Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1087–1092
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Mathematical Physics

Limiting absorption principle at low energies for a mathematical model of weak interaction: The decay of a boson

Jean-Marie Barbaroux [a,b], Jean-Claude Guillot [c]

[a] Centre de physique théorique, Luminy case 907, 13288 Marseille cedex 9, France
[b] Département de mathématiques, université du Sud Toulon-Var, 83957 La Garde cedex, France
[c] Centre de mathématiques appliquées, UMR 7641, École polytechnique – CNRS, 91128 Palaiseau cedex, France

Received 5 June 2009; accepted 13 July 2009

Available online 12 August 2009

Presented by Evariste Sanchez-Palencia

Abstract

We study the spectral properties of a Hamiltonian describing the weak decay of spin 1 massive bosons into the full family of leptons. We prove that the considered Hamiltonian is self-adjoint, with a unique ground state and we derive a Mourre estimate and a limiting absorption principle above the ground state energy and below the first threshold, for a sufficiently small coupling constant. As a corollary, we prove absence of eigenvalues and absolute continuity of the energy spectrum in the same spectral interval. ***To cite this article: J.-M. Barbaroux, J.-C. Guillot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Résumé

Propriétés spectrales et principe d'absorption limite à faible énergie pour un modèle mathématique d'interaction faible : La désintégration d'un boson. Nous étudions les propriétés spectrales d'un hamiltonien qui décrit la désintégration du boson massif $W^{\pm}$, de spin 1. Nous démontrons que ce hamiltonien est auto-adjoint, que l'infimum de son spectre est une valeur propre simple. Nous montrons par ailleurs une inégalité de Mourre et un principe d'absorption limite pour les énergies en dessous du premier seuil. Comme corollaire, nous obtenons le caractère purement absolument continu du spectre pour ces mêmes énergies. ***Pour citer cet article : J.-M. Barbaroux, J.-C. Guillot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

D'après le modèle standard, les bosons $W^{\pm}$, particules médiatrices de l'interaction faible, se désintègrent en paires de leptons. Les leptons sont l'électron e^-, le muon μ^-, le lepton tau τ^-, leurs antiparticules respectives e^+, μ^+, τ^+, et les neutrinos et antineutrinos associés ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ et $\bar{\nu}_\tau$.

Les électrons, les muons et les leptons tau ainsi que leurs antiparticules sont des particules chargées de masse non nulle et de spin $\pm 1/2$. Les neutrinos et les antineutrinos sont des particules sans charge, suposées de masse nulle dans

E-mail addresses: barbarou@univ-tln.fr (J.-M. Barbaroux), guillot@cmapx.polytechnique.fr (J.-C. Guillot).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.07.014

ce modèle, et qui possèdent une hélicité $\pm 1/2$. Les bosons $W^{\pm}$ sont des particules de spin 1 et dont la polarisation est indexée par $\{-1,\ 0,\ 1\}$ (cf. [9, Section 5.2]).

Les valeurs $\ell \in \{1,2,3\}$ correspondent aux différentes variétés de leptons : l'indice $\ell = 1$ sera utilisé pour décrire les électrons, les positrons, et les neutrinos associés ν_e et $\bar{\nu}_e$; l'indice $\ell = 2$ sera utilisé pour les muons μ^- et μ^+ et les neutrinos ν_μ et $\bar{\nu}_\mu$ associés ; enfin, $\ell = 3$ sera utilisé pour les leptons tau τ^- et τ^+ et les neutrinos associés ν_τ et $\bar{\nu}_\tau$.

L'espace qui décrit l'ensemble des états quantiques est l'espace de Fock

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_L \otimes \mathfrak{F}_W,$$

où $\mathfrak{F}_L$ est l'espace de Fock fermionique pour les leptons $\ell = 1,2,3$ et $\mathfrak{F}_W$ est l'espace de Fock bosonique pour les bosons $W^{\pm}$.

