Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1419–1422

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Intégrabilité algébrique du réseau de Toda $\mathfrak{d}_3^{(2)}$

Djagwa Dehainsala

Université de Poitiers, laboratoire de mathématiques et applications, UMR 6086, SP2MI, téléport 2, boulevard Marie-et-Pierre-Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

Reçu le 19 juin 2008 ; accepté après révision le 9 septembre 2009

Disponible sur Internet le 30 octobre 2009

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous démontrons l'intégrabilité algébrique du réseau de Toda $\mathfrak{d}_3^{(2)}$, étudions la géométrie de ses variétés invariantes et explicitons un morphisme entre le réseau et le système de Mumford. ***Pour citer cet article : D. Dehainsala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Algebraic integrability of the $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ Toda lattice. We show the algebraic integrability of the $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ Toda lattice and study the geometry of its invariant manifolds. Also, we give an explicit morphism between this system and the Mumford system. ***To cite this article: D. Dehainsala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Un système d'équations différentielles complexes polynomiales est dit algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) quand il est intégrable au sens de Liouville (c'est-à-dire possède un nombre suffisant d'intégrales premières fonctionnellement indépendantes en involution) et que les variétés invariantes complexes tracées par ses flots, se complètent en une variété abélienne (un tore complexe algébrique). La notion d'intégrabilité fût introduite dans les années 1980 par Adler et van Moerbeke (voir [1] ou [2, Partie II]) et est basée sur la recherche des solutions de Laurent formelles, inspirée des travaux de Kowalevski. Dans cette Note, nous nous intéressons au réseau de Toda associé à l'algèbre de Lie affine $\mathfrak{d}_3^{(2)}$. Nous démontrons que ce réseau est un système a.c.i. au sens d'Adler et van Moerbeke, et étudions la géométrie des variétés invariantes.

2. Position du problème et intégrabilité de Liouville

Les équations différentielles qui régissent le mouvement du réseau de Toda $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ sont données par

Adresse e-mail : djagwa.dehainsala@math.univ-poitiers.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.09.013

$$\begin{aligned} \dot x_0 &= x_0 y_0, & \dot y_0 &= 2x_0 - x_1, \\ \dot x_1 &= x_1 y_1, & \dot y_1 &= -2x_0 + 2x_1 - 2x_2, \\ \dot x_2 &= x_2 y_2, & \dot y_2 &= 2x_2 - x_1, \end{aligned}$$

sur l'hyperplan $\mathcal{H} = \{(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{C}^6 \mid y_0 + y_1 + y_2 = 0\}$ de dimension 5 [2]. Ce champ de vecteurs, qu'on notera $\mathcal{V}_1$, admet pour intégrales premières les polynômes suivants

$$F_1 = y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1 - 4x_2, \qquad F_2 = \left(y_0^2 - 4x_0\right)\left(y_2^2 - 4x_2\right) - x_1(2y_0y_2 - 4x_0 - x_1 - 4x_2),$$
$$F_3 = x_0x_1x_2.$$

On considère sur $\mathbf{C}^6$ la structure de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ de rang 4, donnée par la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^\top & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } X := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_0 & -x_0 & 0 \\ -x_1 & 2x_1 & -x_1 \\ 0 & -x_2 & x_2 \end{pmatrix},$$

qui se restreint à une structure de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$. On vérifie que F_3 est un Casimir de $\{\cdot,\cdot\}_\mathcal{H}$, $\mathcal{V}_1$ est un champ hamiltonien, $\mathcal{V}_1 = \{\cdot, F_1\}_\mathcal{H}$ et que le champ hamiltonien $\mathcal{V}_2 := \{\cdot, F_2\}_\mathcal{H}$ qui commute avec $\mathcal{V}_1$. La famille $\mathbf{F} := (F_1, F_2, F_3)$ est involutive et on montre que les différentielles $\mathrm{d}F_i$ sont indépendantes sur un ouvert dense de $\mathcal{H}$, par conséquent $(\mathcal{H}, \{\cdot,\cdot\}_\mathcal{H}, \mathbf{F})$ est complètement intégrable au sens de Liouville.

