Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1129–1134

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations différentielles

Théorème de Poincaré–Lyapunov et conditions nécessaires d'existence d'un centre

Driss Boularas

Xlim, UMR 6090, DMI, FST, université de Limoges, 123, avenue A. Thomas, 87060 Limoges, France

Reçu le 25 novembre 2008 ; accepté après révision le 6 juillet 2009

Disponible sur Internet le 16 septembre 2009

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Posé au XIXème siècle par Lyapunov et Poincaré, le problème du « centre–foyer » n'a été résolu que pour des cas particuliers. Dans cette Note, grâce à une présentation matricielle et sans passer aux coordonnées polaires, on « revisite » le théorème de Poincaré–Lyapunov et on décrit une méthode « directe » de calcul des conditions d'existence d'un centre pour une famille de systèmes différentiels. ***Pour citer cet article : D. Boularas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

About the Poincaré–Lyapunov theorem and necessary conditions for the existence of a center. Since the end of the XIX century, the "center–focus" problem interested many people. However, up to now, it was solved only for particular families of differential systems. In this Note, with the help of a new matricial presentation, we re-visit the Poincaré–Lyapunov theorem and we give a "direct" computational method of the conditions of a center for some differential systems. ***To cite this article: D. Boularas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

In 1908, H. Dulac [3] has published the first work devoted to the classical "center–focus" problem. Of what consists this problem? Let's consider the differential system

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathcal{B}(x, y), \tag{1}$$

where $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are analytical functions in a neighborhood of the singular point $(0, 0)$ which we suppose nondegenerated. It is well known that when the real parts of the eigenvalues of the linearized system around $(0, 0)$ are non-zero, the qualitative behaviour of the trajectories of the system (1) is topologically equivalent to that of the trajectories of the linearized system. However, when the real parts of the eigenvalues are zero, for the system (1) which can be rewritten

Adresse e-mail : driss.boularas@unilim.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.07.009

under the form

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \mathcal{C}(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \mathcal{D}(x,y), \tag{2}$$

the center of the linearized system can remain a center or be transformed into a focus.

The first result for distinguishing these two situations is the famous theorem of Poincaré:

Theorem 1. *(See [7].) The differential system* (2) *has a center in* $(0,0)$ *if, and only if, it admits an analytical first integral* (*nontrivial*) *in the neighborhood of the origin.*

Consequently, when the functions $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are polynomial of lowest degree greater or equal to 2, the searching of the analytical first integral leads us to the resolution of some infinite family of polynomial equations depending on the coefficients of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$. These equations form the so-called Bautin ideal which is, following the Hilbert's basis theorem, generated by a finite system of relations.

To find a such finite system is precisely the "center–focus" problem. The "center–focus" problem is firstly solved by H. Dulac [3] for the quadratic case, i.e. when $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are homogeneous polynomials of degree 2.

In this Note, using the matricial formulation of the equations of the "center–focus" problem, we purpose a new and simple proof of the Poincaré–Lyapunov's theorem and give the first necessary conditions of the existence of a center for the particular systems

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \mathcal{A}_m(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \mathcal{B}_m(x,y), \tag{3}$$

where $\mathcal{A}_m$ and $\mathcal{B}_m$ are homogeneous polynomials of degree m. Moreover, for these systems, many of necessary conditions are already obtained in [4–6] by different ways.

1. Motivation et différentes notations

En 1908, parut l'article de H. Dulac [3] sur des conditons d'existence d'un centre pour les systèmes quadratiques. Ce fut le premier travail dédié au problème, devenu classique, du « centre–foyer ». En quoi consiste-t-il ? On considère le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathcal{B}(x,y), \tag{4}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont analytiques au voisinage du point singulier $(0,0)$, supposé non dégénéré. On sait que lorsque les parties réelles des valeurs propres du système linéarisé sont non nulles, le comportement qualitatif des trajectoires du système (4) est topologiquement équivalent à celui des trajectoires du système linéarisé. Il n'en est pas forcément de même dans le cas, considéré ici, où ces parties réelles sont nulles. En effet, si les parties réelles des valeurs propres sont nulles, le système (4) qui, le réécrivant sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \mathcal{C}(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \mathcal{D}(x,y), \tag{5}$$

où les valuations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont supérieures ou égales à 2, peut admettre un centre ou un foyer à l'origine. Le premier résultat important établi pour discerner ces deux situations est le célèbre théorème de Poincaré :

Théorème 2. *(Voir [7].) Le système différentiel* (5) *admet un centre à l'origine si, et seulement si, il possède une intégrale première analytique* (*non triviale*) *au voisinage de l'origine.*

Une intégrale première analytique du système général (4), au voisinage de l'origine, est une fonction F, analytique en $(0,0)$ et qui vérifie l'identité

$$\Delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(F)(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\mathcal{A}(x,y) + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\mathcal{B}(x,y) = 0.$$

Ainsi, dans le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des fonctions polynomiales, l'existence d'un centre en $(0,0)$ conduit à la résolution d'une infinité d'équations algébriques en les coefficients de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ces équations forment l'idéal de Bautin qui, d'après le théorème de la base finie de Hilbert (Hilbert's basis theorem) admet un *système fini* de générateurs et trouver un tel système constitue justement le problème du « centre–foyer ».

