Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1035–1040
Comptes Rendus Mathematique

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

# Solutions polyhomogènes des équations d'ondes quasi-linéaires

Piotr T. Chruściel [a,b], Roger Tagne Wafo [c]

[a] LMPT, université François-Rabelais, parc de Grandmont, 37200 Tours, France
[b] Mathematical Institute and Hertford College, Catte Street, Oxford OX1 3BW, United Kingdom
[c] Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences, université de Douala, 237 Douala, Littoral, Cameroun

Reçu le 12 avril 2009 ; accepté le 2 juillet 2009

Disponible sur Internet le 24 juillet 2009

Présenté par Jean-Michel Bony

**Résumé**

On démontre la polyhomogeneité de solutions d'une classe de problèmes de Cauchy hyperboloidal pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles symétriques hyperboliques non linéaires, compatibles avec les équations d'Einstein–Maxwell en dimension d'espace-temps supérieure ou égale à 9. Il en découle l'existence globale de solutions polyhomogènes pour des données initiales petites, stationnaires en dehors d'un compact. ***Pour citer cet article : P.T. Chruściel, R. Tagne Wafo, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


**Abstract**

**Polyhomogeneous solutions of quasi-linear wave equations.** We prove polyhomogeneity of solutions of the hyperboloidal Cauchy problem for a class of quasi-linear symmetric hyperbolic systems, under structure conditions compatible with the Einstein–Maxwell equations in space-time dimensions $n+1 \geqslant 9$. As a byproduct we obtain, in those dimensions, polyhomogeneity at null infinity of small data space-times evolving out of initial data which are stationary outside of a ball. ***To cite this article: P.T. Chruściel, R. Tagne Wafo, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


## Abridged English version

In recent works [2,3], polyhomogeneity of solutions of hyperboloidal Cauchy problems, with polyhomogeneous initial data, has been proved for a large class of semi-linear symmetric hyperbolic systems. The object of this Note is to present an extension of those results to quasi-linear equations satisfying structure conditions compatible with the vacuum Einstein equations, or with the Einstein–Maxwell equations, in space-time dimensions $n+1 \geqslant 9$. For this purpose, we consider a system of second order wave equations of the form (1) for a map $f$ with values in $\mathbb{R}^N$ for some $N$, where $\eta$ is the $(n+1)$-dimensional Minkowski metric. The initial data will be polyhomogeneous and prescribed on the hyperboloid $\mathcal{S}_0$ (see (2)). For example, the Einstein–Maxwell equations in the harmonic-Lorenz gauge can be written in this form (see [1,4,5]). We prove that Eq. (1) has a unique solution defined on a future neighbourhood of the

*Adresses e-mail :* chrusciel@maths.ox.ac.uk (P.T. Chruściel), rtagnewafo@yahoo.com (R. Tagne Wafo).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2009.07.006

whole hyperboloid $\mathcal{S}_0$ when the initial data are polyhomogeneous, without smallness conditions, as long as the space-dimension $n \geqslant 8$. To do this, we use the conformal mapping $\phi: I^+_{\eta,x}(0) \to I^-_{\eta,y}(0)$ defined by $x^\alpha \mapsto y^\alpha := \frac{x^\alpha}{\eta_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu}$, which transforms Eq. (1) into the wave equation (4) where $u = \hat{f} = \Omega^{-\frac{n-1}{2}} f \circ \phi^{-1}$ and $\mathfrak{g} = \Omega^2(\phi^{-1})^* g$, $g = \eta + H$.