3. Intégrabilité algébrique

Il est question de montrer que, pour $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3$ générique, les variétés invariantes complexes vues comme des variétés affines (non compactes) dans $\mathcal{H}$ peuvent être complétées en des tores complexes algébriques c'est-à-dire $\mathbf{F}_c := \bigcap_{i=1}^3 \{m \in \mathcal{H}\colon\ F_i(m) = c_i\} = \mathbf{T}_c^2 \backslash \mathcal{D}_c$ où $\mathbf{T}_c^2$ est une surface abélienne et $\mathcal{D}_c$ est un diviseur (courbe probablement singulière et réductible). Il existe sur $\mathbf{C}^6$ une involution $\pi : (x_0, \ldots, y_2) \mapsto (x_2, x_1, x_0, y_2, y_1, y_0)$ qui se restreint à $\mathcal{H}$ et aux fibres de $\mathbf{F}$ et laisse invariantes les fonctions F_i ainsi que les champs $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. Si on affecte à x_0, x_1 et x_2 le poids 2 et à y_0, y_1 et y_2 le poids 1, alors le champ $\mathcal{V}_1$ devient homogène à poids. Ainsi, on montre que le système admet trois familles de solutions de Laurent (homogènes à poids) dépendant de 4 ($= \dim \mathcal{H} - 1$) paramètres libres (balances principales). Les deux premières, notées $s(t; \Gamma^0)$ et $s(t; \Gamma^1)$, sont respectivement données par

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{t^2} + d + \frac{1}{10}\left(6d^2 - e\right)t^2 + \cdots, & x_0(t) &= \beta t + \cdots, \\ x_1(t) &= et^2 + \cdots, & x_1(t) &= \frac{1}{t^2} + \gamma - \frac{1}{2}(\beta + \delta)t + \cdots, \\ x_2(t) &= c + act + \frac{1}{2}c\left(2c + a^2\right)t^2 + \cdots, & x_2(t) &= \delta t + \cdots, \\ y_0(t) &= -\frac{2}{t} + 2dt - \frac{2}{5}\left(e - d^2\right)t^3 + \cdots, & y_0(t) &= \frac{1}{t} + \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\beta + \delta)t^2 + \cdots, \\ y_1(t) &= \frac{2}{t} - a - 2(c + d)t - act^2 + \star t^3 + \cdots, & y_1(t) &= -\frac{2}{t} + 2\gamma t - \frac{3}{2}(\beta + \delta)t^2 + \cdots, \\ y_2(t) &= a + 2ct + act^2 + \frac{1}{3}\left(2c^2 + a^2c - e\right)t^3 + \cdots, & y_2(t) &= \frac{1}{t} - \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\delta + \beta)t^2 + \cdots. \end{aligned}$$

où $\star := (11e - 10c^2 - 6d^2 - 5a^2c)/15$. La dernière $s(t; \Gamma^2)$ est obtenue en appliquant l'involution π à $s(t; \Gamma^0)$. L'étape suivante consiste à déterminer les diviseurs de Painlevé formels i.e. les courbes algébriques, définies par les trois balances principales $s(t, \Gamma^k)$ lorsqu'elles sont resreintes à $F_i = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$. On a le

Théorème 3.1. *Le diviseur de Painlevé formel Γ_c^0 (resp. Γ_c^2) de $s(t; \Gamma^0)$ (resp. $s(t; \Gamma^2)$) est une surface de Riemann lisse hyperelliptique de genre 2 d'équation affine*

$$a^4e^2 - (c_1e + 8c_3)a^2e - 4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2 = 0;$$

c'est un revêtement double, ramifié en six points, d'une courbe rationnelle $\mathcal{E}_c$ d'équation

$$u(u - c_1) - 4e + c_2 = 0;$$

l'application liant les deux courbes étant $(a, e) \mapsto (u, e) = (a^2 - 4c_3/e, e)$.