Pour $\ell = 1, 2$ ou 3, on note $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$ et $b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$ les opérateurs d'annihilation et de création pour les particules leptoniques massives respectives e^-, μ^- et τ^- quand $\epsilon = +$ et pour les antiparticules leptoniques massives respectives e^+, μ^+ et τ^+ quand $\epsilon = -$. De même, pour $\ell = 1, 2$ ou 3, on note respectivement $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ et $c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ les opérateurs d'annihilation et de création pour les neutrinos respectifs ν_e, ν_μ et ν_τ quand $\epsilon = +$ et les antineutrinos $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ et $\bar{\nu}_\tau$ quand $\epsilon = -$. Enfin, on note $a_\epsilon(\xi_3)$ et $a^*_\epsilon(\xi_3)$ les opérateurs d'annihilation et de création pour le boson W^- quand $\epsilon = +$ et pour le boson W^+ quand $\epsilon = -$.

Les opérateurs $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$, $b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$ obéissent aux relations d'anticommutation canonique (CAR) usuelles. Il en est de même pour les opérateurs $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ et $c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$. Par contre, les opérateurs $a_\epsilon(\xi_3)$ et $a^*_\epsilon(\xi_3)$ obéissent aux relations de commutation canonique (CCR) usuelles (cf. [9]).

De plus, suivant la convention adoptée dans [9, Sections 4.1 et 4.2], on supposera que les opérateurs de création et d'annihilation, pour des variétés différentes de leptons, anticommutent toujours entre eux.

Le hamiltonien libre H_0 est alors défini par

$$\begin{aligned} H_0 = {} & \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon=\pm} \int w_\ell^{(1)}(\xi_1) b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1 + \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon=\pm} \int w_\ell^{(2)}(\xi_2) c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2) c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_2 \\ & + \sum_{\epsilon=\pm} \int w^{(3)}(\xi_3) a^*_\epsilon(\xi_3) a_\epsilon(\xi_3)\, \mathrm{d}\xi_3. \end{aligned}$$

Ici, les énergies libres relativistes pour un lepton massif, un neutrino et un boson, sont respectivement

$$w_\ell^{(1)}(\xi_1) = \left(|p_1|^2 + m_\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad w_\ell^{(2)}(\xi_2) = |p_2| \quad \text{et} \quad w^{(3)}(\xi_3) = \left(|k|^2 + m_W^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

où m_ℓ est la masse du lepton ℓ, m_W celle du boson, avec $m_1 < m_2 < m_3 < m_W$.

Le terme d'interaction H_I s'écrit

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)},$$

où l'opérateur $H_I^{(1)}$ décrit la désintégration des bosons W^+ et W^-, et $H_I^{(2)}$ est le terme qui est responsable du fait que le vide nu Ω dans $\mathfrak{F}$ n'est plus un vecteur propre du hamiltonien total. Les opérateurs $H_I^{(1)}$ et $H_I^{(2)}$ sont définis respectivement par (9) et (10).

Les noyaux $G^{(2)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(.,.,.)$ ($\alpha = 1,2$) qui interviennent dans ces définitions, lorsqu'ils sont calculés en physique théorique, contiennent une δ-distribution en vertu de la conservation de l'impulsion (cf. [6], [9, Section 4.4]). Pour donner un sens mathématique rigoureux à ces opérateurs, on approxime ici ces noyaux singuliers par des fonctions de carré intégrable, i.e., on fait l'hypothèse (7) (cf. [5]).

En notant g la constante de couplage pour l'interaction, le hamiltonien total est alors défini par

$$H = H_0 + gH_I.$$

Le premier résultat concerne le caractère auto-adjoint du hamiltonien total H.

Théorème 0.1. *Soit $g_1 > 0$ tel que $\frac{3g_1^2}{m_W}(\frac{1}{m_1^2} + 1) \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon\neq\epsilon'} \|G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}\|^2_{L^2(\Sigma_1\times\Sigma_1\times\Sigma_2)} < 1$. Alors, pour $0 < g \leqslant g_1$, l'opérateur H est auto-adjoint dans $\mathfrak{F}$, de domaine celui de l'opérateur libre H_0.*

Le second résultat est dédié à l'existence d'un état fondamental, le vide habillé, et à la localisation du spectre absolument continu de H.

