Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1183–1187

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique/Géométrie différentielle

Une caractérisation des variétés complexes compactes parallélisables admettant des structures affines

Sorin Dumitrescu

Département de mathématiques d'Orsay, bâtiment 425, UMR 8628 du CNRS, université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 28 janvier 2009 ; accepté après révision le 7 septembre 2009

Disponible sur Internet le 18 septembre 2009

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous caractérisons les variétés complexes compactes parallélisables admettant des connexions affines holomorphes plates sans torsion. En particulier, nous exhibons des variétés complexes compactes admettant des connexions affines holomorphes, mais aucune connexion affine holomorphe plate sans torsion. ***Pour citer cet article : S. Dumitrescu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

On complex compact parallelizable manifolds admitting affine structures. We classify complex compact parallelizable manifolds which admit flat torsion free holomorphic affine connections. We exhibit complex compact manifolds admitting holomorphic affine connections, but no flat torsion free holomorphic affine connections. ***To cite this article: S. Dumitrescu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

We deal with compact complex manifolds admitting holomorphic affine connections. The main results are the following:

Proposition 0.1. *Let M be a complex compact parallelizable manifold which is a quotient G/Γ of an n-dimensional complex connected Lie group G by a uniform lattice Γ. Then*:

(i) *M admits holomorphic affine connections. The pull-back of such a connection on G is invariant by right translation.*
(ii) *M admits flat holomorphic affine connections.*

Adresse e-mail : Sorin.Dumitrescu@math.u-psud.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.09.008

(iii) *M admits flat torsion free holomorphic affine connections if and only if there is a Lie algebra monomorphism $i : \mathcal{G} \to gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ such that $i(\mathcal{G})$ intersects trivially the isotropy $gl(n, \mathbf{C})$, where $\mathcal{G}$ is the Lie algebra of G and $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ is the Lie algebra of the complex affine group of $\mathbf{C}^n$.*

Corollary 0.2. *If G is a complex semi-simple Lie group, then a compact complex parallelizable manifold $M = G/\Gamma$ doesn't admit flat torsion free holomorphic affine connections.*

Corollary 0.3. *Let $M = G/\Gamma$ be a three-dimensional compact complex parallelizable manifold. Then M admits flat torsion free holomorphic affine connections if and only if G is solvable.*

We also exhibit examples of non-parallelizable compact complex manifolds which admit (flat) holomorphic affine connections, but no flat torsion free holomorphic affine connections.

The natural question which is still open is whether a compact complex manifold admitting holomorphic affine connections, also admit a flat holomorphic affine connection.

Acknowledgement. This work was partially supported by the ANR Grant Symplexe BLAN 06-3-137237.

1. Introduction

Nous nous intéressons ici aux variétés complexes compactes M dont le fibré tangent holomorphe TM admet des connexions affines holomorphes.

Rappelons qu'une connexion affine holomorphe ∇ est plate (de courbure nulle) et sans torsion si et seulement si elle est localement isomorphe à la connexion standard de $\mathbf{C}^n$. Dans ce cas ∇ munit la variété M d'une *structure affine complexe*, autrement dit M admet un atlas compatible avec la structure complexe dont les applications de changement de carte sont des transfomations affines (voir, par exemple, [3,7]). Réciproquement, une structure affine complexe sur M induit canoniquement une connexion affine holomorphe plate et sans torsion.

Si la variété M est supposée kählérienne, la théorie de Chern–Weil assure que les classes de Chern à coefficients rationnels $c_i(M, \mathbf{Q})$ s'annulent et il n'existe aucune obstruction topologique à l'existence d'une connexion affine holomorphe plate sur M [3]. Effectivement, il est montré dans [5] que M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe, quotient de $\mathbf{C}^n$ par un réseau de translations. En particulier, M hérite de la structure affine complexe de $\mathbf{C}^n$ (donc d'une connexion affine holomorphe plate sans torsion).

Il est également prouvé dans [5] que *toute surface complexe compacte admettant une connexion affine holomorphe est biholomorphe à un quotient d'un ouvert de $\mathbf{C}^2$ par un sous-groupe discret de transformations affines agissant proprement et sans point fixe.* En particulier, M admet une connexion affine holomorphe plate sans torsion.