Le diviseur de Painlevé Γ_c^1 de $s(t;\Gamma^1)$ est une surface de Riemann hyperelliptique lisse de genre 3, d'équation affine

$$32\alpha\beta^2+\left(16\alpha^4-8c_1\alpha^2+c_1^2-4c_2\right)\beta-32c_3\alpha=0.$$

La compactification de la fibre générique $\mathbf{F}_c$ en une surface abélienne consiste à plonger $\mathbf{F}_c$ dans un espace projectif, $\mathbf{P}^{15}$ dans notre cas, à l'aide des fonctions polynomiales homogènes à poids ayant au pire un pôle simple quand on leur substitue n'importe laquelle des trois solutions de Laurent trouvées. Une base de ces fonctions est donnée par

$$\begin{aligned}
&z_0=1,\quad z_1=y_0,\quad z_2=y_0+y_2,\quad z_3=x_1-y_0y_2,\quad z_4=4(x_0-x_2)+y_2^2-y_0^2,\\
&z_5=y_0z_3+4x_0y_2,\quad z_6=y_2z_3+4x_2y_0,\quad z_7=x_1x_0,\quad z_8=x_1x_2,\quad z_9=y_0y_2z_4+x_1\left(y_0^2-y_2^2\right),\\
&z_{10}=z_7(y_0-y_2),\quad z_{11}=z_8(y_2-y_0),\quad z_{12}=z_7z_3,\quad z_{13}=z_8z_3,\\
&z_{14}=z_7\left((y_2-y_0)z_3-4x_0y_2\right),\quad z_{15}=z_8\left((y_0-y_2)z_3-4x_2y_0\right).
\end{aligned}$$

Le plongement $\varphi_c:(x_0,\dots,y_2)\in\mathbf{F}_c\mapsto(z_0:\dots:z_{15})\in\mathbf{P}^{15}$ donne lieu, pour chaque $s(t;\Gamma^i)$, à un plongement $\varphi_c^{(i)}:\Gamma_c^i\to\mathbf{P}^{15}$ en considérant les coefficients en t^{-1} des séries de Laurent $z_j(s(t;\Gamma^i))$ obtenues par substitution de $s(t;\Gamma^i)$ dans z_j. On pose $\mathcal{D}_c=\bigcup_{i=0}^2\overline{\varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^i)}=\bigcup_{i=0}^2\mathcal{D}_i$. On prouve alors que $\mathbf{T}_c^2\equiv\overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)}=\mathbf{F}_c\cup\mathcal{D}_c$ est une variété compacte (grâce au fait que les flots du champ $\mathcal{V}_1$ issus des points de $\mathcal{D}_c$ pénètrent immédiatement dans la partie affine $\mathbf{F}_c$, plongée dans $\mathbf{P}^{15}$) et que les champs $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont holomorphes, indépendants en chaque point et commutants. D'après le théorème d'Arnold–Liouville Complexe [2, Theorem 6.22], $\mathbf{T}_c^2$ est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif, c'est une surface abélienne ; puisque $\mathbf{T}_c^2$ contient une courbe non singulière de genre 2, à savoir Γ_c^0, elle est donc isomorphe à la jacobienne de cette courbe [2]. On a le résultat suivant

Théorème 3.2. *Le système de Toda $(\mathcal{H},\{\cdot,\cdot\},\mathbf{F})$ est un système a.c.i. homogène à poids.*

4. Morphisme vers le système de Mumford, équation de Lax et linéarisation

L'involution hyperelliptique $\iota:(x_0,\dots,y_2)\mapsto(x_0,x_1,x_2,-y_0,-y_1,-y_2)$ sur $\mathbf{T}_c^2$ conduit à une surface singulière, la surface de Kummer de $\mathbf{T}_c^2$. Une équation de cette surface est déterminée en éliminant les variables x_0,x_1,x_2,y_0,y_2 des intégrales premières F_i $(i=1,2,3)$ et des sections

$$\left\{1,\ \theta_1=x_2,\ \theta_2=\left(y_0^2-x_1-4x_0\right)x_2,\ \theta_3=x_1x_2^2\right\}$$

du fibré en droites $[2\Gamma_c^0]$. Cette dernière étant donnée par

$$\left((4\theta_1+c_1)^2-4(4\theta_2+c_2)\right)\theta_3^2+P_3(\theta_1,\theta_2)\theta_3+P_4(\theta_1,\theta_2)=0,$$

où P_i est, pour $i\in\{3,4\}$, un polynôme de degré i en θ_1 et θ_2.

