde{G}$ est un idéal de $\mathcal{A}(G)$. La projection $\mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)/\ell$ induit une submersion surjective $\phi : \widetilde{G} \to \mathbf{G}[\mathcal{A}(G)/\ell]$. Comme $\widetilde{L}$ est multiplicative, le sous-groupe fermé $H = \ker\phi$ est une sous variété intégrale de $\mathcal{K}$ et donc sa composante connexe H_e de l'élément neutre (donc fermée) est exactement la feuille $\mathcal{K}_e$. Toujours par [7] (Théorème 3.1), $\widetilde{G}/\mathcal{K}_e$ possède une structure de Poisson–Lie P dont le pullback par l'application quotient $\tilde{\tau} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}/H_e$ est exactement la structure de Dirac $\widetilde{L}$. D'un autre côté, le relèvement $\tilde{\lambda} : G' :\to \widetilde{G}$ de λ est une submersion surjective. Comme visiblement, $\mathcal{B}(\lambda)L = \mathcal{B}(\tilde{\tau} \circ \tilde{\lambda})P$, L' est une structure de Dirac multiplicative par le Théorème 1.1. De plus, λ étant une submersion de type backward, le Lemme 2.1 assure que $\Lambda = \lambda \times \lambda : G' \times G' \to G \times G$ est un MDP. Puis l'identité $\lambda \circ \mu_{G'} = \mu_G \circ \Lambda$ donne que $\mu_{G'}$ est un MDP si μ_G l'est. $\square$

Théorème 3.1. (G, L) *est un groupe DLP ssi L est multilplicative.*

Preuve. Soit L une structure de Dirac multiplicative sur G, $\psi : \widetilde{G} \to G$ un revêtement simplement connexe. D'après la preuve du lemme précédent, $\widetilde{L} = \mathcal{B}\psi(L)$ est le pull back d'une structure de Poisson. Ainsi, $(\widetilde{G}, \widetilde{L})$ est groupe de DLP. Le fait que ψ soit un difféomorphisme local assure que (G, L) est aussi un groupe DLP. □

Corollaire 3.1. *Pour une structure de Dirac multiplicative, les feuilles $\mathcal{F}_e$ de la distribution $\rho(L)$ et $\mathcal{K}_e$ de la distribution* $\ker L$ *passant par l'élément neutre sont égales.*

Preuve. Il suffit de montrer $\mathcal{F}_e \subseteq \mathcal{K}_e$. Pour celà, on utilise que $\ker L$ est de rang constant (voir [7]). L'identité (3.2) entraîne $\Pi_e^* = 0$ et donc $\rho(L_e) = (\ker L)_e$. Mais pour $x \in \mathcal{F}_e$, on a $\dim \rho(L_x) = \dim \rho(L_e) = \dim(\ker L)_e = \dim(\ker L)_x$ et ainsi les distibutions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ sont égales sur la feuille $\mathcal{F}_e$. Ce qui suffit. □

Nous terminons cette note par le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2. *Tout groupe de Lie réel G simplement connexe et de dimension au moins* 2 *porte une structure de Dirac multiplicative non triviale.*

Preuve. Le théorème est vrai pour $n = 2$ puisque, pour cette dimension, toute structure d'algèbre de Lie sur le dual $\mathcal{G}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est compatible avec celle-ci (voir [4]). Si l'algèbre de Lie $\mathcal{A}(G)$ n'est pas résoluble, on considère sa décomposition de Levi $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ où $\mathcal{R}$ est un idéal et $\mathcal{S}$ une sous algèbre de Lie semi-simple. D'après [2], $\mathbf{G}(\mathcal{S})$ est un groupe de Poisson–Lie. On applique le Lemme 3.2 au morphisme de G dans $\mathbf{G}(\mathcal{S})$ engendré par la projection de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{S}$. Dans le cas $\mathcal{A}(G)$ résoluble, on opère par récurrence sur la dimension. En effet, $\mathcal{A}(G)$ possède un idéal propre $\mathcal{I}$ de dimension 1 (voir [5], p. 206). D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbf{G}(\mathcal{A}(G)/\mathcal{I})$ possède une structure de Dirac multiplicative L' non triviale. Dans ce cas, on utilise le morphisme de G dans $\mathbf{G}(\mathcal{A}(G)/\mathcal{I})$ engendré par la projection de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{A}(G)/\mathcal{I}$. □

Références

[1] H. Bursztyn, O. Radko, Gauge equivalence of Dirac structures and symplectic groupoids, Ann. Inst. Fourier 53 (2003) 309–337.
[2] M. Cahen, S. Gutt, C. Ohn, M. Parker, Lie–Poisson groups: Remarks and examples, Lett. Math. Phys. 19 (1990) 343–353.
[3] J.T. Courant, Dirac manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990) 631–661.
[4] V. Drinfeld, Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and geometric meaning of the classical Yang–Baxter equations, Soviet Math. Dokl. 27 (1) (1983) 68–71.
[5] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.
[6] K. Mackenzie, General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids, Lecture Notes London Math. Soc., vol. 213, 2005.
[7] C. Ortiz, Multiplicative Dirac structures on Lie groups, arXiv:0906.2373v1, 12 June 2009.