Théorème 0.2. *On suppose maintenant que les noyaux $G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}$ satisfont les hypothèses* (7) *et* (12)-(i). *Alors il existe g_2, $0 < g_2 \leqslant g_1$, tel que l'opérateur H admet un état fondamental unique si $0 < g < g_2$. De plus, on a $\inf\sigma(H) \leqslant 0$ et*

$$\sigma(H) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H) = \big[\inf\sigma(H), \infty\big). \tag{1}$$

Remarquons ici que (1) n'implique pas que le spectre au dessus de l'état fondamental est exclusivement absolument continu. C'est dans le théorème suivant que l'on caractérise plus précisemment le spectre des basses énergies, et que l'on montre le caractère purement absolument continu de celui-ci pour les basses énergies, valeur propre de l'état fondamental exclue. On montre aussi un principe d'absorption limite.

Théorème 0.3 *(Principe d'absorption limite). On suppose que les noyaux $G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}$ satisfont les hypothèses* (7) *et* (12), *et on note $\langle A\rangle := (1 + A^2)^{1/2}$, où A est l'opérateur conjugué défini par* (13). *Alors, pour tout δ satisfaisant $0 < \delta < m_1$, il existe $0 < g_\delta \leqslant g_2$ tel que, pour $0 < g \leqslant g_\delta$, on a*

(i) *Le spectre de H dans $(\inf\sigma(H), m_1 - \delta]$ est purement absolument continu.*
(ii) *Pour tout $s > 1/2$ et tout φ, ψ dans $\mathfrak{F}$, les limites $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi, \langle A\rangle^{-s}(H - \lambda \pm i\varepsilon)\langle A\rangle^{-s}\psi)$ existent uniformément pour tout λ dans un sous-ensemble compact de $(\inf\sigma(H), m_1 - \delta]$.*

1. Definition of the model

The weak decay of the intermediate bosons W^+ and W^- involves the full family of leptons together with the bosons themselves, according to the Standard Model (see [6, Formula (4.139)] and [10]).

The full family of leptons consists of the electron e^-, the muon μ^-, the tau lepton τ^-, their associated neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ and all their antiparticles e^+, μ^+, τ^+, $\bar\nu_e$, $\bar\nu_\mu$, and $\bar\nu_\tau$. In the Standard Model, neutrinos and antineutrinos are massless particles, with helicity $-1/2$ and $+1/2$ respectively. Here we shall assume that both neutrinos and antineutrinos have helicity $\pm 1/2$.

The mathematical model for the weak decay of the vector bosons $W^\pm$ is defined as follows.

The index $\ell \in \{1, 2, 3\}$ denotes each species of leptons: $\ell = 1$ denotes the electron e^-, the positron e^+ and the associated neutrinos ν_e, $\bar\nu_e$; $\ell = 2$ denotes the muons μ^-, μ^+ and the associated neutrinos ν_μ and $\bar\nu_\mu$; and $\ell = 3$ denotes the tau-leptons τ^-, τ^+, and the associated neutrinos ν_τ and $\bar\nu_\tau$.

Let $\xi_1 = (p_1, s_1)$ be the quantum variables of a massive lepton, where $p_1 \in \mathbb{R}^3$ and $s_1 \in \{-1/2, 1/2\}$ is the spin polarization of particles and antiparticles. Let $\xi_2 = (p_2, s_2)$ be the quantum variables of a massless lepton where $p_2 \in \mathbb{R}^3$ and $s_2 \in \{-1/2, 1/2\}$ is the helicity of particles and antiparticles and, finally, let $\xi_3 = (k, \lambda)$ be the quantum variables of the spin 1 bosons W^+ and W^- where $k \in \mathbb{R}^3$ and $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ accounts for the polarization of the vector bosons (see [9, Section 5.2]).

We set $\Sigma_1 = \mathbb{R}^3 \times \{-1/2, 1/2\}$ for the configuration space of the leptons and $\Sigma_2 = \mathbb{R}^3 \times \{-1, 0, 1\}$ for the bosons. Thus $L^2(\Sigma_1)$ is the Hilbert space of each lepton and $L^2(\Sigma_2)$ is the Hilbert space of each boson. In the sequel, we shall use the notations $\int_{\Sigma_1} \mathrm{d}\xi := \sum_{s=+\frac12,-\frac12} \int \mathrm{d}p$ and $\int_{\Sigma_2} \mathrm{d}\xi := \sum_{\lambda=0,1,-1} \int \mathrm{d}k$.