Théorème 4.1. *Il existe un morphisme (de systèmes intégrables) $\phi:\mathcal{H}\subset\mathbf{C}^6\to\mathbf{C}^7$, du réseau de Toda $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ dans le système de Mumford de genre 2, où $\mathbf{C}^7$ est l'espace de phase du système de Mumford. On a $\phi(x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2)=(u(\lambda),v(\lambda),w(\lambda))$ où*

$$\begin{aligned}
u(\lambda)&=\lambda^2+\left(y_0^2+y_2^2-4x_0-2x_1\right)\lambda+(x_1-y_0y_2)^2-4x_0\left(y_2^2-x_1\right),\\
v(\lambda)&=\sqrt{-1}\left[4x_2y_2\lambda+4x_2\left(y_2\left(y_2^2-4x_0\right)-x_1y_0\right)\right],\\
w(\lambda)&=\lambda^3+\left(y_0^2+y_2^2-4x_0-8x_2-2x_1\right)\lambda^2\\
&\quad+\left((x_1-y_0y_2)^2+8\left(4x_0+x_1+2x_2-y_0^2\right)x_2-4x_0\left(y_2^2-x_1\right)\right)\lambda-16x_2\left(x_0x_1-x_2\left(y_0^2-4x_0\right)\right).
\end{aligned}\tag{1}$$

La structure de Poisson du système de Mumford par rapport à laquelle ϕ est un morphisme est nouvelle ; de plus elle est non compatible avec les trois structures linéaires, et la structure quadratique connues [4, VII.2.1.].

Corollaire 4.2. *Une représention de Lax du champ de vecteurs $\mathcal{V}_1$ est donnée par*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda) \\ w(\lambda) & -v(\lambda) \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda) \\ w(\lambda) & -v(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(\lambda) & 0 \end{pmatrix}\right]$$

où $b(\lambda) = \lambda - 8x_2$ est la partie polynomiale de la fonction rationnelle $w(\lambda)/u(\lambda)$.

Théorème 4.3. *Les équations différentielles du champ de vecteurs $\mathcal{V}_1$ peuvent s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}s_1}{\sqrt{f(s_1)}} + \frac{\mathrm{d}s_2}{\sqrt{f(s_2)}} = 0, \\ \frac{s_1\mathrm{d}s_1}{\sqrt{f(s_1)}} + \frac{s_2\mathrm{d}s_2}{\sqrt{f(s_2)}} = i\,\mathrm{d}t, \end{cases}$$

où les variables s_1 et s_2 sont les racines de $u(\lambda)$.

Le Théorème 4.3 et (1) donne une linéarisation explicite du système. En utilisant [3, Theorem 4.5] on montre que les solutions champ de vecteurs $\mathcal{V}_1$ peuvent être explicitées en termes de fonctions thêta.

Remerciements

Je remercie ici mon directeur de thèse, Pol Vanhaecke pour l'aide et les indications qu'il m'a données pour la réalisation de ce travail et Camille Laurent pour sa disponibilité à répondre à mes questions.

Références

[1] M. Adler, P. van Moerbeke, The complex geometry of the Kowalewski–Painlevé analysis, Invent. Math. 97 (1989) 3–51.

[2] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[3] D. Mumford, Tata Lectures on Theta. II, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.

[4] P. Vanhaecke, Integrable Systems in the Realm of Algebraic Geometry, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1638, Springer-Verlag, Berlin, 2001.