Le but de cette note est de construire des variétés complexes compactes admettant des connexions affines holomorphes, mais aucune connexion affine holomorphe plate sans torsion. Pour cela nous caractérisons les variétés holomorphes parallélisables qui admettent des structures affines complexes. Rappelons que, d'après [10], une variété complexe compacte parallélisable est un quotient d'un groupe de Lie complexe par un réseau cocompact.

Proposition 1.1. *Soit M une variété complexe compacte parallélisable de dimension n, quotient d'un groupe de Lie complexe connexe G par un réseau cocompact Γ de G. Alors* :

(i) *M admet des connexions affines holomorphes. L'image réciproque d'une telle connexion sur G est une connexion affine holomorphe invariante par translation à droite.*
(ii) *M admet des connexions affines holomorphes plates.*
(iii) *M admet une connexion affine holomorphe plate sans torsion si et seulement s'il existe un morphisme injectif d'algèbres de Lie $i : \mathcal{G} \to gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ dont l'image intersecte trivialement l'isotropie $gl(n, \mathbf{C})$, où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G et $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ est l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbf{C}^n$.*

Corollaire 1.2. *Si G est un groupe de Lie complexe semi-simple, alors les variétés complexes compactes parallélisables $M = G/\Gamma$ n'admettent aucune connexion affine holomorphe sans torsion plate.*

Corollaire 1.3. *Si $M = G/\Gamma$ est une variété complexe compacte parallélisable de dimension trois, alors M admet une connexion affine holomorphe plate sans torsion si et seulement si G est résoluble.*

2. Connexions affines holomorphes

Passons à la preuve de la Proposition 1.1.

Démonstration. (i) Soient $X_1, \ldots, X_n$, des champs de vecteurs invariants par translation à droite sur G. Toute connexion ∇ invariante par translation à droite sur G est caractérisée par des constantes $\Gamma_{ij}^k \in \mathbf{C}$ telles que $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$. Une telle connexion descend sur M.

Inversement, si ∇ est une connexion affine holomorphe sur M, les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k relatifs à la famille de champs de vecteurs holomorphes sur M dont l'image réciproque sur G est $X_1, \ldots, X_n$, sont des fonctions holomorphes et donc constantes sur la variété compacte M.

(ii) Si les constantes Γ_{ij}^k sont toutes nulles, la connexion ∇ est plate. Elle se relève en une connexion plate bi-invariante sur G. La torsion $T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]$ est nulle si et seulement si G est abélien.

(iii) Supposons d'abord que ∇ est une connexion holomorphe plate sans torsion sur G/Γ. Comme ∇ est localement isomorphe à la connexion standard de $\mathbf{C}^n$, l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ est $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$. Par ailleurs, d'après le point (i), il existe dans l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ une copie de $\mathcal{G}$ agissant transitivement (et donc intersectant trivialement l'isotropie $gl(n, \mathbf{C})$).

Réciproquement, si le morphisme i existe, il engendre une action (à droite) affine localement libre du revêtement universel $\tilde{G}$ de G sur $\mathbf{C}^n$ telle que l'orbite de 0 est ouverte. Ceci munit le groupe de Lie $\tilde{G}$ d'une structure affine complexe invariante par translation à droite. Or, M est biholomorphe à un quotient $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$, où $\tilde{\Gamma}$ est un réseau cocompact de $\tilde{G}$. Par conséquent, M hérite de la structure affine complexe $\tilde{G}$-invariante à droite de $\tilde{G}$. □

Nous en déduisons à présent le Corollaire 1.2.

Démonstration. On appliquera le point (iii) de la Proposition 1.1 au groupe G supposé semi-simple complexe et de dimension n.

Considérons un morphisme injectif i de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G dans $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$. Comme $\mathcal{G}$ est semi-simple, la projection $p_1 \circ i$ sur le premier facteur est également un morphisme injectif (sinon $\mathcal{G}$ admettrait un idéal abélien non trivial). Le lemme de Whitehead [4] affirme alors que le premier groupe de cohomologie de $(p_1 \circ i)(\mathcal{G})$ à coefficients dans la représentation induite par la représentation canonique de $gl(n, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n$ s'annule. Ceci implique que, à automorphisme interne près, les seuls morphismes injectifs de $\mathcal{G}$ dans $gl(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ sont à image dans $gl(n, \mathbf{C})$.