Ce problème a été résolu pour la première fois par H. Dulac [3] et ce, pour les systèmes quadratiques ($\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des polynômes homogènes de degré deux). La multitude de travaux (voir [8], [6] pour l'historique), la variété des méthodes (fonctions abéliennes, formes de Takens, théorie des invariants, dérivations successives de la fonction du premier retour, ...) qui y sont développées ainsi que les proximités decouvertes avec d'autres problèmes célèbres (16ème problème de Hilbert sur le nombre des cycles limites) lui confèrent le statut de « problème classique » de la théorie qualitative des équations différentielles.

Dans cette Note, nous proposons une nouvelle preuve du théorème de Poincaré–Lyapounov et ensuite, nous en déduisons les premières conditions nécessaires d'existence d'un centre pour les systèmes

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \mathcal{A}_m(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \mathcal{B}_m(x, y), \tag{6}$$

où $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{B}_m$ sont des fonctions polynomiales homogènes de degré m. Rappelons que pour ces systèmes, plusieurs conditions nécessaires ont déjà été obtenues [4–6].

2. Le théorème de Poincaré–Lyapunov « revisité »

Utilisant l'écriture formelle d'une forme algébrique de degré k, $\sum_{i=0}^{k} u_{k-i,i} x^{k-i} y^i$ (voir [1,2]) :

$$[u_{k,0}, u_{k-1,1}, u_{k-2,2}, \dots, u_{0,k}] \begin{bmatrix} x^k \\ x^{k-1}y \\ \vdots \\ y^k \end{bmatrix} = U_k X^k, \tag{7}$$

ainsi que la notation simplifiée $\Delta_{\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_k} = \Delta_k$, une série formelle

$$F(x, y) = F_1 X^1 + F_2 X^2 + \cdots + F_l X^l + \cdots \tag{8}$$

est une intégrale première du système différentiel de degré m

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}(x, y) = A_1 X^1 + \cdots + A_m X^m, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathcal{B}(x, y) = B_1 X^1 + \cdots + B_m X^m, \tag{9}$$

si, et seulement si,

$$\Delta_1\big(F_1X^1 + F_2X^2 + \cdots\big) + \Delta_2\big(F_1X^1 + F_2X^2 + \cdots\big) + \cdots + \Delta_m\big(F_1X^1 + F_2X^2 + \cdots\big) = 0.$$

Regroupant dans cette égalité les termes homogènes en x et y, on obtient une infinité de conditions qui correspondent aux degrés respectifs $1, 2, \dots, m, \dots$:

$$\Delta_1\big(F_1X^1\big) = 0, \quad \Delta_2\big(F_1X^1\big) + \Delta_1\big(F_2X^2\big) = 0, \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{m} \Delta_{m-i+1}\big(F_iX^i\big) = 0, \quad \dots,$$

et de façon générale (degré k quelconque),

$$\Delta_m\big(F_{k-\min(k,m)+1}X^{k-\min(k,m)+1}\big) + \Delta_{m-1}\big(F_{k-\min(k,m)+2}X^{k-\min(k,m)+2}\big) + \cdots + \Delta_1\big(F_kX^k\big) = 0.$$

Sachant que le premier membre de cette équation est une forme algébrique de degré k, il existe $\min(k, m)$ matrices, notées $M_{[i,k]}$ ($i = 1, \dots, k - \min(k, m) + 1, \dots, k$) telles que

$$[F_{k-\min(k,m)+1} M_{[k-\min(k,m)+1,k]} + F_{k-\min(k,m)+2} M_{[k-\min(k,m)+2,k]} + \cdots + F_k M_{[k,k]}]X^k = 0.$$

La chaîne infinie de conditions précédentes s'écrit alors comme suit :

$$F_1\, M_{[1,1]} = 0, \quad F_1\, M_{[1,2]} + F_2\, M_{[2,2]} = 0, \quad F_1\, M_{[1,3]} + F_2\, M_{[2,3]} + F_3\, M_{[3,3]} = 0, \quad \dots \tag{10}$$