Using an energy argument, we prove the following: Consider the wave equations (1) with (3) on a space-time of dimension $1 + n \geqslant 9$. Suppose that the initial data prescribed on the hyperboloid $\mathcal{S}_0$ are such that

$$\hat{f}|_{\phi(\mathcal{S}_0)} \in \left(\mathcal{H}^\alpha_\infty \cap L^\infty\right)(\mathbf{H}_{\mathbf{T}_0}) \quad \text{and} \quad \partial \hat{f}|_{\phi(\mathcal{S}_0)} \in \mathcal{H}^\alpha_\infty(\mathbf{H}_{\mathbf{T}_0}).$$

Then there exists a time $\tau_*$ and a smooth solution $\hat{f}$ defined on $\Omega_{\tau_*}$ such that, $\forall \tau \in [T_0, \tau_*]$, $\hat{f}(\tau) \in \mathcal{C}^\alpha_\infty(\mathbf{H}_\tau)$.

Finally, using this result, we can prove polyhomogeneity of solutions of (1). Let $\delta > 0$. Set $x = \frac{1}{t+r}$, $r = |\vec{x}|$. For the definition of spaces of polyhomogeneous functions $\mathcal{A}_{\{x=0\}}$, $\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}$, $\mathcal{A}_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$, and $\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$ we refer the reader to [2], Eqs. (A.1)–(A.2), pp. 117–118. The main result of this Note is the following:

Consider the Einstein–Maxwell equations on $\mathbb{R}^{1+n}$, $n \geqslant 8$. Let $\delta \in \mathbb{R}$ be such that $1/(2\delta) \in \mathbb{N}$ when $n$ is even and $1/\delta \in \mathbb{N}$ when $n$ is odd. Suppose that the initial data for Eqs. (1)–(3) are polyhomogeneous on the hyperboloid $\mathcal{S}_0$:

$$f|_{\mathcal{S}_0} \in x^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} \cap L^\infty \quad \text{and} \quad \partial_t f|_{\mathcal{S}_0} \in x^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}.$$

There exists a time $t_+ > t_0$ and a solution of (1)–(3) defined on $\bigcup_{t\in[t_0,t_+]} \mathcal{S}_t$ such that $\forall t > t_0$, we have:

$$f(t) = f|_{\mathcal{S}_t} \in x^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} \quad \text{and} \quad \partial_t f(t) = \partial_t f|_{\mathcal{S}_t} \in x^{\frac{n-1}{2}-1} \mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}.$$

Moreover, the solution is polyhomogeneous at $\mathcal{I}$, in the above polyhomogeneity class, as long as it exists; in particular the small data solutions of [5] evolving out from data stationary outside of a compact set are polyhomogeneous.

## 1. Introduction

Dans les travaux [2,3] on démontre la polyhomogeneité de solutions de problème de Cauchy hyperboloidal à données polyhomogènes pour une large classe de systèmes symétriques hyperboliques semi-linéaires. Le but du présent travail est d'étendre ces résultats aux équations quasi-linéaires dont la structure est compatible avec celle des équations d'Einstein du vide ou des équations couplées Einstein–Maxwell. Pour ce faire, nous considérons sur $\mathbb{R}^{n+1}$ une équation d'onde du second degré de la forme

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + H^{\alpha\beta}(f, \partial f) \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = F(f, \partial f), \tag{1}$$

où $f$ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, et $\eta$ la métrique de Minkowski en dimension $n+1$. Les données initiales polyhomogènes seront portées par l'hyperboloide ($t_0 > 0$) :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{\left(x^\mu\right):\ x^0 - t_0 = \sqrt{t_0^2 + |\vec{x}|^2}\right\}, \tag{2}$$

située à l'intérieur du cône lumière de sommet l'origine des coordonnées. Nous montrons que le système (1) possède une solution polyhomogène sur tout un voisinage de l'hyperboloide $\mathcal{S}_0$. Notons que les équations couplées Einstein–Maxwell en jauge harmonique et en jauge de Lorenz se mettent sous la forme (1) avec (voir [1,4,5])

$$f := (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, A_\mu), \tag{3}$$

et donc $H^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}) +$ termes quadratiques.