Il reste à montrer qu'une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\mathbf{C}^n$ n'admet aucune orbite ouverte. Considérons une telle représentation et soient $K_1, K_2, \ldots, K_n$ des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ qui sont les champs fondamentaux de l'action de $\mathcal{G}$ associés à une base de $\mathcal{G}$.

Comme $\mathcal{G}$ est semi-simple, son représentation sur $\mathbf{C}^n$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie $sl(n, \mathbf{C})$ du groupe spécial linéaire et préserve la forme volume holomorphe $vol = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ sur $\mathbf{C}^n$.

Supposons par l'absurde qu'une telle représentation aurait une orbite ouverte non triviale $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{G}$ est unimodulaire, la fonction holomorphe $vol(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ est constante (non nulle) sur $\mathcal{O}$, et donc sur $\mathbf{C}^n$. Ceci contredit le fait que l'action fixe 0 et donc tous les K_i s'annulent à l'origine. □

Nous en déduisons le Corollaire 1.3.

Démonstration. On appliquera de nouveau le point (iii) de la Proposition 1.1.

Les algèbres de Lie complexes unimodulaires de dimension trois sont : $sl(2, \mathbf{C})$, $\mathbf{C}^3$ et les algèbres de Lie (résolubles) *heis* et *sol* [6]. Rappelons que les algèbres *heis* et *sol* sont engendrées par des générateurs e_1, e_2, e_3, avec les relations de crochet respectivement $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$ et $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$, $[e_2, e_3] = 0$.

Le cas de l'algèbre de Lie semi-simple $sl(2, \mathbf{C})$ vient d'être traité.

Bien sûr $\mathbf{C}^3$ agit librement par translation sur $\mathbf{C}^3$.

Il reste à exhiber dans l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbf{C}^3$ des copies de *heis* ou *sol* qui intersectent trivialement l'isotropie. Soit (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbf{C}^3$. Les éléments $e_1 = (A, f_1), e_2 = (0, f_2), e_3 = (0, f_3) \in$

$gl(3, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^3$ engendrent une algèbre de Lie isomorphe à *heis* ou à *sol* selon que $A \in gl(3, \mathbf{C})$ vérifie $Af_2 = f_3$, $Af_3 = 0$, ou bien $Af_2 = f_2$, $Af_3 = -f_3$. □

Rappelons qu'une connexion affine holomorphe sans torsion ∇ sur une variété complexe M de dimension n est dite *projectivement plate* s'il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de $P^n(\mathbf{C})$ dont chaque carte redresse les géodésiques de ∇ sur des droites de $P^n(\mathbf{C})$ (sans nécessairement préserver le paramètrage). Dans ce cas les changements de carte sont des transformations projectives et cet atlas munit M d'une *structure projective complexe* [3].

Proposition 2.1. *Toute variété complexe compacte parallélisable de dimension trois $M = G/\Gamma$ admet des connexions affines holomorphes sans torsion projectivement plates.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.3, il reste à prouver le résultat pour $G = SL(2, \mathbf{C})$. On commence par construire une structure projective complexe invariante à droite sur $SL(2, \mathbf{C})$. Remarquons que $P^3(\mathbf{C})$ est l'espace projectif sur l'espace vectoriel des polynômes homogènes complexes en deux variables de degré 3. L'action linéaire (par changement linéaire de variable) de $SL(2, \mathbf{C})$ sur cet espace vectoriel se projectivise et admet dans $P^3(\mathbf{C})$ l'orbite ouverte qui provient des polynômes homogènes qui sont produits de trois formes linéaires distinctes (l'action de $SL(2, \mathbf{C})$ sur $P^1(\mathbf{C})$ est trois fois transitive). Ceci fournit une action projective de $SL(2, \mathbf{C})$ sur $P^3(\mathbf{C})$ qui possède une orbite ouverte. On obtient donc une structure projective complexe invariante par translation sur $SL(2, \mathbf{C})$. Celle-ci descend bien sur $SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$.