– *Exemples de matrices induites par la partie linéaire* : $k=1, d=1,2,3$

$$M_{[1,1]}=\begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{0,1}\\ b_{1,0} & b_{0,1}\end{bmatrix},\qquad M_{[2,2]}=\begin{bmatrix} 2a_{1,0} & 2a_{0,1} & 0\\ b_{1,0} & a_{1,0}+b_{0,1} & a_{0,1}\\ 0 & 2b_{1,0} & 2b_{0,1}\end{bmatrix}.$$

– *Exemples de matrices induites par la partie quadratique* : $k=2, d=1,2,3$

$$M_{[1,2]}=\begin{bmatrix} a_{2,0} & a_{1,1} & a_{0,2}\\ b_{2,0} & b_{1,1} & b_{0,2}\end{bmatrix},\qquad M_{[2,3]}=\begin{bmatrix} 2a_{2,0} & 2a_{1,1} & 2a_{0,2} & 0\\ b_{2,0} & a_{2,0}+b_{1,1} & a_{1,1}+b_{0,2} & a_{0,2}\\ 0 & 2b_{2,0} & 2b_{1,1} & 2b_{0,2}\end{bmatrix}.$$

De façon générale, en adaptant la proposition 12 de [2],

Proposition 1. *Quels que soient les entiers naturels non nuls d et k, en convenant $a_{k+i,-i}=b_{-i,k+i}=0$, nous avons* :

$$\forall j=0,1,2,\dots d,\ \forall r=0,1,2,\dots,k+d-1,\quad [M_{[d,k+d-1]}]_r^j=(d-j)a_{k-r+j,r-j}+jb_{k-r+j-1,r+1-j}. \tag{11}$$

Corollaire 1. *Pour tout entier d, la matrice carrée $M_{[d,d]}$ est définie par* : $\forall j,r\in\{0,1,\dots,d\}$,

$$\begin{aligned}&(M_{[d,d]})_r^j=0\quad si\ |r-j|>1, && (M_{[d,d]})_{j+1}^j=(d-j)a_{0,1},\\ &(M_{[d,d]})_j^j=(d-j)a_{1,0}+jb_{0,1}, && (M_{[d,d]})_{j-1}^j=jb_{1,0}.\end{aligned} \tag{12}$$

Corollaire 2. *La matrice $M_{[1,1]}=\left(\begin{smallmatrix} a_{1,0} & a_{0,1}\\ b_{1,0} & b_{0,1}\end{smallmatrix}\right)$ est diagonale (triangulaire inférieure ou supérieure) si, et seulement si, quel que soit $d=1,2,3,\dots$, la matrice $M_{[d,d]}$ est diagonale (triangulaire inférieure ou supérieure).*

Corollaire 3. *Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice $M_{[1,1]}$, alors les valeurs propres de la matrice $M_{[d,d]}$ sont égales à $(d-k)\lambda_1+k\lambda_2$, où $k=0,1,\dots,d$.*

Poursuivant notre objectif de recherche des conditions d'existence d'une intégrale première du système (5), en posant $z=x+iy$ ($\bar z=x-iy$) où $i^2=-1$, nous obtenons une nouvelle écriture du système (5) :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=iz+U(z,\bar z),\qquad \frac{\mathrm{d}\bar z}{\mathrm{d}t}=-i\bar z+V(z,\bar z), \tag{13}$$

où $U(z,\bar z)$ et $V(z,\bar z)=\overline{U(z,\bar z)}$ sont des séries en z et $\bar z$, de valuation supérieure ou égale à 2. Appliquant les corollaires 2 et 3 aux systèmes (13), on obtient

Lemme 1. *La matrice $M_{[d,d]}$ est diagonale et pour tout $k=0,1,\dots,d$, $(M_{[d,d]})_k^k=(d-2k)i$.*

Ainsi, selon le cas où d est impair ou pair, la matrice $M_{[d,d]}$ est inversible ou non. Des trois premières équations du système (10), on déduit :

$$F_1=[0,0],\quad F_2=[0,\alpha,0],\quad F_3=F_2M_{[2,3]}(M_{[3,3]})^{-1},\quad \dots$$