## 2. Transformation conforme utilisée

Nous utilisons l'application conforme suivante $\phi: x \mapsto y$ qui envoie l'intérieur du cône lumière futur $I^+_{\eta,x}(0)$ de sommet l'origine dans le système de coordonnées $x^\alpha$, sur l'intérieur du cône lumière passé $I^-_{\eta,y}(0)$ de sommet l'origine dans le système de coordonnées $y^\mu: \phi: I^+_{\eta,x}(0) \to \mathbb{R}^{n+1}_y$ par

$$x^\alpha \mapsto y^\alpha := \frac{x^\alpha}{\eta_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu}.$$

Le voisinage futur de l'hyperboloide $\mathcal{S}_0$ dans le système de coordonnèes $x^\alpha$ est tranformé en un voisinage futur de l'hyperplan $\phi(\mathcal{S}_0) = \{y^0 = T_0\}$, avec $T_0 = -\frac{1}{2t_0} < 0$, à l'intérieur du cône passé $I^-_{y,\eta}(0)$. On pose :

$$\rho \equiv |\vec{y}|, \quad \tau := y^0, \quad x := -|\vec{y}| - y^0 \geqslant 0, \quad y^i = \rho\omega^i\big(v^A\big)$$

et on travaille désormais dans le système de coordonnées $(\tau, x, v^A)$. L'ensemble $\{x = 0\}$ represente le cône lumière passé dans le nouveau système de coordonnées et donc les points à l'infini dans le système de coordonnées initiales. Notre préoccupation sera donc de construire une solution de l'équation transformée de (1) dans un voisinage de l'hypersurface $\mathcal{N} := \{x = 0\}$ de la forme $\mathcal{V} = ]T_0, 0[\times]0, x_0[\times\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est une sous variété compacte sans bord de dimension $n - 1$.

### 2.1. *Équations transformées*

Si on pose

$$\hat{f} = \Omega^{-\frac{n-1}{2}} f \circ \phi^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda^\mu = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathfrak{g}|}}\partial_\nu\big\{\sqrt{|\det \mathfrak{g}|}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big\},$$

alors dans le système de coordonnées $(y^\mu)$, l'équation (1) devient :

$$\Box_{\mathfrak{g}} u = \mathcal{F}(u, \partial u), \tag{4}$$

avec $u = \hat{f}$,

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \Omega^{\frac{n-5}{2}}\widehat{H}^{\lambda\mu}\big\{\Omega^2\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\lambda + 4y_\mu y_\lambda y^\alpha y^\beta + 4\Omega\big(\delta^\alpha_\mu y_\lambda y^\beta + \delta^\beta_\lambda y_\mu y^\alpha\big)\big\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial y^\nu}\right) = {} & \Omega^{-\frac{n+3}{2}}\widetilde{F}\left(\Omega^{\frac{n-1}{2}}u, \Omega^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y^\nu}\right) - (n-1)\Omega^{\frac{n-5}{2}}\widehat{H}^{\lambda\mu}\big\{(n+1)y_\mu y_\lambda + \Omega\eta_{\lambda\mu}\big\}u \\ & + \big\{\lambda^\alpha - \Omega^{\frac{n-5}{2}}\widehat{H}^{\lambda\mu}\big\{4(n+1)y_\mu y_\lambda y^\alpha + (n+1)\Omega\big\{\delta^\alpha_\mu y_\lambda + \delta^\alpha_\lambda y_\mu\big\} + 2\eta_{\lambda\mu}\Omega y^\alpha\big\}\big\}\frac{\partial u}{\partial y^\alpha}.\end{aligned}$$

## 3. Énergie sur un espace-temps courbe et théorème d'existence

Dans l'espace $\mathcal{V}$ muni d'une métrique de Lorentz $\mathfrak{g}$ nous considérons l'équation des ondes (4) et nous supposons que les composantes de la métrique $\mathfrak{g}$ dans le système de coordonnées $(\tau, x, v)$ possèdent les propriétès suivantes :

