Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1021–1024

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Analyse de l'espace des phases et calcul pseudo-differential sur le groupe de Heisenberg

Hajer Bahouri [a], Clotilde Fermanian-Kammerer [b], Isabelle Gallagher [c]

[a] *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, 2092 Manar, Tunisie*
[b] *Université Paris Est, UMR 8050 du CNRS, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Creteil, France*
[c] *Institut de Mathématiques, UMR 7586, Université Paris 7, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 29 avril 2009 ; accepté après révision le 15 mai 2009

Disponible sur Internet le 27 juin 2009

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous définissons une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur le groupe de Heisenberg. Cette classe constitue une algèbre contenant les opérateurs différentiels. De plus, ces opérateurs pseudo-différentiels sont continus sur les espaces de Sobolev et l'on peut contrôler la perte de dérivée par leur ordre. Notre approche met en évidence des directions microlocales et complète, avec la théorie de Littlewood–Paley développée par Bahouri et al. une analyse microlocale du groupe de Heisenberg. ***Pour citer cet article : H. Bahouri et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Phase-space analysis and pseudo-differential calculus on the Heisenberg group. We establish pseudo-differential calculus on the Heisenberg group by defining an algebra of operators acting continuously on Sobolev spaces and containing the class of differential operators. Our approach puts into light microlocal directions and completes, with the Littlewood–Paley theory developed by Bahouri et al., a microlocal analysis of the Heisenberg group. ***To cite this article: H. Bahouri et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Dans le cas euclidien, les opérateurs pseudo-différentiels sont d'importance fondamentale (parmi d'autres exemples, citons la construction de parametrix pour les opérateurs elliptiques, la propagation du front d'onde ou encore les mesures de défaut microlocales). Notre objectif ici est de construire un calcul pseudo-différentiel sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ et de démontrer des résultats de continuité sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{H}^d)$ similaires à ceux du cas euclidien. On trouvera dans ce texte les définitions de ces opérateurs ainsi que les énoncés sur le caractère d'algèbre de l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels et sur leur action sur les espaces de Sobolev ; le lecteur intéressé par les preuves de ces résultats pourra consulter [1].

Adresse e-mail : isabelle.gallagher@math.jussieu.fr (I. Gallagher).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.06.003

Le groupe de Heisenberg, de part le rôle crucial qu'il joue dans différents domaines mathématiques tels que l'analyse harmonique, l'analyse complexe, la mécanique quantique ou les équations aux dérivées partielles, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, et en particulier dans le développement d'opérateurs pseudo-différentiels. Par exemple, dans [10] et [11], un calcul pseudo-différentiel a été construit en termes de fonctions des champs invariants à gauche et dans [7], un calcul pseudo-différentiel analytique a été mis en place ; notons également le travail récent [5] où un calcul pseudodifférentiel basé sur le calcul de Hörmander est construit, en utilisant exclusivement la convolution plutôt que la transformée de Fourier (pour une bibliographie plus exhaustive sur le sujet, consulter [1]). L'intérêt de la construction que nous présentons ici est qu'elle met en lumière les directions spectrales et complète ainsi l'élaboration d'une analyse microlocale sur le groupe de Heisenberg commencée dans [3] et [2] par le développement d'une théorie de Littlewood–Paley. A la différence du cas euclidien, il n'y a pas, sur le groupe d'Heisenberg, de notion simple de symboles comme fonctions, puisque la transformée de Fourier est une famille d'opérateurs. Ayant pour objectif que les opérateurs différentiels et les multiplicateurs de Fourier soient inclus dans cette algèbre, il est naturel de se pencher en premier lieu sur le symbole des champs invariants à gauche. Les considérations habituelles au moyen de la formule d'inversion suggèrent que leur symbole est lui même une famille d'opérateurs. Cette famille d'opérateurs se lit dans la représentation de Schrödinger de $\mathbb{H}^d$ comme un opérateur différentiel inclus dans une classe d'opérateurs d'ordre 1 pour le calcul de Weyl–Hörmander associé à l'oscillateur harmonique. Par ailleurs les symboles sur le groupe de Heisenberg ne dépendent pas uniquement de l'oscillateur harmonique, mais aussi d'une variable supplémentaire pour assurer le caractère d'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels. Cette difficulté additionnelle est surmontée grâce à une microlocalisation supplémentaire. Un symbole sur le groupe de Heisenberg est donc une fonction sur $\mathbb{H}^d$ à valeurs dans l'espace de familles de symboles de la classe de Weyl–Hörmander associée à l'oscillateur harmonique avec une dépendance en un paramètre supplémentaire. Et comme dans le cas euclidien, on associe à ce symbole un opérateur en utilisant la formule d'inversion de Fourier. Les résultats principaux sur ces opérateurs énoncés ici concernent leur stabilité par passage à l'adjoint et la composition, ainsi que leur opérance dans les espaces de Sobolev.