Par conséquent, la première obstruction à l'existence d'un centre à l'origine vient de la quatrième équation

$$F_2M_{[2,4]}+F_3M_{[3,4]}+F_4M_{[4,4]}=0,$$

puisque la matrice $M_{[4,4]}=\mathrm{diag}([4i,2i,0,-2i,4i])$ n'est pas inversible. De plus, la troisième composante du membre de gauche de cette équation ne dépend pas du choix de F_4 et parmi tous ces choix, il en existe un, tel que $F_2M_{[2,4]}+F_3M_{[3,4]}+F_4M_{[4,4]}=\beta_4(z\bar z)^2$, où le nombre β_4 dépend polynomialement des coefficients de U et de V. En continuant ce processus, on trouve par récurrence tous les F_k qui vérifient le théorème de Poincaré–Lyapunov :

Théorème 3. *Soit le système différentiel* (13)*, il existe alors une série formelle* $F(z,\bar z) = z\bar z + F_3(z,\bar z) + \cdots$ *telle que*

$$\frac{\partial F(z,\bar z)}{\partial z}\big(iz + U(z,\bar z)\big) + \frac{\partial F(z,\bar z)}{\partial \bar z}\big(-i\bar z + V(z,\bar z)\big) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{2k}(z\bar z)^k.$$

Le Théorème 2 est partiellement une conséquence de ce théorème : si toutes les quantités β_{2k} $(k = 2,3,\ldots)$ sont nulles, alors l'origine est un centre pour (5).

Remarque 1. Dans la preuve de ce théorème, Poincaré a commencé par calculer la matrice $M_{[2,2]}$ (voir [7], page 96) avant de passer aux coordonnées polaires. D'ailleurs, une petite erreur s'est glissée dans le calcul de cette matrice.

3. Conditions nécessaires d'existence d'un centre

Considérons maintenant les systèmes différentiels

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = iz + U_m(z,\bar z) = iz + \sum_{k=0}^{m} u_k z^{m-k}\bar z^k, \qquad \frac{\mathrm{d}\bar z}{\mathrm{d}t} = -i\bar z + V_m(z,\bar z) = -i\bar z + \sum_{k=0}^{m} v_k z^{m-k}\bar z^k, \tag{14}$$

où la double indexation est abandonnée et, bien sûr, pour tout $k = 0,2,\ldots,m$, $v_k = \bar u_{m-k}$.

3.1. Structure des conditions d'existence d'un centre

D'après le système d'équations (10), une fonction (8) est une intégrale première du système différentiel (14) si, et seulement si,

$$\begin{cases} F_1 M_{[1,1]} = 0, \\ F_1 M_{1,m} + F_m M_{[m,m]} = 0, \\ \vdots \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} F_{m-1} M_{[m-1,m-1]} = 0, \\ F_{m-1} M_{m-1,2m-2} + F_{2m-2} M_{[2m-2,2m-2]} = 0, \\ \vdots \end{cases} \tag{15}$$

On obtient $m-1$ chaînes de conditions indépendantes les unes des autres dont les consistantes démarrent avec une valuation paire, i.e. une intégrale première formelle de (14) s'écrit nécessairement sous la forme $F(z,\bar z) = F_{2k} Z^{2k} + F_{2k+1} Z^{2k+1} + \cdots$.

Remarque 2. En fait, d'après le théorème 2 de [6], l'existence d'une intégrale première de valuation $2k$ $(k = 1,2,\ldots)$ équivaut à celle d'une intégrale première de valuation 2.

Il en résulte qu'il suffit d'étudier les intégrales de la forme $F(z,\bar z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2+n(m-1)} Z^{2+n(m-1)}$. En posant $M_{[d,d]} = L_d$, on déduit la proposition :

Proposition 2. *Une série* $F(z,\bar z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2+n(m-1)} Z^{2+n(m-1)}$ *est une intégrale première formelle non triviale au voisinage de* 0 *du système* (14) *si, et seulement si,* $F_2 = [0,1,0]$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{2+n(m-1)} M_{[2+n(m-1),2+(n+1)(m-1)]} + F_{2+(n+1)(m-1)} L_{2+(n+1)(m-1)} = 0.$$

Le Lemme 1 et la Proposition 2 suggèrent deux cas d'étude, $m = 2l$ et $m = 2l+1$. Dans le premier cas, les obstructions à l'existence d'une intégrale première apparaissent dans une équation sur deux et dans le second, dans toutes les équations.