(i) $\exists\epsilon_0 > 0$, tel que $-\mathfrak{g}^{\tau\tau} \geqslant \epsilon_0$ partout sur $\mathcal{V}$.
(ii) Les composantes $\mathfrak{g}^{\tau\tau}$ et $\mathfrak{g}^{\tau x}$ peuvent être écrites de la façon suivante : $\mathfrak{g}^{\tau\tau} = -1 + x\mathfrak{h}^0(\tau, x, v^A)$ et $\mathfrak{g}^{\tau\tau} + \mathfrak{g}^{\tau x} = x\mathfrak{h}^1(\tau, x, v^A)$ où les fonctions $\mathfrak{h}^0$ et $\mathfrak{h}^1$ sont bornées sur des ensembles bornés. Quant aux composantes $\mathfrak{g}^{xA}$ et $\mathfrak{g}^{xx}$ on suppose que : $\mathfrak{g}^{xA} = \mathrm{O}(x)$ et $\mathfrak{g}^{\tau\tau} + 2\mathfrak{g}^{\tau x} + \mathfrak{g}^{xx} = 1 + \mathrm{O}(x)$ et on pose $\mathfrak{g}^{xA} = x\mathfrak{h}^A$ et $\mathfrak{g}^{\tau\tau} + 2\mathfrak{g}^{\tau x} + \mathfrak{g}^{xx} = 1 + x\mathfrak{h}$, où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^A$ sont des fonctions bornées sur des ensembles bornés.

### 3.1. *Feuilletage et espaces fonctionnels*

Nous décrivons dans cette section les tranches d'espaces sur lequels nous obtiendrons nos estimations :

- On considère une famille d'hypersurfaces de genre espace $S_\lambda$, $\lambda \in [0, 1]$ telle que $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda = \mathcal{N}$ de la forme $S_\lambda = \{(\tau, x, v^A)\colon\ x = \sigma_\lambda(\tau)\}$, où $\sigma_\lambda$ est de classe $C^1$ et est telle que : $\sigma_0(x) \equiv 0$ i.e. $S_0 = \mathcal{N}$.
- Par $S$ nous désignons une hypersurface de genre espace transverse à l'hyperplan $\{\tau = T_0\}$ définie par $S = \{(\tau, x, v^A)\colon\ x = \sigma(\tau)\}$ où $\sigma$ est une fonction lisse de $\tau$ telle que $0 < \sigma(0) \leqslant \sigma(\tau) \leqslant \sigma(T_0) = x_0$.
- $\mathbf{H}_{\lambda,t} = \{(\tau, x, v^A);\ \tau = t, \sigma_\lambda(\tau) \leqslant x \leqslant \sigma(\tau)\}$, $\Omega_{\lambda,T} = \bigcup_{T_0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{H}_{\lambda,t}$.
- $\mathbf{H}_t = \{(\tau, x, v^A);\ \tau = t, 0 \leqslant x \leqslant \sigma(\tau)\}$, $\Omega_T = \bigcup_{T_0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{H}_t$.

Pour $V = \mathbf{H}_t$ ou $V = \mathbf{H}_{\lambda,t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit les espaces de fonctions suivants :

- $\mathcal{C}^{\alpha}_{\{x=0\},0}(V)$ est l'ensemble des fonctions $f$ lisses pour lesquelles la quantité $\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}_{\{x=0\},0}(V)} := \sup\limits_{(x,vA)\in V} |x^{-\alpha} f(x, v^A)|$ est finie.
- $\mathcal{C}^{\alpha}_{\{x=0\},k}(V)$ est l'ensemble des fonctions lisses $f$ pour lesquelles la quantité $\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}_{\{x=0\},k}(V)} := \sup\limits_{j+|\gamma|\leqslant k} \|(x\partial_x)^j \partial_v^{\gamma} f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}_{\{x=0\},0}(V)}$ est finie.
- $\mathcal{H}^{\alpha}_k(V)$ est l'ensemble des fonctions $f$ localement intégrables sur $V$ pour lesquelles la quantité $\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_k(V)} := \sum_{j+|\gamma|\leqslant k} \int_V (x^{-\alpha+j}(x\partial_x)^j \partial_v^{\gamma} f)^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \mathrm{d}\nu$ est finie.
  Dans cette dernière expression, $\mathrm{d}\nu$ est une mesure sur $\mathcal{O}$ provenant d'une metrique riemanienne sur $\mathcal{O}$.