The Hilbert space for the weak decay of the vector bosons $W^\pm$ is the Fock space for leptons and bosons describing the set of states with indefinite number of particles or antiparticles, which we define below.

For every ℓ, $\mathfrak{F}_\ell$ is the fermionic Fock space for the corresponding species of leptons including the massive particle and antiparticle together with the associated neutrino and antineutrino, i.e.,

$$\mathfrak{F}_\ell = \bigotimes^4 \mathfrak{F}_a\big(L^2(\Sigma_1)\big) = \bigotimes^4 \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_a^n L^2(\Sigma_1) \right), \quad \ell = 1, 2, 3, \tag{2}$$

where $\bigotimes_a^n$ denotes the antisymmetric n-th tensor product and $\bigotimes_a^0 L^2(\Sigma_1) := \mathbb{C}$.

The fermionic Fock space $\mathfrak{F}_L$ for the leptons is

$$\mathfrak{F}_L = \bigotimes_{\ell=1}^{3} \mathfrak{F}_\ell. \tag{3}$$

The bosonic Fock space $\mathfrak{F}_W$ for the vector bosons W^+ and W^- is

$$\mathfrak{F}_W = \bigotimes^{2} \mathfrak{F}_s\big(L^2(\Sigma_2)\big) = \bigotimes^{2}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigotimes_{s}^{n} L^2(\Sigma_2)\right), \tag{4}$$

where $\bigotimes_s^n$ denotes the symmetric n-th tensor product and $\bigotimes_s^0 L^2(\Sigma_2) := \mathbb{C}$.

The Fock space for the weak decay of the vector bosons W^+ and W^- is thus

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_L \otimes \mathfrak{F}_W. \tag{5}$$

For each $\ell = 1, 2, 3$, $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$ (resp. $b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$) is the annihilation (resp. creation) operator for the corresponding species of massive particle when $\epsilon = +$ and for the corresponding species of massive antiparticle when $\epsilon = -$. Similarly, for each $\ell = 1, 2, 3$, $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ (resp. $c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$) is the annihilation (resp. creation) operator for the corresponding species of neutrino when $\epsilon = +$ and for the corresponding species of antineutrino when $\epsilon = -$. Finally, the operator $a_\epsilon(\xi_3)$ (resp. $a^*_\epsilon(\xi_3)$) is the annihilation (resp. creation) operator for the boson W^- when $\epsilon = +$, and for the boson W^+ when $\epsilon = -$. The operators $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$, $b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$, $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ and $c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ fulfill the usual canonical anticommutation relations (CAR), whereas $a_\epsilon(\xi_3)$ and $a^*_\epsilon(\xi_3)$ fulfill the canonical commutation relation (CCR), see e.g. [9]. Moreover, the a's commute with the b's and the c's.

In addition, following the convention described in [9, Section 4.1] and [9, Section 4.2], we shall assume that fermionic creation and annihilation operators of different species of leptons will always anticommute.

The free Hamiltonian H_0 is given by

$$\begin{aligned} H_0 = {} & \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{\epsilon=\pm}\int w_\ell^{(1)}(\xi_1) b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 + \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{\epsilon=\pm}\int w_\ell^{(2)}(\xi_2) c^*_{\ell,\epsilon}(\xi_2) c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2 \\ & + \sum_{\epsilon=\pm}\int w^{(3)}(\xi_3) a^*_\epsilon(\xi_3) a_\epsilon(\xi_3)\,\mathrm{d}\xi_3, \end{aligned} \tag{6}$$

where the free relativistic energy of the massive leptons, the neutrinos, and the bosons are respectively

$$w_\ell^{(1)}(\xi_1) = \big(|p_1|^2 + m_\ell^2\big)^{\frac{1}{2}}, \quad w_\ell^{(2)}(\xi_2) = |p_2| \quad \text{and} \quad w^{(3)}(\xi_3) = \big(|k|^2 + m_W^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Here m_ℓ is the mass of the lepton ℓ and m_W is the mass of the bosons, with $m_1 < m_2 < m_3 < m_W$.