Comme le fibré canonique de M est trivial, cette structure projective complexe correspond à une connexion affine holomorphe sans torsion projectivement plate sur M (voir [8], formule (3.6), pages 78–79).

Une méthode plus directe est de considérer la connexion (holomorphe sans torsion) standard sur $SL(2, \mathbf{C})$, déterminée par $\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$, pour $x, y \in sl(2, \mathbf{C})$. On vérifie que celle-ci est projectivement plate (formellement les calculs sont les mêmes que pour la sphère S^3). □

2.1. *Quotients exotiques de Ghys*

En dimension 3, des exemples inédits de variétés complexes compactes équipées de connexions affines holomorphes et dont le fibré tangent n'est pas holomorphiquement trivial ont été construits dans [2]. Ces exemples s'obtiennent à partir de $SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$ par déformation de la structure complexe selon le procédé suivant.

D'après [2] il existe des morphismes de groupe $u : \Gamma \to SL(2, \mathbf{C})$ tels que l'action à droite de Γ sur $SL(2, \mathbf{C})$ donnée par :

$$(m, \gamma) \in SL(2, \mathbf{C}) \times \Gamma \to u(\gamma^{-1}) m \gamma \in SL(2, \mathbf{C})$$

est libre et totalement discontinue. Le quotient est une variété complexe compacte $M(u, \Gamma)$ qui, en général, n'est pas parallélisable.

Proposition 2.2. *Les variétés $M(u, \Gamma)$ possèdent des connexions affines holomorphes plates et des connexions affines holomorphes sans torsion projectivement plates, mais aucune connexion affine holomorphe plate sans torsion.*

Démonstration. D'après la preuve de la Proposition 1.1, $SL(2, \mathbf{C})$ admet une connexion affine holomorphe plate bi-invariante. Celle-ci descend en une connexion plate sur $M(u, \Gamma)$.

La connexion standard de $SL(2, \mathbf{C})$ est projectivement plate sans torsion et bi-invariante : elle descend sur $M(u, \Gamma)$.

Considérons maintenant une connexion affine holomorphe quelconque ∇ sur $M(u, \Gamma)$. La différence entre ∇ et la connexion standard est un tenseur holomorphe [3]. Il est prouvé dans [2] que tout tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$ se relève en un tenseur holomorphe sur $SL(2, \mathbf{C})$ invariant par translation à droite. En particulier, ∇ se relève en une connexion invariante par translation à droite sur $SL(2, \mathbf{C})$ et donc l'algèbre de Lie du pseudo-groupe des isomorphismes locaux de ∇ contient une copie de $sl(2, \mathbf{C})$ agissant transitivement. On conclut comme dans la preuve du Corollaire 1.2 que ∇ n'est pas plate sans torsion. □

3. Conclusions

La question naturelle qui reste ouverte est de savoir si toute variété complexe compacte M qui admet une connexion affine holomorphe possède également une connexion affine holomorphe plate (quitte à supposer éventuellement que les classes de Chern $c_i(M, \mathbf{Q})$ s'annulent).

Dans le contexte plus général des fibrés vectoriels holomorphes, des résultats dans ce sens sont connus sur certaines variétés projectives [1,9] et sur les variétés complexes parallélisables [11].

Références

[1] I. Biswas, Vector bundles with holomorphic connection over a projective manifold with tangent bundle of nonnegative degree, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (10) (1998) 2827–2834.
[2] E. Ghys, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. 468 (1995) 113–138.
[3] R. Gunning, On Uniformization of Complex Manifolds: The Role of Connections, Princeton Univ. Press, 1978.
[4] P. Hilton, U. Stammbach, A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, 1971.
[5] M. Inoue, S. Kobayashi, T. Ochiai, Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (2) (1980) 247–264.
[6] A. Kirilov, Eléments de la théorie des représentations, MIR, 1974.
[7] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Interscience Tracts, Wiley, New York, 1969.
[8] S. Kobayashi, T. Ochiai, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, Math. Ann. 249 (1980) 75–94.
[9] C. Simpson, Higgs bundles and local systems, Pub. Math. IHES 75 (1992) 5–95.
[10] H.C. Wang, Complex parallelisable manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 771–776.
[11] J. Winkelmann, Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds, Mém. S.M.F. 72/73 (1998).