### 3.2. Énergie

Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$, on considère le tenseur d'impulsion énergie à poids d'ordre $k$ associé à l'équation d'onde (4) :

$$\overset{(\beta)}{T_{\nu}}{}^{\mu} = x^{-2\alpha-1+2\beta_1}\left\{\nabla^{\mu}\mathcal{D}^{\beta}u\nabla_{\nu}\mathcal{D}^{\beta}u - \frac{1}{2}\delta_{\nu}{}^{\mu}\nabla^{\alpha}\mathcal{D}^{\beta}u\nabla_{\alpha}\mathcal{D}^{\beta}u\right\},$$

qu'on contracte avec le vecteur $Y = Y^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{\tau} - \partial_x$ pour obtenir la densité d'énergie que nous notons

$$T^Y := \overset{(\beta)}{T_{\tau}}{}^{\tau} - \overset{(\beta)}{T_{x}}{}^{\tau}.$$

On considère alors l'énergie suivante :

$$E^{\alpha}_k\big[u(\tau)\big] = \sum_{|\beta|=0}^{k} \int\limits_{\mathbf{H}_t} -\overset{(\beta)}{T}{}^{Y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^{n-1}\nu_{t,x} \quad \text{et} \quad E^{\alpha}_{k,\lambda}\big[u(t)\big] = \sum_{|\beta|=0}^{k} \int\limits_{\mathbf{H}_{\lambda,\tau}} -\overset{(\beta)}{T}{}^{Y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^{n-1}\nu_{t,x}.$$

En utilisant le théorème de Stokes, les inégalités de type Moser à poids, les théorèmes de plongement de Sobolev à poids et les lemmes de substitution établis dans [3], nous établissons l'inégalité d'énergie suivante pour $n \geqslant 7$ :

$$E^{\alpha}_{k,\lambda}\big[u(\tau)\big] + \|u\|_{L^{\infty}(\mathbf{H}_{\tau})} + \leqslant E^{\alpha}_{k,\lambda}\big[u(T_0)\big] + C\int\limits_{T_0}^{\tau} \Phi\big(E^{\alpha}_{k,\lambda}\big[u(s)\big], \|u\|_{L^{\infty}(\mathbf{H}_s)}\big)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

où $\Phi$ est une fonction continue et bornée lorsque ses variables sont bornées.

### 3.3. Théorème d'existence et propriétés de croissance des solutions

L'inégalité (5) permet de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *On considère l'équation aux dérivées partielles* (1) *avec* (3) *sur un espace-temps de dimension* $1+n \geqslant 8$. *On suppose que les données initiales prescrites sur l'hyperboloide* $\mathcal{S}_0$ *sont telles que* $\hat{f}|_{\phi(\mathcal{S}_0)} \in (\mathcal{H}^{\alpha}_{\infty} \cap L^{\infty})(\mathbf{H}_{T_0})$ *et* $\partial\hat{f}|_{\phi(\mathcal{S}_0)} \in \mathcal{H}^{\alpha}_{\infty}(\mathbf{H}_{T_0})$. *Alors il existe un temps* $\tau_* > T_0$ *et une solution* $\hat{f}$ *définie sur* $\Omega_{\tau_*}$ *telle que* : $\forall\tau \in [T_0, \tau_*]$, $\hat{f}(\tau) \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\infty}(\mathbf{H}_{\tau})$.