The interaction H_I is described in terms of annihilation and creation operators together with kernels $G^{(2)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(.,.,.)$ ($\alpha = 1, 2$). Each kernel $G_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, computed in theoretical physics, contains a δ-distribution because of the conservation of the momentum (see [6], [9, Section 4.4]). Here, we approximate the singular kernels by square integrable functions (cf. [5]). Therefore, we assume the following:

Hypothesis 1.1. *For $\alpha = 1, 2$, $\ell = 1, 2, 3$, $\epsilon, \epsilon' = \pm$, we assume*

$$G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in L^2(\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2). \tag{7}$$

Based on [6, p. 159, (4.139)] and [10, p. 308, (21.3.20)] we define the interaction terms as

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)}, \tag{8}$$

with

$$\begin{aligned} H_I^{(1)} = {} & \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{\epsilon\neq\epsilon'}\int G^{(1)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1) c^*_{\ell,\epsilon'}(\xi_2) a_\epsilon(\xi_3)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3 \\ & + \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{\epsilon\neq\epsilon'}\int \overline{G^{(1)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} a^*_\epsilon(\xi_3) c_{\ell,\epsilon'}(\xi_2) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3, \end{aligned} \tag{9}$$

$$H_I^{(2)} = \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int G^{(2)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1) c^*_{\ell,\epsilon'}(\xi_2) a^*_{\epsilon}(\xi_3)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int \overline{G^{(2)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} a_{\epsilon}(\xi_3) c_{\ell,\epsilon'}(\xi_2) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3. \tag{10}$$

The operator $H_I^{(1)}$ describes the decay of the bosons W^+ and W^- into leptons, and $H_I^{(2)}$ is responsible for the fact that the bare vacuum will not be an eigenvector of the total Hamiltonian, as expected from the physics.

For $\ell = 1, 2, 3$, each terms in $H_I^{(1)}$ and $H_I^{(2)}$ are well defined as quadratic forms on the set of smooth functions corresponding to states with finitely many particles. According to [7, Theorem X.24] (see details in [3]) one can construct a closed operator associated with the quadratic form defined by (8)–(10).

The total Hamiltonian is thus (g is a coupling constant),

$$H = H_0 + g H_I, \quad g > 0. \tag{11}$$

The first result is the self-adjointness of H. It is proved by showing that for each $\ell = 1, 2, 3$, the corresponding terms occurring in the interaction H_I are relatively bounded with respect to the square root of the number of massive lepton operator $N_\ell = \sum_\epsilon b^*_{\ell,\epsilon}(\xi_1) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1$. Since the leptons are massive, this allows one to prove that the perturbation H_I is relatively bounded with respect to H_0 (see [3]).

Theorem 1.2. *Let $g_1 > 0$ be such that $\frac{3g_1^2}{m_W}(\frac{1}{m_1^2} + 1) \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \|G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}\|^2_{L^2(\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2)} < 1$. Then for every g satisfying $g \leqslant g_1$, H is a self-adjoint operator in $\mathfrak{F}$ with domain $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$.*

2. Spectral properties

In the sequel, we shall make the following additional assumptions on the kernels $G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}$:

Hypothesis 2.1. *There exists $C > 0$ and $\Lambda > m_1$ such that for $\alpha = 1, 2$, $\ell = 1, 2, 3$, $\epsilon, \epsilon' = \pm$, and $i, j = 1, 2, 3$*

$$\text{(i)} \quad \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2} \frac{|G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)|^2}{|p_2|^2}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 < \infty,$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\int_{\Sigma_1 \times \{|p_2| \leqslant \sigma\} \times \Sigma_2} \left| G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sigma^2,$$

$$\text{(iii-a)} \quad \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2} \left| \left[(p_2 \cdot \nabla_{p_2}) G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'} \right](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 < \infty,$$

$$\text{(iii-b)} \quad \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2} p_{2,i}^2 p_{2,j}^2 \left| \frac{\partial^2 G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}}{\partial p_{2,i} \partial p_{2,j}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 < \infty,$$

$$\text{(iv)} \quad G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 \quad \textit{if } |p_2| \geqslant \Lambda \quad (\textit{ultraviolet cutoff}). \tag{12}$$

The next result is devoted to the existence of a ground state for H together with the location of the spectrum of H and of its absolutely continuous spectrum, when g is sufficiently small.