2. Le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ est l'espace $\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ muni de la loi de produit suivante : pour tous les couples (z, s) et (z', s') de $\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$,

$$(z, s) \cdot (z', s') \stackrel{\text{déf}}{=} \big(z + z', s + s' + 2\,\mathrm{Im}(z \cdot \overline{z'})\big).$$

Sa structure d'algèbre de Lie est engendrée par la base de champs invariants à gauche :

$$Z_j \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_{z_j} + i\bar{z}_j\partial_s, \quad \overline{Z}_j \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_{\bar{z}_j} - iz_j\partial_s, \quad \text{avec } j \in \{1, \dots, d\} \quad \text{et} \quad S \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_s = \frac{1}{2i}[\overline{Z}_j, Z_j].$$

Pour simplifier les notations on définit $Z_{j+d} \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{Z}_j$ pour $j \in \{1, \dots, d\}$, et pour tout multi-indice $\alpha \in \{1, \dots, 2d\}^k$ on écrit $\mathcal{Z}^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} Z_{\alpha_1} \cdots Z_{\alpha_k}$. À l'aide de ces champs de vecteurs, on construit comme suit des espaces de Sobolev :

Définition 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On désigne par $H^k(\mathbb{H}^d)$ l'espace de fonctions u dans $L^2(\mathbb{H}^d)$ (pour la mesure de Haar $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s$) telles que $\mathcal{Z}^\alpha u$ appartient à L^2 pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leqslant k$.

Cette définition s'étend par interpolation et dualité à tous les indices réels. On peut également définir sur le groupe de Heisenberg une notion d'espaces de Hölder de manière analogue à celle du cas euclidien en faisant intervenir la distance de Heisenberg ou la théorie de Littlewood–Paley.

Le groupe $\mathbb{H}^d$ étant non commutatif, la transformée de Fourier sur $\mathbb{H}^d$ est définie à l'aide de représentations irréductibles unitaires de $\mathbb{H}^d$ (pour plus de détails, consulter [6,9,10] ou [11]). En fait, chaque représentation unitaire irréductible de $\mathbb{H}^d$ admet deux réalisations classiques : la représentation de Bargmann et la représentation de Schrödinger. La représentation de Bargmann est définie à partir des espaces de Bargmann $\mathcal{H}_\lambda = \{F \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}^d, \|F\|_{\mathcal{H}_\lambda} < \infty\}$, où l'on a noté

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{2|\lambda|}{\pi}\right)^d \int\limits_{\mathbb{C}^d} \mathrm{e}^{-2|\lambda||\xi|^2} \big|F(\xi)\big|^2 \,\mathrm{d}\xi,$$

et les représentations irréductibles $(u^\lambda, \mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\neq 0}$ sont alors

$$u^\lambda_{z,s}F(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} F(\xi-\bar z)\mathrm{e}^{i\lambda s+2\lambda(\xi\cdot z-|z|^2/2)} \quad \text{si } \lambda>0, \quad \text{et} \quad u^\lambda_{z,s}F(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} F(\xi-z)\mathrm{e}^{i\lambda s-2\lambda(\xi\cdot\bar z-|z|^2/2)} \quad \text{si } \lambda<0.$$

Les monômes $F_{\alpha,\lambda}(\xi) = \frac{(\sqrt{2|\lambda|}\xi)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}$ pour $\alpha\in\mathbb{N}^d$, constituent une base Hilbertienne sur $\mathcal{H}_\lambda$. Pour f intégrable sur $\mathbb{H}^d$, on pose $\mathcal{F}(f)(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{H}^d} f(w)u^\lambda_w\,\mathrm{d}w$. La fonction $\mathcal{F}(f)$, à valeurs dans les opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\lambda$, est par définition la transformée de Fourier de f. Comme dans le cas euclidien, nous disposons d'une formule de Plancherel, et d'une formule d'inversion qui s'énonce comme suit :

$$f(w) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\big(u^\lambda_{w^{-1}}\mathcal{F}(f)(\lambda)\big)|\lambda|^d\,\mathrm{d}\lambda,$$

où $\mathrm{tr}(u^\lambda_{w^{-1}}\mathcal{F}(f)(\lambda))$ désigne la trace de l'opérateur $u^\lambda_{w^{-1}}\mathcal{F}(f)(\lambda)$. Un calcul immédiat montre que

$$\mathcal{F}(Z_jf)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)Q^\lambda_j,$$

où Q^λ_j est l'opérateur sur $\mathcal{H}_\lambda$ défini par

$$Q^\lambda_jF_{\alpha,\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} -\sqrt{2|\lambda|}\sqrt{\alpha_j+1}F_{\alpha+\mathbf{1}_j,\lambda} \quad \text{si } \lambda>0 \quad \text{et} \quad Q^\lambda_jF_{\alpha,\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{2|\lambda|}\sqrt{\alpha_j}F_{\alpha-\mathbf{1}_j,\lambda} \quad \text{si } \lambda<0,$$