## 4. Solutions polyhomogènes

### 4.1. Espaces de fonctions polyhomogènes

Soit $\delta$ un réel strictement positif. Pour la définition des espaces de fonctions polyhomogènes $\mathcal{A}_{\{x=0\}}$, $\mathcal{A}^{\delta}_{\{x=0\}}$, $\mathcal{A}_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$ et $\mathcal{A}^{\delta}_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$ nous renvoyons le lecteur à [2], Eqs. (A.1)–(A.2), pp. 117–118.

*4.2. Solution polyhomogène d'une classe de système de premier ordre*

Introduisons les nouvelles variables $(y, \tilde{x}, v^A)$ suivantes : $\tau = \frac{y-\tilde{x}}{2} + T_0$ et $x = \tilde{x}$, ce qui implique que $\partial_y = \frac{1}{2}\partial_\tau$ et $\partial_{\tilde{x}} = \partial_x - \frac{1}{2}\partial_\tau$. Notons que dans ce système de coordonnées, l'hyperboloide $\mathcal{S}_0$ est representée par l'ensemble $\{y = \tilde{x}\}$. Puisque nous nous interessons au comportement de la solution dans un voisinage de l'ensemble $\{x = 0\}$, de façon similaire à [2] nous nous restreignons au sous-ensemble $\mathcal{U}$ de $\Omega_{\tau_*}$ défini comme $\mathcal{U} = \{(y, \tilde{x}, v^A)\colon\ 0 < \tilde{x} < y, v \in \mathcal{O}, 0 < y < 2(\tau_* - T_0)\}$.

**Définition 4.1.** Nous dirons qu'une fonction $G$ *satisfait la condition NL* s'il existe $N$, $p_i$, $q_i$, $m_i \in \mathbb{N}$ et des fonctions $H_i$ ayant chacune un zero uniforme d'ordre $m_i$ par rapport à la variable

$$w := \left(\psi_1, x\psi_2, x\varphi, x^2\partial_x h, x^2\partial_y h, x\partial_A h\right)$$

avec $\psi_1 = \hat{f}$, $\psi_2 = \partial_y \hat{f}$, $\varphi = (\partial_x \hat{f}, \partial_A \hat{f})$ et $h = (\psi_1, \psi_2, \varphi)$, tels que

$$G = \sum_{i=1}^{N} x^{-p_i\delta} H_i\left(z, x^{q_i\delta} w\right),$$

avec $i = 1, \dots, N$ et $m_i > \frac{p_i - \frac{1}{\delta}}{q_i}$.

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème 3.7 de [2], et sa démonstration reprend étape par étape celle de cette reférence :

**Théorème 4.2.** *Soit l'ensemble $\mathcal{U}$ défini ci-dessus, supposons que $p \in \mathbb{Z}$, $q, 1/\delta \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et soit $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\varphi$ avec $\psi_1 \in \mathcal{C}^{<-1}_{\{0\leqslant x\leqslant y\},\infty} \cap \mathcal{C}^{<0}_{\{0\leqslant x\leqslant y\},0}$, $\psi_2, \varphi \in \mathcal{C}^{<-1}_{\{0\leqslant x\leqslant y\},\infty}$, une solution sur $\mathcal{U}$ du sytème d'équations suivant :*

$$\begin{cases} \partial_y\varphi + B_{\varphi\varphi}\varphi + B_{\varphi\psi}\psi = L_{\varphi\varphi}\varphi + L_{\varphi\psi}\psi + a + G_\varphi, \\ \partial_x\psi + B_{\psi\varphi}\varphi + B_{\psi\psi}\psi = L_{\psi\varphi}\varphi + L_{\psi\psi}\psi + b + G_\psi, \end{cases} \tag{6}$$