Theorem 2.2. *Suppose that the kernels $G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}$ satisfy hypothesis* (7) *and* (12)-(i). *Then there exists $0 < g_2 \leqslant g_1$ such that H has a unique ground state for $g \leqslant g_2$. Moreover $\inf \sigma(H) \leqslant 0$ and*

$$\sigma(H) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H) = \left[\inf \sigma(H), \infty\right).$$

According to Theorem 2.2 the ground state energy $E = \inf \sigma(H)$ is a simple eigenvalue of H and our main results are concerned with a careful study of the spectrum of H above the ground state energy.

The derivation of the limiting absorption principle in Theorem 2.3 is based on the conjugated operator method as described in [2] and [8]. The conjugate operator A we pick is the second quantized dilation generator for the neutrinos.

The one-particle conjugated operator on $L^2(\Sigma_1)$ is $a := \frac{1}{2}(p_2 \cdot i\nabla_{p_2} + i\nabla_{p_2} \cdot p_2)$. The operator a is essentially self-adjoint on $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$. Its second quantized version $\mathrm{d}\Gamma(a)$ is a self-adjoint operator in $\mathfrak{F}_a(L^2(\Sigma_1))$. We now define A as the extension to $\mathfrak{F}$ of the following operator in $\mathfrak{F}_L$

$$A = A_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_3 + \mathbf{1}_1 \otimes A_2 \otimes \mathbf{1}_3 + \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes A_3, \tag{13}$$

where A_ℓ is defined as $A_\ell = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathrm{d}\Gamma(a) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathrm{d}\Gamma(a)$.

Theorem 2.3 *(Limiting Absorption Principle). Suppose that the kernels $G^{(\alpha)}_{\ell,\epsilon,\epsilon'}$ satisfy hypothesis* (7) *and* (12). *For any $\delta > 0$ satisfying $0 < \delta < m_1$ there exists $0 < g_\delta \leqslant g_2$ such that, for $0 < g \leqslant g_\delta$,*

(i) *The spectrum of H in $(\inf \sigma(H), m_1 - \delta]$ is purely absolutely continuous.*
(ii) *Let $\langle A\rangle = (1 + A^2)^{1/2}$. For every $s > 1/2$ and φ, ψ in $\mathfrak{F}$, the limits $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi, \langle A\rangle^{-s}(H - \lambda \pm i\varepsilon)\langle A\rangle^{-s}\psi)$ exist uniformly for λ in any compact subset of $(\inf \sigma(H), m_1 - \delta]$.*

The proof is based on a positive commutator estimate, called the Mourre estimate and on a regularity property of H with respect to A [2,8]. According to [4], the main ingredient of the proof are auxiliary operators associated with infrared cutoff Hamiltonians with respect to the momenta of the neutrinos. For a mathematical model about the weak decay of the muons see [1].

References

[1] L. Amour, B. Grébert, J.-C. Guillot, A mathematical model for the Fermi weak interactions, Cubo 9 (2) (2007) 37–57.
[2] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians, Progress in Mathematics, vol. 135, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
[3] J.-M. Barbaroux, J.-C. Guillot, Spectral theory for a mathematical model of the weak interaction: The decay of the intermediate vector bosons $W^\pm$, I., preprint arXiv:0904.3171.
[4] J. Fröhlich, M. Griesemer, I.M. Sigal, Spectral theory for the standard model of non-relativistic QED, Comm. Math. Phys. 283 (3) (2008) 613–646.
[5] J. Glimm, A. Jaffe, Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Birkhäuser, Boston Inc., Boston, MA, 1985, Expositions, Reprint of articles published in 1969–1977.
[6] W. Greiner, B. Müller, Gauge Theory of Weak Interactions, Springer, Berlin, 1989.
[7] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academic Press, New York, 1975.
[8] J. Sahbani, The conjugate operator method for locally regular Hamiltonians, J. Operator Theory 38 (2) (1997) 297–322.
[9] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol. I, Foundations, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
[10] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol. II, Modern Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.