et où l'on a écrit $\alpha\pm\mathbf{1}_j=\beta$ avec $\beta_k=\alpha_k$ si $k\neq j$ et $\beta_j=\alpha_j\pm 1$. De même $\mathcal{F}(\overline{Z}_jf)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\overline{Q}^\lambda_j$, où $\overline{Q}^\lambda_j \stackrel{\text{déf}}{=} Q^{-\lambda}_j$. Les calculs ci-dessus fournissent les formules suivantes, pour toute fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$:

$$Z_jf(w) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\big(u^\lambda_{w^{-1}}\mathcal{F}(f)(\lambda)Q^\lambda_j\big)|\lambda|^d\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{et} \quad -\Delta_{\mathbb{H}^d}f(w) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\big(u^\lambda_{w^{-1}}\mathcal{F}(f)(\lambda)D_\lambda\big)|\lambda|^d\,\mathrm{d}\lambda,$$

où $\Delta_{\mathbb{H}^d} = 2\sum_{j=1}^d(Z_j\overline{Z}_j+\overline{Z}_jZ_j)$ et D_λ est défini par $D_\lambda F_{\alpha,\lambda} = 4|\lambda|(2|\alpha|+d)F_{\alpha,\lambda}$. La représentation de Schrödinger est définie pour tout $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ par $v^\lambda_{z,s}f(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{i\lambda(s-2x\cdot y+2y\cdot\xi)}f(\xi-2x)$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Comme rappelé ci-dessus, les représentations $v^\lambda_{z,s}$ et $u^\lambda_{z,s}$ sont équivalentes. L'opérateur d'entrelacement est la transformation de Hermite–Weber $K_\lambda : \mathcal{H}_\lambda\to L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est unitaire et envoie les éléments de la base Hilbertienne $F_{\alpha,\lambda}$ de $\mathcal{H}_\lambda$ sur les fonctions propres de l'oscillateur harmonique $-\Delta_\xi+|\lambda||\xi|^2$. En introduisant la transformation d'échelle $T_\lambda f(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} |\lambda|^{-d/4}f(|\lambda|^{-1/2}\xi)$ et en posant $J_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} T_\lambda K_\lambda$, il vient par un calcul direct que $J_\lambda Q^\lambda_jJ^*_\lambda = \sqrt{|\lambda|}(\partial_{\xi_j}-\xi_j)$ si $\lambda>0$ et $J_\lambda Q^\lambda_jJ^*_\lambda = \sqrt{|\lambda|}(\partial_{\xi_j}+\xi_j)$ si $\lambda<0$.

Des formules analogues pour $\overline{Q}^\lambda_j$ impliquent que $J_\lambda D_\lambda J^*_\lambda = 4|\lambda|(-\Delta_\xi+|\xi|^2)$. On en déduit que $-\Delta_{\mathbb{H}^d}$ est associé à l'oscillateur harmonique dans la représentation de Schrödinger. On est ainsi amené à considérer le calcul de Weyl–Hörmander (voir [4,8]) associé à la métrique et au poids de l'oscillateur harmonique : $g(\xi,\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2}{1+\xi^2+\eta^2}$ et $m(\xi,\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} (1+\xi^2+\eta^2)^{\frac12}$. Ca pourrait etre cite, soit en complément, soit à la place de l'article cité. Rappelons que pour tout réel μ, on peut définir la classe de symboles $S(m^\mu,g)$ de fonctions régulières a sur $T^*\mathbb{R}^d$ vérifiant pour tout entier n,

$$\|a\|_{n,S(m^\mu,g)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{j\leqslant n,(\xi,\eta)\in T^*\mathbb{R}^d\\ g_{(\xi,\eta)}(T_j)\leqslant 1}} \frac{|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_j}a(\xi,\eta)|}{m^\mu(\xi,\eta)} < \infty,$$

et si a est un symbole de $S(m^\mu,g)$, alors sa quantification de Weyl est l'opérateur qui associe à toute fonction u de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la fonction $op^w(a)u$ définie par :

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^d, \quad \big(op^w(a)u\big)(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathrm{e}^{i(\xi-\xi')\cdot\eta}a\left(\frac{\xi+\xi'}{2},\eta\right)u(\xi')\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta.$$

3. Symboles et opérateurs pseudo-différentiels sur le groupe de Heisenberg

Étant donné un nombre positif réel non entier ρ qui va mesurer la régularité dans la variable Heisenberg, on introduit comme suit la classe de symboles sur le groupe de Heisenberg.