*où les opérateurs $L_{ij} = L^A_{ij}\partial_A + xL^y_{ij}\partial_y + xL^x_{ij}\partial_x$ satisfont $L^\mu_{\varphi\varphi} \in x^\delta\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$, $L^\mu_{\psi\varphi}$, $L^\mu_{\varphi\psi}$, $L^\mu_{\psi\psi} \in \mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$, tandis que $B_{\varphi\varphi} \in C_\infty(\overline{\Omega}) + x^\delta\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$, $B_{\varphi\psi}$, $B_{\psi\psi}$, $B_{\psi\varphi} \in \mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$, $a, b \in x^{-1+\delta}\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$,*

$$\varphi|_{x=y} = \mathring{\varphi} \in x^{-1+\delta}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}, \quad \psi|_{x=y} = \mathring{\psi} \in x^{-1+\delta}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}. \tag{7}$$

*Si les termes non linéaires $G_\varphi$, $G_\psi$ satisfont la condition NL, alors*

$$(\psi, \varphi) \in \mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}} \times x^{\delta-1}\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}.$$

*Plus précisément, $\psi \in x^\delta\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}} + \mathcal{A}^\delta_{\{y=0\}}$, $\varphi \in x^{\delta-1}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} + x^{\delta-1}y\mathcal{A}^\delta_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$. En particulier, pour tout $\tau > 0$ on a*

$$(\psi, \varphi)|_{\{y\geqslant\tau\}} \in \mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} \times x^{\delta-1}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}},$$

*ce qui prouve que la solution est polyhomogène par rapport à $\{x = 0\}$ sur $\{y \geqslant \tau\}$.*

*4.3. Théorème d'existence de solutions polyhomogènes*

La coordonnée $x$ par rapport à laquelle l'expansion polyhomogène sera considérée est $x = \frac{1}{t+r}$ où $t = x^0$ et $r = |\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$. Nous pouvons enfin établir le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** *Considérons les équations d'Einstein–Maxwell sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 8$, écrites sous la forme* (1) *avec $f$ comme dans* (3)*. On suppose que les données initiales pour* (1)–(3)*, prescrites sur l'hyperboloide $\mathcal{S}_0$, sont polyhomogènes : $f|_{\mathcal{S}_0} \in x^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} \cap L^\infty$ et $\partial_t f|_{\mathcal{S}_0} \in x^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}$. Il existe un temps $t_+ > t_0$ et une solution définie sur $\bigcup_{t\in[t_0,t_+]}\mathcal{S}_t$ telle que $\forall t > t_0$, on a :*

$$f(t) = f|_{\mathcal{S}_t} \in x^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}} \quad et \quad \partial_t f(t) = \partial_t f|_{\mathcal{S}_t} \in x^{\frac{n-1}{2}-1}\mathcal{A}^\delta_{\{x=0\}}.$$

**Preuve.** Il est clair que dans le système de coordonnées $(y, \tilde{x}, v^A)$, l'équation transformée (4) peut se mettre sous la forme (6). De plus, l'inclusion $\mathcal{A}^{\delta}_{\{x=0\}}(\phi(\mathcal{S}_0)) \subset \mathcal{H}^{\theta}_{\infty}(\phi(\mathcal{S}_0))$, pour tout $\theta < 0$ montre que nous pouvons appliquer le Théorème 4.2 au système obtenu. $\square$

## Références

[1] Y. Choquet-Bruhat, P.T. Chruściel, J. Loizelet, Global solutions of the Einstein–Maxwell equations in higher dimension, Class. Quantum Grav. (2006) 7383–7394, arXiv:gr-qc/0608108.

[2] P.T. Chruściel, S. Łęski, Polyhomogeneous solutions of nonlinear wave equations without corner conditions, J. Hyp. PDE 3 (2006) 81–141, arXiv:math.ap/0506423.

[3] P.T. Chruściel, O. Lengard, Solutions of wave equations in the radiating regime, Bull. Soc. Math. de France 133 (2003) 1–72, arXiv:math.AP/0202015.

[4] H. Lindblad, I. Rodnianski, The global stability of the Minkowski space-time in harmonic gauge, 2004, arXiv:math.ap/0411109.

[5] J. Loizelet, Problèmes globaux en relativité générale, Ph.D. thesis, Université de Tours, juin 2008.