3.2. Cas où m est impair

Lemme 2. *On pose* $m = 2l+1$. *Alors,*

$$[M_{2(1+nl),2(1+(n+1)l)}]_{1+(n+1)l}^{1+nl} = (1+nl)(u_l + v_{l+1}).$$

En posant $n = 0$ et $m = 2l + 1$, de ce lemme et de l'égalité $[L_{2(1+l)}]_l^l = 0$, on déduit la première condition d'existence d'un centre à l'origine : $u_l + v_{l+1} = 0$. Sous cette condition, nous obtenons

$$F_{2(1+l)} = i\left(\frac{v_0}{2(l+1)}, \frac{u_0+v_1}{2l}, \dots, \frac{u_{l-1}+v_l}{2}, \alpha_2, -\frac{u_{l+1}+v_{l+2}}{2}, \dots, -\frac{u_{2l}+v_{2l+1}}{2l}, -\frac{u_{2l+1}}{2(l+1)}\right).$$

Ensuite, sachant que

$$\forall j = 0, 1, 2, \dots, 2(1+2l), \quad [L_{2(1+2l)}]_{1+2l}^j = 0 \quad \text{et} \quad F_{2(1+l)}M_{2(1+l),2(1+2l)} + F_{2(1+2l)}L_{2(1+2l)} = 0,$$

et comme $[M_{2(1+l),2(1+2l)}]_{1+2l}^{1+l} = 0$, on en déduit $[F_{2(1+l)}M_{2(1+l),2(1+2l)}]_{1+2l} = 0$. D'où,

$$\sum_{j=0}^{l}[F_{2(1+l)}]_j[M_{2(1+l),2(1+2l)}]_{1+2l}^j + \sum_{j=l+2}^{2(l+1)}[F_{2(1+l)}]_j[M_{2(1+l),2(1+2l)}]_{1+2l}^j = 0.$$

En opérant le changement d'indice $j \longleftrightarrow 2(1+l) - j$ dans la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{l}\left[\frac{u_{j-1}+v_j}{2(l+1-j)}\big[(2l+2-j)u_{2l+1-j} + jv_{2l+2-j}\big] + \frac{u_{2l+1-j1}+v_{2l+2-j}}{2j}\big[ju_{j-1} + (2l+2-j)v_j\big]\right].$$

Rappelant le fait que $u_{-1} = v_{2l+2} = 0$, il s'ensuit :

Théorème 4. *Dans la cas où $m = 2l + 1$, pour que le système* (14) *admette un centre à l'origine, il faut que*

$$u_l + v_{l+1} = 0 \quad \textit{et} \quad \sum_{j=1}^{l}(u_{j-1}u_{2l+1-j} - v_jv_{2l+2-j}) = 0.$$

3.3. Cas où m est pair

Revenons à la Proposition 2. On rappelle que $u_{-1} = v_{2l+1} = 0$. D'après le Corollaire 3, lorsque $m = 2l$ et pour $n = 0$ et $n = 1$, les matrices carrées L_{2l+1} et L_{4l} sont respectivement inversible et non inversible. De la première équation, on déduit la solution unique $[F_{2l+1}]$ avec $[F_{2l+1}]_j = \frac{u_{j-1}+v_j}{2l+1-2j}i$ $(j = 0, \dots, 2l+1)$. De la deuxième condition, en suivant le même cheminement que dans le cas $m = 2l$ (notamment le changement d'indice $j \longleftrightarrow 2l + 1 - j$), on obtient le théorème :

Théorème 5. *Dans le cas où $m = 2l$, pour que le système* (14) *admette un centre à l'origine, il faut que*

$$\sum_{j=1}^{l}(u_{j-1}u_{2l-j} - v_jv_{2l+1-j}) = 0.$$

En conclusion, je remercie vivement le rapporteur de cette Note pour m'avoir indiqué certaines incohérences de notation et les insuffisances de rédaction.

Références

[1] D. Boularas, A. Chouikrat, Équations d'amorçage d'intégrales premières formelles, Linear Multilinear Algebra 56 (3) (2006) 219–233.
[2] D. Boularas, A. Chouikrat, Determinantal analysis of the polynomial integrability of differential systems, Bul. Acad. Stintse 56 (1) (2008).
[3] H. Dulac, Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre, Bull. Sci. Math. 32 (1908) 230–252.
[4] J.-P. Françoise, Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields, Ergodic Theory & Dynamical Systems 16 (1996) 87–96.
[5] A. Gasull, A. Guillamon, V. Manosa, Centre and isochronicity conditions for systems with homogeneous nonlinearities, in: Proceedings of the 2nd Catalan Days on Applied Mathematics, Presses Universitaires de Perpignan, 1995, pp. 106–116.
[6] J. Giné, The nondegenerate center problem and the inverse integrating factor, Bull. Sci. Math. 130 (2006) 152–161.
[7] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles, in : Journal de Mathématiques, Oeuvres de Henri Poincaré, vol. I, Gauthiers-Villars, Paris, 1951, pp. 3–84.
[8] C.S. Sibirskii, Algebraic Invariants of Differential Equations and Matrices, Schtiintsa, Kishinev, Moldova, 1976 (en russe).