Définition 2. Soit μ un nombre réel. Une fonction régulière a définie sur $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{2d}$ est dite symbole d'ordre μ et on écrit $a \in S_{\mathbb{H}^d}(\mu)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la semi-norme suivante est finie :

$$\|a\|_{n;S_{\mathbb{H}^d}(\mu)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\lambda \neq 0,(y\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}} \sup_{|\beta|+m\leqslant n} |\lambda|^{m-\frac{|\beta|}{2}} \bigl(1+|\lambda|\bigl(1+\xi^2+\eta^2\bigr)\bigr)^{\frac{|\beta|-\mu}{2}} \bigl\|\partial_\lambda^m \partial_{(\xi,\eta)}^\beta a(\cdot,\lambda,\xi,\eta)\bigr\|_{C^\rho(\mathbb{H}^d)},$$

et si la fonction $(w,\lambda,\xi,\eta) \mapsto a(w,\lambda,\mathrm{sgn}(\lambda)\frac{\xi}{\sqrt{|\lambda|}},\frac{\eta}{\sqrt{|\lambda|}})$ est régulière au voisinage de $\lambda = 0$ pour tout $(w,\xi,\eta) \in \mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{2d}$.

Ces symboles sont alors quantifiés de la manière suivante :

Définition 3. Soit $a \in S_{\mathbb{H}^d}(\mu)$. L'opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{H}^d$ de symbole a est l'opérateur qui associe à toute fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ la fonction $\mathrm{Op}(a)f$ définie par

$$\mathrm{Op}(a)f(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}\bigl(u_{w^{-1}}^\lambda \mathcal{F}(f)(\lambda) A_\lambda(w)\bigr)|\lambda|^d \, \mathrm{d}\lambda, \quad \text{où } A_\lambda(w) \stackrel{\text{déf}}{=} J_\lambda^* op^w\bigl(a(w,\lambda,y,\eta)\bigr) J_\lambda.$$

Il est facile de vérifier que les opérateurs de différentiation Z_j et $\overline{Z}_j$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, tandis que S et $\Delta_{\mathbb{H}^d}$ sont d'ordre 2. On peut montrer aussi par exemple que les opérateurs de Littlewood–Paley sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro, et calculer leurs symboles (voir [1]). Les résultats principaux obtenus dans [1] sont rassemblés dans le théorème suivant :

Théorème 1. *Soient* $\mathrm{Op}(a)$ *and* $\mathrm{Op}(b)$ *deux opérateurs pseudo-différentiels respectivement d'ordre* μ_1 *et* μ_2*, et de classe* C^ρ.

- *Si* $\rho > 2(2d+1) + |\mu_1|$*, alors l'opérateur* $\mathrm{Op}(a)^*$ *est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* μ_1.
- *Si* $\rho > 2(2d+1) + |\mu_1| + |\mu_2|$*, alors l'opérateur* $\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b)$ *est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre inférieur ou égal à* $\mu_1 + \mu_2$.
- *Si* $\rho > 2(2d+1)$*, alors l'opérateur* $\mathrm{Op}(a)$ *est continu de* $H^s(\mathbb{H}^d)$ *dans* $H^{s-\mu_1}(\mathbb{H}^d)$*, pour tout réel* s *tel que* $|s| < \rho$*. De plus, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\|\mathrm{Op}(a)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{H}^d),H^{s-\mu_1}(\mathbb{H}^d))} \leqslant C\|a\|_{n,S_{\mathbb{H}^d}(\mu)}$.

Références

[1] H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer, I. Gallagher, Phase-space analysis and pseudo-differential calculus on the Heisenberg group, 127 pp., soumis.
[2] H. Bahouri, I. Gallagher, Paraproduit sur le groupe de Heisenberg et applications, Revista Matematica Iberoamericana 17 (2001) 69–105.
[3] H. Bahouri, P. Gérard, C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généra lisées sur le groupe de Heisenberg, Journal d'Analyse Mathématique 82 (2000) 93–118.
[4] R. Beals, Ch. Fefferman, Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators I, Communications on Pure and Applied Mathematics 27 (1974) 1–24.
[5] S. Coré, D. Geller, Hörmander type pseudodifferential calculus on homogeneous groups, prépublication, 2008.
[6] J. Faraut, K. Harzallah, Deux cours d'analyse harmonique, École d'Été d'analyse harmonique de Tunis, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1984.
[7] D. Geller, Analytic Pseudo-differential Operators for the Heisenberg Group and Local Solvability, Mathematical Notes, vol. 37, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990, viii+495 pp.
[8] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Equations, vol. 3, Springer-Verlag, 1985.
[9] A.I. Nachman, The wave equation on the Heisenberg group, Communications in Partial Differential Equations 7 (1982) 675–714.
[10] E.M. Stein, Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1993.
[11] M.E. Taylor, Noncommutative Harmonic Analysis, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 22, AMS, Providence, Rhode Island, 1986.